

力学丛书·典藏版 — 20

激波和高温流体动力学 现象物理学 (下册)

[苏] Я. Б. 泽尔道维奇 著
Ю. П. 莱依捷尔

LX



科学出版社

力学丛书·典藏版 20

激波和高温流体动力学现象 物理学

下 册

〔苏〕 Я. Б. 泽尔道维奇 著
Ю. П. 莱依捷尔
张树材 译

科 学 出 版 社

1985

内 容 简 介

本书是关于物理气体动力学方面的系统理论著作。书中介绍了气体动力学基础、激波理论和辐射输运理论。对于高温、高压下物质的热力学和光学性质、离解和电离等一些非平衡过程的动力论、在激波中和爆炸时所出现的与光辐射和辐射热交换有关的各种现象、激波在固体中的传播等问题,都进行了很好的研究,其中有许多地方是属于作者自己的贡献。

本书可供从事应用物理和新技术的物理工作者、力学工作者、工程师及相应专业的大学生、研究生阅读。

原书共十二章。中译本分上、下两册出版。下册包括后六章。

图书在版编目 (CIP) 数据

激波和高温流体动力学现象物理学. 下册 / (苏) 泽尔道维奇等著; 张树材译. —北京: 科学出版社, 2016.1

(力学名著译丛)

ISBN 978-7-03-046977-9

I. ①激… II. ①泽… ②张… III. ①激波 ②高温-流体动力学
IV. ①035

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 006909 号

责任编辑: 赵彦超 赵敬伟 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1985 年 5 月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32

2016 年 3 月第二次印刷 印张: 14

字数: 137,000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

目 录

第七章 气体中激波阵面的结构

- § 1. 引言(1)
- 1. 密聚跃变..... (5)
 - § 2. 粘性密聚跃变 (5) § 3. 粘性和热传导在密聚跃变形成中的作用 (13)
 - § 4. 二元混合气体中的扩散 (18) § 5. 沿二元混合气体传播的激波中的扩散 (21)
- 2. 弛豫层..... (25)
 - § 6. 一些自由度被缓慢激发的气体中的激波 (25) § 7. 分子振动的激发 (31)
 - § 8. 双原子分子的离解 (36) § 9. 空气中的激波 (40) § 10. 单原子气体中的电离 (43) § 11. 空气中的电离 (52) § 12. 等离子体中的激波 (54) § 13. 激波中的等离子体的极化和电场的产生 (62)
- 3. 激波阵面内的辐射热交换..... (66)
 - § 14. 定性的图象 (66) § 15. 关于波阵面结构问题的近似叙述 (71) § 16. 具有亚临界强度的激波 (75) § 17. 具有超临界强度的激波 (80) § 18. 大辐射能量密度和大辐射压力之下的激波 (84)

第八章 流体动力学过程中的物理-化学动力学

- 1. 非平衡气体动力学..... (89)
 - § 1. 无热力学平衡时的气体动力学方程 (89) § 2. 熵的增加 (93) § 3. 超声波的反常色散和反常吸收 (95) § 4. 超声波的色散规律及其吸收系数 (101)
- 2. 化学反应..... (107)
 - § 5. 空气中强爆炸时氮的氧化 (107)
- 3. 气体向真空飞散时热力学平衡的破坏 (114)
 - § 6. 气云的飞散 (114) § 7. “淬火”效应 (116) § 8. 电离平衡的破坏 (120) § 9. 电离平衡破坏以后复合的动力论和气体的冷却 (122)
- 4. 绝热膨胀时蒸气的凝结..... (129)
 - § 10. 蒸气的饱和与凝结中心的产生 (129) § 11. 凝结过程的热力学和动力论 (132) § 12. 向着真空飞散的蒸发物质云中的凝结 (135) § 13. 关于宇宙尘埃的

形成机制问题。关于凝结实验室研究的注记(140)

第九章 在激波中和空气中强爆炸时出现的一些光现象

1. 气体中大强度激波波阵面的亮度 (143)
§ 1. 亮度温度与阵面之后的真实温度之间的定性关系 (143) § 2. 光量子在冷空气中的吸收 (149) § 3. 关于空气的最大亮度温度 (150) § 4. 空气中很强大激波的极限亮度 (154)
2. 强爆炸时所观察到的光学现象和空气的辐射致冷 (156)
§ 5. 光现象的综述 (156) § 6. 激波阵面与火球边界的脱离 (163) § 7. 火球的最小亮度效应 (166) § 8. 空气的辐射致冷 (171) § 9. 温度陡坡——冷却波的产生 (173) § 10. 能量的平衡和冷却波的传播速度 (176) § 11. 冷却波的向心收缩 (179) § 12. 空气中的火花放电 (182)
3. 冷却波阵面的结构 (184)
§ 13. 问题的提法 (184) § 14. 发自波阵面表面的辐射能流 (189) § 15. 强波阵面中的温度分布 (192) § 16. 考虑绝热冷却的情形 (195)

第十章 热 波

- § 1. 物质的热传导 (199) § 2. 非线性 (辐射) 热传导 (201) § 3. 在线性热传导和非线性热传导之下热量传播的特性 (204) § 4. 热波自瞬时平面能源向外传播的规律 (210) § 5. 发自瞬时平面能源的自模热波 (212) § 6. 热量自瞬时点状源向外的传播 (216) § 7. 某些自模平面问题 (221) § 8. 评注: 考虑运动时热量向介质中的穿透 (225) § 9. 自模解可作为非自模问题的极限解 (227) § 10. 关于热量借助非平衡辐射的输运 (230)

第十一章 固体中的激波

- § 1. 引言 (234)
1. 在高压和高温下固体的热力学性质 (238)
§ 2. 冷物质的压缩 (238) § 3. 原子的热运动 (243) § 4. 原子作小振动之物体的状态方程 (246) § 5. 电子的热激发 (251) § 6. 三项状态方程 (254)
2. 激波绝热曲线 (255)
§ 7. 凝聚物质的激波绝热曲线 (255) § 8. 激波绝热曲线的解析表示 (259) § 9. 弱强度激波 (261) § 10. 多孔物质的激波压缩 (263) § 11. 不很强的激波向物体自由表面的奔驰 (267) § 12. 寻求固体激波绝热曲线的实验方法 (272) § 13. 由激波压缩实验的结果求出冷压缩曲线 (280)

3. 声波和波的分裂..... (283)
- § 14. 固体的静力学形变(283) § 15. 固体向流动性状态的转变(288) § 16. 声波的传播速度(292) § 17. 压缩波和卸载波的分裂(295) § 18. 受激波压缩之物质中的声速的测量(297) § 19. 相变和激波的分裂(301) § 20. 相变介质中的稀疏激波(308)
4. 强激波向物体自由表面奔驰时的一些现象..... (313)
- § 21. 卸载后的物质为固态和气态的两种极端情况(313) § 22. 卸载时物质完全蒸发的判据(317) § 23. 借助对卸载后的气相物质的研究可从实验上确定强激波中的温度和熵(321) § 24. 卸载时金属蒸气的发光(324) § 25. 注记: 原则上可根据卸载时的发光来测量激波中的熵(329)
5. 一些其它现象..... (330)
- § 26. 非金属物体在激波中的电导率(330) § 27. 受激波压缩之物质的折射系数的测量(333)

第十二章 气体动力学中的一些自模过程

1. 引言..... (337)
- § 1. 气体动力学方程所容许的变换群(337) § 2. 自模运动(339) § 3. 运动自模的条件(343) § 4. 两类自模解(345)
2. 球面激波的向心汇聚和液体中气泡的湮没..... (347)
- § 5. 关于激波汇聚问题的提法(347) § 6. 基本方程(349) § 7. 方程的研究(352) § 8. 解的一些结果(357) § 9. 气泡的湮没, 瑞利问题(361) § 10. 气泡的湮没, 关于压缩性和粘性的考虑(365)
3. 激波向星体表面的奔驰..... (367)
- § 11. 密度按幂指数规律减小时激波的传播(367) § 12. 关于超新星爆炸和宇宙射线起源问题(372)
4. 在短促冲击作用下气体的运动..... (376)
- § 13. 问题的提法和运动的一般特性(376) § 14. 自模解和能量与动量的守恒定律(380) § 15. 方程的解(383) § 16. 动量和能量的守恒定律对于自模指数的限制(389) § 17. 非自模运动向极限体系的过渡和自模解中能量的“无限性”(391) § 18. 对气体表面的集中冲击(表面上的爆炸)(396) § 19. 对集中冲击和线状冲击之自模运动进行简化讨论的某些结果(399) § 20. 快速降落的陨石对行星表面的冲击(401) § 21. 无限多孔介质中的强爆炸(403)
5. 激波在密度为指数分布的非均匀大气中的传播..... (406)
- § 22. 强烈点爆炸(406) § 23. 激波在密度增加方向上的自模运动(410) § 24. 自

模解在爆炸问题中的应用(416) § 25. 激波在密度减少方向上的自模运动, 在爆炸中的应用(417)

附录..... (422)

参考文献..... (426)

第七章 气体中激波阵面的结构

§1 引言

在第一章曾给出激波的一些基本概念，并指出，理想流体的流体动力学方程允许存在一组描述激波的间断解。间断面两侧的一些流体动力学量：密度、压力、速度彼此间由一些差分方程相联系，而这些差分方程则相应于描述连续流区域的微分方程。这两种方程都是普遍的质量、动量¹⁾、能量守恒定律的表达形式。从这些守恒定律得到结论：在间断面上物质的熵也要发生跃变（即增加）。激波中熵值的增加仅由质量、动量、能量守恒条件和物质热力学性质所决定，而与导致熵增加的耗散机制完全无关。

在某种意义上说下述事实令人难以置信：物质的绝热运动方程竟允许存在一个熵在其上发生跃变的曲面。激波压缩的不可逆性表明，在激波压缩中存在一些耗散过程——粘性和热传导，是这些过程导致了熵的增加。

正是由于粘性的缘故，在间断为静止的坐标系中，流向间断面的气流之动能的相当大一部分才不可逆地转变成热量。

因此，如果我们关心的是激波压缩机制和过渡层（物质在该层中发生由初态到终态的变化，而该层本身在理想流体的流体动力学范围内乃由一个数学曲面来代替）的内部结构及其厚度的话，那就必须转到能对耗散过程进行描述的理论上来。在第一章，这个问题曾针对弱强度激波进行过讨论。但在本章我们对激波强度²⁾不再加以限制。

一般来说，在流体动力学过程中，连续流区域内的各宏观参量的变化与能建立热力学平衡的弛豫过程的速度相比总是极其缓慢

1) 该词在上册曾译为“冲量”。见上册第1页注。——译者注

2) 该词在上册曾译为“激波振幅”。——译者注

的。气体的每个质点在每个时刻都处于热力学平衡状态，而这种平衡是与缓慢变化的宏观参量相适应的，仿佛它在“跟踪”这些参量的变化。因此，当在理想流体的流体动力学范围内考察激波间断时，完全可以假定间断面两侧的气体都处于热力学平衡态。

在使气体由热力学平衡的初态变化到同样也是热力学平衡的终态的一个很薄的过渡层内，密度、压力等参量的变化是很快的。在这个所谓激波阵面的区域内，热力学平衡可以遭到严重破坏。因此当研究激波阵面的内部结构时，就必须要考虑弛豫过程的动力论，并要对建立物质在波阵面之后的热力学平衡终态的机制进行仔细的研究。

从许多角度来看，对激波阵面的内部结构进行研究是很有意义的。首先，结构问题作为纯理论的课题就引起我们的注意，因为它的解可以帮助我们了解激波压缩的物理机制，而这种压缩乃是气体动力学中最值得注意的现象之一。其次，激波已用来在实验室中获得高温，以及研究在高温气体中所产生的各种过程：分子振动的激发、分子的离解、化学反应、电离、光辐射等等（见第四章）。

借助对激波阵面结构所进行的理论研究，可以从实验上得到很多关于上述过程之速度的资料。

最后，对辐射在其中起重要作用的极强激波之阵面结构所进行的研究，将有助于阐明像波阵面表面亮度这样重要的特性，并可以用来解释在实验中和在空气中发生强爆炸时所观察到的某些有趣的光学效应（见第九章）。

关于激波阵面结构的数学理论基础，就是假定激波阵面的结构是稳定的。物质在激波中从初态变化到终态所需要的时间很短，比波阵面之后连续流区域内的气体参量发生明显改变所需要的特征时间小很多。同样，波阵面的宽度比起长度的特征尺度也小很多，长度的特征尺度就是指可使波阵面之后的气体状态发生明显改变的距离，比如说从激波阵面到“推”波的活塞之间的距离（活塞作变速运动）。

激波通过量级为波阵面宽度的距离所需的时间是很短的，在这样短的时间内激波的传播速度、波阵面之后气体的压力以及其它一些参量实际上没有发生变化。可是当激波沿初始参量为已知的气体传播时，其阵面内所进行的一些内部过程的动力论却仅与激波强度有关。

因此在某一比较长的时间间隔内，流进激波间断之气体的每一质点都要经历和前面的一些质点相同的一系列状态。换句话说，各种参量在激波阵面内的分布形成一个固定图形，在这个时间间隔内它作为整体随波阵面一起运动(图 7.1)。

如果波阵面的速度用 $D(D = |D| > 0)$ 表示，而表面上某一指定地点的与波阵面表面垂直的坐标用 x 表示，那么可以说波内气体的所有状态参量都只能通过组合 $x + Dt$ 而依赖坐标和时间。在与波阵面相固联的坐标系中，过程是定常的，即与时间无关。这种情形(顺便说一句，在推导间断面上的关系时它已被用到过)从数学的观点来看可使问题大大简化，因为在同波一起运动的坐标系中气体的所有状态参量都不再是两个变量 x 和 t 的函数，而只是坐标一个变量的函数，而这种过程可由常微分方程来描述。

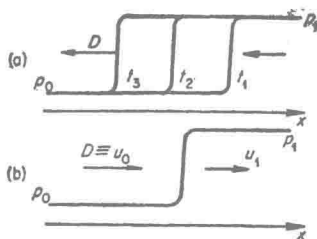


图 7.1 激波中的压力剖面。a) 激波在实验室坐标系中的传播；b) 与波阵面相固联的坐标系中的跃变

在第一章 § 23 中，当考察弱强度激波阵面的宽度时曾经指出，密聚跃变之宽度的尺度乃是分子自由程。当激波强度增大时其宽度减小，而当波阵面之后的压力升高值（即超过初始压力那部分）与初始压力可以比较时，波阵面的宽度就大约等于分子自由程。

物理上很清楚，在强激波内密聚跃变的宽度总是大约等于分子自由程，因为在这种跃变中激波压缩是在“粘性”¹⁾力的作用下发生的。如果在波阵面之后的气体为静止的坐标系中(在与活塞相固联的坐标系中)来考察激波，或者同样地，我们来考察碰到固定墙壁的高速气流所受到的滞止现象，这一点是很容易阐明的。分子的定向运动动能(流体动力学运动动能)在滞止时转变为紊乱运动的动能，即热量。为了“滞止”其定向速度比初始的热运动速度大很多的快分子(这相当于波的强度很大：波速超过声速很多)，也只需几次气体动力论的碰撞就已足够了，因为分子的每一次碰撞平均地说都要使自己的运动方向改变一个很大的角度。因此经几次碰撞之后分子的定向动量就几乎全部消失，而速度也就成了紊乱的。

为使能量按各种不同内部自由度(分子振动的激发、离解、电离)进行分配，一般要多次碰撞。建立最终的热力学平衡态所需要的弛豫层的宽度，要比最初的密聚跃变的宽度大很多。因而，激波阵面的整个过渡层可以分为两个在宽度上有很大差别的区域：一个是很薄的“粘性”密聚跃变层，另一个是延展得较长的弛豫层。

在气体会被加热到高温的足够强的激波内，辐射和辐射热交换起重要作用。这时波阵面的构造还要复杂一些。其阵面的宽度是由最大尺度——辐射自由程来决定的，辐射自由程表征了与辐射热交换相关的过渡过程，它通常要比粒子的气体动力论的自由程大很多倍。

在以下各节我们将对激波阵面构造的特性进行仔细的考察。同时我们将首先考察强度较弱的激波，然后再逐渐过渡到越来越

1) 应该强调指出，在该情况下“粘性”的概念是有条件性的。当谈到粘性的时候，通常是指，速度的梯度很小，而速度发生明显改变的距离要比分子自由程大很多。换句话说，流体动力学中所用的粘性乃是一个“宏观”概念。如果在分子自由程的距离上发生了气体的速度和密度的急剧变化，那么这一“微观”尺度的现象就不能根据流体动力学而应根据气体的分子动力论来加以讨论。适合梯度很大的情况，应将激波阵面中的“粘性”理解为是由分子的碰撞所决定的、能使分子的定向速度转变为紊乱速度的一种机制。

强的激波。

1. 密聚跃变

§ 2 粘性密聚跃变

由于在密聚跃变中激波压缩过程是发生在可与分子的气体动力论自由程相比较的距离之内,因而在研究跃变的结构时,严格地说应该从气体的分子动力论的一些概念出发。但是作为这个方向上的第一步,自然是要在实际流体的流体动力学范围内来考察问题,所谓实际流体就是考虑了耗散过程:粘性和热传导。同时,与第一章 § 23 中的计算不同,我们不再对激波的强度加以限制。为了叙述上的连贯,在这里我们重复第一章 § 23 中的某些推导和计算。为了不因为那些在该情况下并不重要的、与气体的非平动自由度的缓慢激发有关的细节而使讨论复杂化,我们认为气体是单原子的,且不考虑电离。

在与波阵面相固联的坐标系中,写出具有粘性和热传导的气体的一维定常流动方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \rho u &= 0, \\ \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} &= 0, \\ \rho u T \frac{d\Sigma}{dx} &= \frac{4}{3} \mu \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{dS}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

这里 Σ 是比熵, μ 是粘性系数¹⁾, S 是非流体动力学的能流,在通常的热传导情况下,它等于

$$S = -\kappa \frac{dT}{dx}, \quad (7.2)$$

此处 κ 是热传导系数。

对于方程组(7.1)给出下述边界条件,在波阵面“之前”和波阵面“之后”梯度都不存在,而且各流体动力学量也都趋近于初值(当

1) 在该情况下,不再区别第一粘性和第二粘性的概念。

$x = -\infty$ 时)和终值(当 $x = +\infty$ 时). 借助热力学第二定律, 变换(7.1)的第三个方程:

$$Td\Sigma = d\varepsilon + pdV = dw - \frac{1}{\rho} dp,$$

并将式(7.1)的所有方程积分, 我们便得到方程组的第一积分:

$$\left. \begin{aligned} \rho u &= \rho_0 D, \\ p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} &= p_0 + \rho_0 D^2, \\ w + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\rho_0 D} \left(S - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} \right) &= w_0 + \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

在这里积分常数是由附有脚标“0”的气体的初始状态参量和波阵面速度 $D \equiv u_0$ 来表示的.

如果将方程(7.3)用于终态(它的参量附有脚标“1”), 我们就得到已知的、间断面上的关系, 为了方便把它们重新写出

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_0 D, \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_0 + \rho_0 D^2, \\ w_1 + \frac{u_1^2}{2} &= w_0 + \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

从这些关系得出结论, 激波中熵的跃变 $\Sigma_1 - \Sigma_0 = \Sigma(p_1, \rho_1) - \Sigma(p_0, \rho_0)$ 既与耗散机制完全无关, 也与粘性系数 μ 和热传导系数 κ 的大小完全无关. 后两者只能决定波阵面的内部结构和它的宽度 δ . 粘性密聚跃变的厚度 δ 正比于系数 μ 和 κ , 而 μ 和 κ 自己又正比于分子自由程 l . 在 $l \rightarrow 0$ 的极限情况下, 实际流体的流体动力学在连续流区域内就变成理想流体的流体动力学. 至于说激波的阵面, 那么在 $l \rightarrow 0$ 的极限情况下它就成了一个数学平面, 因为 $\delta \sim l \rightarrow 0$. 这时所有流体动力学量的梯度在波阵面内都按 $1/l$ 而趋向无穷大, 但这些量的跃变却是有限的.

当给定粘性系数和热传导系数以及热力学关系 $w(p, \rho)$ (在单原子气体中 $w = c_p T = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho}$) 之后, 就可以对具有上述边界条

件的方程(7.3), (7.2)进行数值积分。但是, 毕竟还是解析解方便得多, 因为它可以明显地展示出现象的全部规律性。遗憾的是, 在一般情况下要求给出方程组的解析解那是不可能的。如果仅限于弱强度激波, 并将解展开为关于某个气体动力学量的小变化的级数, 我们便可以解析地来积分上述方程。这个方法在第一章 § 23 中曾用来估计波阵面的宽度 (其完全解可在 Л. Д. 朗道和 Е. М. 栗弗席兹的书(文献[1])中找到)。

在一个极特殊的情况下, 可以求得具有任意强度之激波的精确解析解。这个解首先由贝克尔(文献[2])所得到, 而后又由莫尔督霍夫和里比(文献[3])进行了研究, 它描述了密聚跃变之结构的全部物理规律, 并具有简单和鲜明的特点。现在我们来详细地讲解它。

一般来说, 气体的输运系数(运动粘性系数 $\nu = \mu/\rho$ 和导热系数 $\chi = \kappa/c_p\rho$) 大小差不多, 并都近似等于扩散系数 $l\bar{\nu}/3$ 。

我们假定被称为普兰德特尔数的组合 $Pr = \mu c_p/\kappa = \nu/\chi$ 等于 $3/4$ 。在这种情况下, 式(7.3)第三个方程中的括号内的表达式就变成量 $w + \frac{u^2}{2}$ 的全微分, 而方程本身则取如下形式:

$$\left(w + \frac{u^2}{2}\right) - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_0 D} \frac{d}{dx} \left(w + \frac{u^2}{2}\right) = w_0 + \frac{D^2}{2}.$$

写出这个线性方程的积分, 我们便可看出, 要满足量 $w + \frac{u^2}{2}$ 在 $x = +\infty$ 时有限这一条件, 我们只能认为它不依赖 x :

$$w + \frac{u^2}{2} = w_0 + \frac{D^2}{2}. \quad (7.5)$$

这样一来, 当普兰德特尔数 $Pr = 3/4$ 时, 关系(7.5)不仅在波阵面之后得到满足(见式(7.4)), 而且在任意一个中间点 x 处也得到满足。

1) 这个方程类似于定常流理论中的伯努利积分

方程(7.5)在 p, V 平面上给出一条曲线, 气体沿着这条曲线从初态变化到终态. 注意到在我们所考察的单原子气体中 $w = \frac{5}{2} pV$, 再变换到无量纲的速度或比容:

$$\eta = \frac{u}{D} = \frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho},$$

我们便求得这条曲线的方程:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 + \frac{M^2}{3}(1 - \eta^2)}{\eta} = \frac{4\eta_1 - \eta^2}{(4\eta_1 - 1)\eta}. \quad (7.6)$$

这里的 η_1 属于激波阵面之后的终态:

$$\eta_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \frac{p_0}{\rho_0 D^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{M^2}, \quad (7.7)$$

$M = D/c_0$ 是马赫数, c_0 是初态的声速 ($c_0^2 = \frac{5}{3} p_0 V_0$). 在推导公式(7.6), (7.7)时, 曾利用联系波阵面两侧各量的一些关系. 以 p_1/p_0 和 η_1 为变量的激波绝热曲线具有如下形式:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{4 - \eta_1}{4\eta_1 - 1}.$$

在图 7.2 上画出了激波绝热曲线和波中质点的状态沿其变化的曲线(以及联系初态和终态的特殊直线).

借助公式(7.6)和(7.3)的前两个方程, 我们写出能确定波阵面中速度剖面和体积剖面的 $\eta(x)$ 的微分方程:

$$\frac{5}{3} \frac{\mu}{\rho_0 D} \eta \frac{d\eta}{dx} = -(1 - \eta)(\eta - \eta_1). \quad (7.8)$$

为了简单, 认为粘性系数不依赖于温度, 并就等于 $\mu = \rho_0 l_0 \bar{v}_0/3$ (粘性系数与密度无关, 因为 $\mu \sim \rho l$, 而 $l \sim 1/\rho$). 方程(7.8)的积分中包含一个与坐标原点选择的任意性相适应的相加常数. 将坐标原点放在速度剖面的拐点(放在波的“中心”), 并注意到公式(7.7), 我们求得 $\eta(x)$ 的表达式:

$$\frac{1-\eta}{(\eta-\eta_1)^{\eta_1}} = \frac{1-\sqrt{\eta_1}}{(\sqrt{\eta_1}-\eta_1)^{\eta_1}} e^{\frac{a^{M^2-1} \pi}{M I_0}} \quad (7.9)$$

$$\left(a = \frac{2\eta}{40\sqrt{\frac{5\pi}{6}}} = 1.1 \right).$$

已知速度 $u = D\eta$ 的剖面, 则很容易确定所有其它量的剖面。例如, 对于温度, 按照公式(7.5)我们有 $\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{M^2}{3}(1-\eta^2)$; 压力

可按公式(7.6)由 η 表示; 而熵则等于:

$$\Sigma - \Sigma_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} - A \ln \frac{p}{p_0} \left(A = \frac{p}{\rho T} \right).$$

由公式(7.9)看出, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\eta \rightarrow 1$, 而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\eta \rightarrow \eta_1$, 并且向初值和终值的逼近是按指数规律进行的。波中的所有流体动力学的量: 速度、密度、压力, 以及温度, 都是单调地由自己的初值变化到终值, 并且当 $x \rightarrow \mp \infty$ 时也都是渐近地趋近于这些值¹⁾。

而熵的变化却不是单调的, 它在波内达到最大值(此点已在第一章 § 23 中指出过)。这一点容易使人相信, 如果利用热力学第二定律、“伯努利积分”式(7.5)和(7.1)中的第二个方程, 将式(7.1)中的第三个也就是熵的方程作如下改写的話:

$$\begin{aligned} \rho u T \frac{d\Sigma}{dx} &= \rho u \left(\frac{dw}{dx} - V \frac{dp}{dx} \right) \\ &= \rho u \left(-u \frac{du}{dx} - V \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} + V \rho u \frac{du}{dx} \right) \\ &= -u \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = -\frac{4}{3} \mu u \frac{d^2 u}{dx^2}. \end{aligned}$$

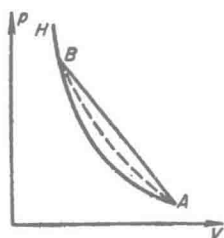


图 7.2 p, v 图上的激波过渡 $A \rightarrow B$
H——激波绝热曲线, 描写波阵面内部之状态的点沿着虚线从 A 点到达 B 点

1) 在波阵面中, 各种不同量的拐点是 inconsistent 的。

由此看出，熵在速度的拐点即波的“中心”取极值。熵的最大值在波中出现乃与热传导的存在有关。作为耗散过程之一的粘性，它只能导致熵的增加，而这种增加与 $(du/dx)^2$ 成正比。而由于热传导的缘故，热量是以不可逆的方式由比较热的气层转移到比较不热的气层。所以由热传导所引起的质点熵的增加在 $\frac{dS}{dx} \sim -\frac{d^2T}{dx^2} < 0$ 的比较不热的气层内是正的，而在 $\frac{dS}{dx} \sim -\frac{d^2T}{dx^2} > 0$ 的比较热的气层内则是负的。

熵在比较热的气层内的减少与热力学第二定律并无任何矛盾。因为，无论作为整体的全部气体的熵还是单独一个质点的熵，在经过激波间断时由于激波压缩的全部过程的结果它们还是要增加的。然而单独一个穿越波的气层已不是一个孤立系统，在开始时，由于有热传导和粘性力作功而有热量流进气层，它的熵是增加的；而后来，当借助热传导而流向该层后面之气层的热量超过依靠粘性力作功而流进来的热量时，它的熵又减少了。

和第一章 § 23 一样，我们仍用下述条件决定波阵面的宽度

$$\delta = \frac{D - u_1}{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)_{\max}}.$$

由公式(7.9)看出，波阵面的宽度在数量级上等于

$$\delta \sim l_0 \frac{M}{M^2 - 1}.$$

在小强度激波中，那时 $M - 1 \ll 1$ ，宽度 $\delta \sim l_0/(M - 1)$ 就与第一章 § 23 的结果相对应。波的宽度这时可以等于很多个分子自由程。在图 7.3 上画的 $M = 2$ 的情况下，波阵面的宽度大致等于三个自由程 l_0 。当 $M \rightarrow \infty$ 时， $\delta \sim l_0/M \rightarrow 0$ ，但是，如果考虑到在波阵面中粘性系数是可变的 ($\mu \sim l\bar{v} \sim \bar{v}/\rho$ ；当 $M \rightarrow \infty$ 时，在波阵面之后 $\mu \sim \bar{v} \sim D \rightarrow \infty$)，那么在 $M \rightarrow \infty$ 的极限情况