统计物理学题解

上　册

李　湘　如
柳文琦　卜德政　康承华

江西师范学院物理系
一九八〇年三月

说　　明

这本题解讲义是根据以往在统计物理教学中积累的资料编写成的，基本线索和通用符号均以王竹溪教授著的《统计物理学导论》为依据。题解讲义共分七章，前三章合成上册，后四章合成下册。

编排体例是每一章都分成四个部分：Ⅰ　重要的概念和关系式，Ⅱ，例题，Ⅲ，习题，Ⅸ，解答。

江西师范学院的柳文琦同志提供了八十余道题，湖南师范学院的卜德政同志提供了六十余道题，福州大学的康承华同志提供了五十余道题，最后由李湘如同志主编完成这本题解讲义。由于编者水平低，再加时间匆促，错误一定很多，我们恳切地期待着使用本讲义的同志们提出宝贵的意见，特此先予致谢！

编　　者

1980年3月

目　　录（上册）

第一章　必需的基本知识

I、重要概念和重要关系式：

几率：　任意事件的集合中，某一事件发生的机会。在统计物理学上，几率是体系处在某一微观运动状态范围内的机会。

几率的相加：　互相排斥的事件的几率才可以相加。例如事件 i 和事件 j 不可能同时发生，则发生事件 i 或事件 j 的几率 p_{i+j} 为

$$p_{i+j}=p_i+p_j\ .$$

几率的相乘：　在互相独立的两组或多组事件的情形中，在第一组中的第 i 个事件 A_i 发生的几率为 p_i，第二组中的第 j 个事件 B_j 发生的几率为 q_j，…，第 r 组中的第 k 个事件 C_k 发生的几率为 S_k。同时考虑这 r 组事件时，事件 A_i, B_j, …, C_k 同时发生的几率为

$$p_{i\times j\times\cdots\times k}=p_i\cdot p_j\cdot\cdots p_k\ .$$

二项式分布：　给定 N 个统计独立的事件，每一事件发生的几率为 p，不发生的几率为 $q=1-p$，则 N 个事件中有 n 个事件发生的几率就是二项式分布：

$$P(n)=\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p^n q^{N-n}$$

平均值：变量 u 的平均值定义为

$$\bar{u} \equiv \sum_i P_i u_i \quad .$$

累加号是对 u 的所有可能值求和，式中 P_i 表示特殊值 u_i 发生的几率。

弥散：变易 u 的弥散定义为

$$\overline{(\Delta u)^2} \equiv \sum_i P_i (u_i - \bar{u})^2$$

涨落和相对涨落：　　变易 u 的涨落和相对涨落分别定义为

$$\left[\overline{(\Delta u)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad 和 \quad \left[\overline{(\Delta u)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \Big/ \bar{u} \ .$$

几率密度：　　$\rho(u)du$ 给出连续变易 u 在 u 和 $u+du$ 之间的范围内找到它的几率，$\rho(u)$ 就称为连续变易 u 的几率密度。

泊松分布：

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

高斯分布：

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}$$

斯特令近似公式：　　当 N 很大时，则有

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N (2\pi N)^{1/2} \ ,$$

$$\ln N! = N \ln N - N + \frac{1}{2}\ln(2\pi N)$$

定积分公式：

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \equiv \Gamma(n) \ ,$$

($\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$，当 $n > 0$，$\Gamma(n+1) = n!$，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$)

$$\int_0^\infty u^{2n} e^{-\lambda u^2} du = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^\infty u^{2n+1} e^{-\lambda u^2} du = \frac{n!}{2\lambda^{n+1}}$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy .$$

相空间： 用广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$；广义动量 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 为直角坐标所构成的一个 $2s$ 数学空间称为相空间。

代表点： 相空间中任何一点代表力学体系的运动状态，这个点称为这个体系的代表点，

相轨迹： 当时间改变时，力学体系的运动状态将随之改变，故其代表点将在相空间中运动。在相空间中由正则方程所规定的运动轨道称为相轨迹。

Ⅱ、 例 题

1、 应用 $\overline{u}$ 和 $\overline{u^2}$ 的定义证明：

(1) $\overline{u^2} - \overline{u}^2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j P_i P_j (u_i - u_j)^2$；

(2) $\overline{u^2} \geq \overline{u}^2$，

每个求和都是对变量 u 的所有可能值进行的。其中 P_i 是物理量 u_i 发生的几率。

〔解 答〕：

(1) 根据定义有

$$\overline{u^2}=\sum_i P_i u_i^2 = P_1u_1^2+P_2u_2^2+P_3u_3^2+\cdots \tag{1}$$

$$\overline{u}=\sum_i P_i u_i = P_1u_1+P_2u_2+P_3u_3+\cdots \tag{2}$$

由(2)式平方得：

$$\begin{aligned}\overline{u}^2 &= P_1^2u_1^2+P_2^2u_2^2+P_3^2u_3^2+\cdots + \\ &+2P_1P_2u_1u_2+2P_1P_3u_1u_3+\cdots+ \\ &+2P_2P_3u_2u_3+\cdots\end{aligned} \tag{3}$$

由(1)式减去(3)式得：

$$\begin{aligned}\overline{u^2}-\overline{u}^2 &= P_1u_1^2+P_2u_2^2+P_3u_3^2+\cdots-P_1^2u_1^2-P_2^2u_2^2-P_3^2u_3^2-\cdots- \\ &-2P_1P_2u_1u_2-2P_1P_3u_1u_3-\cdots-2P_2P_3u_2u_3-\cdots \\ &=P_1u_1^2(1-P_1)+P_2u_2^2(1-P_2)+P_3u_3^2(1-P_3)+\cdots- \\ &-2P_1P_2u_1u_2-2P_1P_3u_1u_3-\cdots-2P_2P_3u_2u_3-\cdots,\end{aligned}$$

注意到 $P_1+P_2+P_3+\cdots=1$，则有

$$\begin{aligned}\overline{u^2}-\overline{u}^2 &= P_1P_2u_1^2+P_1P_3u_1^2+P_1P_4u_1^2+\cdots+ \\ &+P_1P_2u_2^2+P_2P_3u_2^2+P_2P_4u_2^2+\cdots+ \\ &+P_1P_3u_3^2+P_2P_3u_3^2+P_3P_4u_3^2+\cdots- \\ &-2P_1P_2u_1u_2-2P_1P_3u_1u_3-2P_1P_4u_1u_4-\cdots- \\ &-2P_2P_3u_2u_3-2P_2P_4u_2u_4-\cdots \\ &=P_1P_2(u_1-u_2)^2+P_1P_3(u_1-u_3)^2+P_1P_4(u_1-u_4)^2+\cdots+ \\ &+P_2P_3(u_2-u_3)^2+P_2P_4(u_2-u_4)^2+\cdots+P_3P_4(u_3-u_4)^2+\cdots \\ &=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j P_iP_j(u_i-u_j)^2.\end{aligned} \tag{4}$$

(2) 由(4)式等号右方得知：

$$(u_i-u_j)^2 \geq 0, \quad P_i \geq 0, \quad P_j \geq 0,$$

所以

$$\overline{u^2} - \overline{u}^2 \geq 0,$$

或 $$\overline{u^2} \geq \overline{u}^2. \qquad (5)$$

(5)式中的等号仅用在 u 只有一个可能值的发生几率不为零的情形。

2、承上题，我们把上题的(4)式作个直接推广：

$$\sum_i \sum_j P_i P_j u_i^m u_j^m (u_i - u_j)^2,$$

式中 m 是任意整数。当 m 为偶数时，这个表式决不为负；当 m 为奇数时，如果 u 的可能值都是同号的，则这个表式也决不为负。证明

(1) $$(\overline{u^n})^2 \leq \overline{u^{n+1}}\;\overline{u^{n-1}}$$

其中 $n \equiv m+1$，如果 n 是奇数，这个不等式总成立；如果 n 是偶数，在 n 的所有可能值均同号时也成立。

(2) $$\overline{(1/u)} \geq 1/\overline{u},$$

在 u 的可能值都是同号的情形下，上式有效。

［解　答］

(1) $$\sum_i \sum_j P_i P_j u_i^m u_j^m (u_i-u_j)^2 =$$
$$= P_1 P_2 u_1^m u_2^m (u_1-u_2)^2 + P_1 P_3 u_1^m u_3^m (u_1-u_3)^2 + \cdots +$$

$$+P_2P_1u_1^m u_2^m(u_1-u_2)^2+P_2P_3u_2^m u_3^m(u_2-u_3)^2+\cdots+$$

$$+P_3P_1u_1^m u_3^m(u_1-u_3)^2+P_3P_2u_2^m u_3^m(u_2-u_3)^2+\cdots+\cdots$$

$$=2[P_1P_2(u_1^{m+2}u_2^m-2u_1^{m+1}u_2^{m+1}+u_1^m u_2^{m+2})+P_1P_3(u_1^{m+2}u_3^m-2u_1^{m+1}u_3^{m+1}+$$

$$+u_1^m u_3^{m+2})+\cdots+P_2P_3(u_2^{m+2}u_3^m-2u_2^{m+1}u_3^{m+1}+u_2^m u_3^{m+2})+\cdots+$$

$$P_3P_4(u_3^{m+2}u_4^m-2u_3^{m+1}u_4^{m+1}+u_3^m u_4^{m+2})+\cdots]$$

$$=2[P_1P_2u_1^{n+1}u_2^{n-1}+P_1P_2u_1^{n-1}u_2^{n+1}-2P_1P_2u_1^n u_2^n+$$

$$+P_1P_3u_1^{n+1}u_3^{n-1}+P_1P_3u_1^{n-1}u_3^{n+1}-2P_1P_3u_1^n u_3^n+\cdots+$$

$$+P_2P_3u_2^{n+1}u_3^{n-1}+P_2P_3u_2^{n-1}u_3^{n+1}-2P_2P_3u_2^n u_3^n+\cdots+$$

$$+P_3P_4u_3^{n+1}u_4^{n-1}+P_3P_4u_3^{n-1}u_4^{n+1}-2P_3P_4u_3^n u_4^n+\cdots] \qquad (1)$$

把(1)式最后一个等号的右边添上

$P_1^2u_1^{2n}+P_2^2u_2^{2n}+P_3^2u_3^{2n}+\cdots-(P_1^2u_1^{2n}+P_2^2u_2^{2n}+P_3^2u_3^{2n}+\cdots)$ 则得

$$\sum_i\sum_j P_iP_ju_i^m u_j^m(u_i-u_j)^2$$

$$=2[P_1^2u_1^{2n}+P_2^2u_2^{2n}+P_3^2u_3^{2n}+\cdots+P_1P_2u_1^{n+1}u_2^{n-1}+P_1P_2u_1^{n-1}u_2^{n+1}+$$

$$+P_1P_3u_1^{n+1}u_3^{n-1}+P_1P_3u_1^{n-1}u_3^{n+1}+P_2P_3u_2^{n+1}u_3^{n-1}+$$

$$+P_2P_3u_2^{n-1}u_3^{n+1}+P_3P_4u_3^{n+1}u_4^{n-1}+P_3P_4u_3^{n-1}u_4^{n+1}+\cdots-$$

$$-P_1^2u_1^{2n}-P_2^2u_2^{2n}-P_3^2u_3^{2n}-2P_1P_2u_1^n u_2^n-$$

$$-2P_1P_3u_1^n u_3^n-2P_2P_3u_2^n u_3^n-2P_3P_4u_3^n u_4^n-\cdots]$$

$$=2[(P_1u_1^{n+1}+P_2u_2^{n+1}+P_3u_3^{n+1}+\cdots)(P_1u_1^{n-1}+P_2u_2^{n-1}+P_3u_3^{n-1}+\cdots)-$$

$$-(P_1u_1^n+P_2u_2^n+P_3u_3^n+\cdots)(P_1u_1^n+P_2u_2^n+P_3u_3^n+\cdots)]$$

$$=2[\overline{u^{n+1}}\,\overline{u^{n-1}}-(\overline{u^n})^2] \qquad (2)$$

注意到题给的条件：当m为偶数时，(2)式左方决不为负；当m为奇数时，如果u的可能值都是同号的，(2)式左方也决不为负，从而有

$$2\left[\overline{u^{n+1}}\ \overline{u^{n-1}}-(\overline{u^{n}})^{2}\right]\geqslant 0,$$

即
$$\overline{u^{n+1}}\ \overline{u^{n-1}}\geqslant(\overline{u^{n}})^{2} \qquad (3)$$

(2)令上述结果(3)式中的$n=0$，得特例

$$\overline{\left(\frac{1}{u}\right)}=\frac{1}{\overline{u}} \qquad (4)$$

3、某人用一根1米长的标准米尺来测量一段50米的距离，他把米尺的头接尾地相继测量50次。他虽不能保证每次把米尺放在地上所刻的两个记号之间的距离正好准确为1米，但他知道不论在什么地方，两个记号之间的距离在99.8厘米和100.2厘米之间的可能性处处一样。的确，他重复50次全程的测量之后，便测得这段路程的平均距离为50米，计算某人所测量的距离的标准偏差。

〔解 答〕

$$\text{标准偏差}=\sqrt{\frac{1}{50}\overline{(\Delta u)^{2}}}=\sqrt{\frac{1}{50}(\overline{u^{2}}-\overline{u}^{2})} \qquad (1)$$

依题意有

$$\overline{u}^{2}=5000^{2}=25000000 \qquad (2)$$

$$\overline{u^{2}}=\frac{1}{50}\left[50^{2}(99.8^{2}+99.808^{2}+99.816^{2}+99.824^{2}+\cdots+\right.$$
$$\left.+99.992^{2}+100.008^{2}+100.016^{2}+\cdots+100.2^{2})\right]$$

$$=50\times 500000.68=25000034 \qquad (3)$$

把(2)式和(3)式代入(1)得：

$$标准偏差=\left[\frac{1}{50}(25000034-25000000)\right]^{1/2}=0.82毫米 \qquad (4)$$

4、电荷为e的电子无规地、统计独立地从真空管的热阴极上发射出来。在任意一个非常短的时间间隔Δt内，有一个电子从热阴极发射出来的几率为p，且$p\ll 1$，一个以上电子同时被发射的几率为零（都因为Δt极短）。我们把比Δt大得多的时间间隔t划分为n个Δt，则在t间隔中发射的总电荷可写成：

$$Q=Q_1+Q_2+\cdots+Q_i+\cdots+Q_n.$$

式中Q_i表示在第i个时间间隔Δt内发射的电荷，若发射了，则$Q_i=e$，若未发射，则$Q_i=0$，试求：

(1)在时间间隔t内，从热阴极发射的平均电荷$\overline{Q}$。

(2)在t内的$\overline{(\Delta Q)^2}$，并利用$p\ll 1$化简所得结果。

(3)在t内电流的$\overline{(\Delta I)^2}$与$\overline{I}$的关系。

(4)若平均电流$\overline{I}=1$微安，测量时间为1秒，求$\sqrt{\overline{(\Delta I)^2}}$。

［解　答］

(1) $$Q=\sum_{i=1}^{n}Q_i,$$

$$\overline{Q}=\overline{\left[\sum_{i=1}^{n}Q_i\right]}=\sum_{i=1}^{n}\overline{Q}_i=npe=\frac{tpe}{\Delta t} \qquad (1)$$

(2) $$\overline{(\Delta Q)^2}=n\left(\overline{Q^2}-\overline{Q}^2\right)=npe^2-n(pe)^2=npe^2(1-p)$$

因为$p\ll 1$，所以$\overline{(\Delta Q)^2}\doteq npe^2=\frac{t}{\Delta t}pe^2 \qquad (2)$

(3)利用(1)式求得 $\overline{I}=\frac{\overline{Q}}{t}=\frac{pe}{\Delta t}$，

利用(2)式求得： $\overline{(\Delta I)^2}=\frac{\overline{(\Delta Q)^2}}{t^2}=\frac{pe^2}{t\cdot\Delta t}$

所以 $\overline{(\Delta I)^2}$ 与 $\overline{I}$ 的关系是： $\overline{(\Delta I)^2}=\frac{e}{t}\overline{I}$． (3)

(4) $\sqrt{\overline{(\Delta I)^2}}=\left(\frac{e}{t}\overline{I}\right)^{\frac{1}{2}}=(1.6\times10^{-19}\cdot10^{-6})^{\frac{1}{2}}=4\times10^{-13}$ 安培 (4)

5、总电动势为 $\mathcal{E}$ 的电池是由 N 节单个电池串联成的。注意到并非 N 节电池都处在良好状态中，而是任何一节电池具有正常电动势值 ϵ 的几率为 p，电动势的值为零的几率为 $(1-p)$，每节电池都是彼此统计独立的。把总电动势 $\mathcal{E}$ 加到电阻 R 上，计算电阻中耗散的平均功率 P，将结果用 N，ϵ，p，R 表示。

［解 答］

根据平均功率的定义有：

$$\overline{P}=\frac{1}{R}\overline{\mathcal{E}^2}．\qquad (1)$$

每节电池的平均电动势为：

$$\overline{\epsilon}=p\epsilon+(1-p)\cdot0=p\epsilon，$$

N 节电池串联的平均电动势为：

$$\overline{\mathcal{E}}=N\overline{\epsilon}=Np\epsilon．\qquad (2)$$

另一方面有

$$\overline{(\Delta\mathcal{E})^2}=N(p\epsilon^2-p^2\epsilon^2)=Np\epsilon^2(1-p)\qquad (3)$$

由 $\overline{(\Delta\mathcal{E})^2}=\overline{\mathcal{E}^2}-\overline{\mathcal{E}}^2$ 可求得：

$$\overline{\mathcal{E}^2}=\overline{(\Delta\mathcal{E})^2}+\overline{\mathcal{E}}^2=Np\epsilon^2(1-p)+(Np\epsilon)^2\qquad (4)$$

把（4）式代入（1）式得：

$$\overline{P}=\frac{1}{R}\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{R}\left[Np\epsilon^2(1-p)+Np\epsilon\right]$$

$$=\frac{1}{R}N^2p^2\epsilon^2\left[1+\frac{1-p}{Np}\right] \tag{5}$$

6、一个质点按照 $x=\sin(\omega t+\varphi)$ 的规律而振动。若偶然测另其位置，试求在（x，$x+dx$）这一间隔内发现该质点的几率。

〔解　答〕

这是质点作周期性运动，故质点出现在（x，$x+dx$）间隔内的几率可表成：

$$P(x)=2dt/T\ , \tag{1}$$

其中T是质点振动的周期。因子2的出现是考虑到质点在一个周期T内共有两次进入（x，$x+dx$）的间隔。

$$x=\sin(\omega t+\varphi),$$

$$dx=\omega\cos(\omega t+\varphi)dt\ ,$$

$$dt=\frac{T}{2\pi}\left[\cos(\omega t+\varphi)\right]^{-1}dx=\frac{T}{2\pi}\left[\sqrt{1-x^2}\right]^{-1}dx \tag{2}$$

把（2）式代入（1）式得：

$$P(x)=dx/\left[\pi\sqrt{1-x^2}\right]. \tag{3}$$

7、设 $\rho(x)dx=Ze^{-\alpha x}dx$，

（1）试求 $\overline{x^n}$；

（2）如果 $y^2=x$，试求 $\overline{y^n}$。

〔解 答〕

(1) $$Z\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = 1 .$$

$$Z = \alpha ,$$

从而几率分布成为

$$\rho(x)\,dx = \alpha e^{-\alpha x}dx$$

$$\overline{x^n} = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}x^n dx .$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\alpha x)^n d(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\alpha x)^{n+1-1} d(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\Gamma(n+1) \tag{2}$$

(2) 由 $y^2 = x$ 得 $2y\,dy = dx$，以此代入(1)式得：

$$\rho(y)\,dy = 2\alpha\, e^{-\alpha y^2}y\,dy . \tag{3}$$

$$\overline{y^n} = \int_0^\infty e^{-\alpha y^2}y^n d(\alpha y^2)$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}(\alpha y^2)^{\frac{n}{2}+1-1} d(\alpha y^2)$$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \tag{4}$$

Ⅲ. 习 题

1. 一只匣子假想分成相等的两部分，列表标明 6 个分子中有 n 个（0, 1, ……, 6）处在匣子左半边的可能微观态数目 C(n)：

2、在没有外磁场存在的情况下，考虑6个自旋组成的理想体系。考虑所有的可能性 $n=0,1,2,3,4,5,6$。试求 n 个自旋向上的微观态所占的分数各为多少？

3、设有N个粒子自旋为 $\frac{1}{2}$ 的理想体系，每个自旋都带有磁矩 M_0。当该体系处于一个外磁场 $\vec{B}$ 中时，则每个磁矩向上（指平行于 $\vec{B}$）的几率为 p，向下（指反平行于 $\vec{B}$）的几率为 q，且有 $p+q=1$，$p>q$。

(1) 证明 N个磁矩中向上的数目为 n（$=0,1,\cdots\cdots,N$）的几率 $P(n)$ 是

$$P(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n}.$$

(2) 为什么称 $P(n)$ 是二项式分布。

4、在0和1之间随便选取一个数。在它的前10位小数恰好有5位是由小于5的数字组成的几率是多少？

5、高斯分布和二项式分布的形式分别是：

$$P(n)=\{exp[-(n-Np)^2/2Npq]\}/(2\pi Npq)^{1/2},$$

$$P(n)=[N!p^n q^{N-n}]/[n!(N-n)!].$$

今有一枚镍币，总共被投掷400次。试用高斯分布和二项式分布分别求出正面朝上的次数 $n=215$ 次的几率？

6、关于残存几率。袋中装有10个完全相同的小球，其中有9个是白色的，一个是红色的。经搅拌后任意摸出一个球看是什么颜色，随即放入袋中，搅拌后再次任意摸出一个球，如此重复多次进行。问

(1) 1次不摸到红色小球的几率是多少？

(2) 10次都不摸到红色小球的几率是多少？

(3) n次都不摸到红色小球的几率是多少？

(4) 刚好在第n次摸到红色小球的几率是多少？

7、一个自旋1/2的磁矩是这样的磁矩：它向上的分量μ等于μ_0的几率为p，向下的分量μ等于$-\mu_0$的几率为$q=1-p$，试求$\overline{(\Delta\mu)^2}$。

8、考虑自旋为1的一个原子核（即自旋角动量为$\hbar$），那么，沿着给定方向的磁矩的分量μ有三个可能的值，即$+\mu_0$，0或$-\mu_0$，假设原子核并不是球对称的，而是椭球形的，结果是原子核倾向这样的优势方向，即使得它的主轴与原子核所处的结晶固体中的特定方向平行。这样，$\mu=\mu_0$的几率为p，$\mu=-\mu_0$的几率也是p，而$\mu=0$的几率则等于$1-2p$。

(1) 计算$\overline{u}$及$\overline{u^2}$；

(2) 计算$\overline{(\Delta u)^2}$；

(3) 假设所考虑的固体由N个原子核组成，原子核之间的相互作用小到可以忽略的程度。用M表示所有这些核的总磁矩沿特定方向的分量，用N，p及μ_0计算$\overline{M}$及其标准偏差。

9、经典简谐振子的位移x作为时间t的函数，形式如下：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi),$$

初位相φ是在$0\leq\varphi\leq2\pi$之内的任意常数。假使我们设想一个这类振子的系综，所有体系都有相同的频率ω和振幅A，但初位相的相位关系是随机的，使得φ在φ到$\varphi+d\varphi$之内的几率简单地由$d\varphi/2\pi$给出，试求在任何时刻t，振子位移处在x到$x+dx$范围内的几率是多少？

10、考虑N个全同自旋$\frac{1}{2}$的理想体系，则朝上指向的磁矩数n可以写成这样的形式：

$$n=u_1+u_2+\cdots+u_N.$$

如果第i个磁矩向上，则$u_i=1$；第i个磁矩向下，则$u_i=0$. 利用上式及自旋是统计独立的事实：

(1) 证明 $\bar{n}=N\bar{u}$.

(2) 证明 $\overline{(\Delta n)^2}=N\overline{(\Delta u)^2}$.

(3) 假设一个磁矩向上的几率为p，向下的几率为$q=1-p$. $\bar{u}$ 和 $\overline{(\Delta u)^2}$ 是多少？

(4) 计算 $\bar{n}$ 及 $\overline{(\Delta n)^2}$

11. 体积V_0的容器内有N个分子。一个给定分子处于分体积v内的几率为$p=\frac{v}{V_0}$.

(1) 证明：在分体积v内的分子的最可几数n_p等于平均数$\bar{n}$。

(2) 求位于分体积v内的分子数的标准偏差$\left[\overline{(\Delta n)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$及相对涨落 $\frac{1}{\bar{n}}\sqrt{\overline{(\Delta n)^2}}$

(3) 当$v \ll V_0$及$v\to V_0$时，(2)的结果如何？

12. 一个系统的几率分布为

$$dp \sim xy\,dx\,dy,$$

其中x和y的定义域分别为 $0\le x\le a$ 和 $0\le y\le b$.

(1) 试将这一几率分布归一化。

(2) 求系统具有某一给定的y值，而x值为任意时的几率。

13、设连续变量x的分布函数是

$$F(x)=B(1-x^2)\qquad -1\le x\le 1,$$

$$F(x)=0\qquad |x|>1.$$

(1) 归一化，

(2) 画出 $F(x)-x$ 的图形，

(3) 计算 $\bar{x}$ 和 $\overline{x^2}$ 。