普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（下册）

刘仁云　赵　虹　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（下册）

刘仁云　赵　虹　主编

赵志欣　赵红发　罗英语　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

《高等数学》(上、下册)是为普通高等院校理工科专业学生编写的基础课教材,以微积分学的基本理论和方法为核心内容.本书为下册,主要内容包括空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、微(差)分方程、无穷级数等.本书叙述直观、概念清晰、通俗易懂,便于学生理解和掌握.

本书可作为普通高等院校理工科专业,高等师范院校理、工、经管各专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/刘仁云,赵虹主编.—北京:科学出版社,2016
(普通高等教育"十三五"规划教材)
ISBN 978-7-03-049416-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘…②赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 166320 号

责任编辑:朱 敏 戴 薇 王丽丽 / 责任校对:马英菊
责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2016 年 8 月第一次印刷 印张:16 1/2
字数:370 000

定价:68.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新科〉)
销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135927-2012

前　言

“高等数学”是高等院校理工类专业必修的一门基础课. 目前,随着我国高等教育由精英教育向大众教育的转变,以前的一些“经典”教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要,相当一部分普通高等院校由于缺乏适合自己的教材,而出现教与学严重脱节、教学效果事倍功半的现象.

针对当前普通高等院校理工科专业教育的特点,我们依据理、工科类“本科数学基础课程教学基本要求”和分层次教学改革的需要,组织了一些长期从事高等数学教学的教师编写了本书.

本书以微积分学的基本理论和方法为核心,内容由浅入深,难易适当,通俗易懂. 具体来说,主要具有以下几个特点:

(1) 在教学内容的编排上,本着“必需、够用”的原则,适当削减了过于抽象和严格化的内容,删除了烦琐的推理和证明,并尽量结合几何图形进行直观解释,以帮助学生理解和掌握所学内容.

(2) 考虑到计算机在日常生活中的广泛应用,为促进教学手段的不断改革和创新,培养学生使用计算机解决数学问题的意识和能力,本书设计了相应的数学实验,通过这些实验来介绍数学软件 Matlab 在高等数学中的应用,有助于激发学生的学习兴趣,增强学生对 Matlab 软件的实际操作能力,同时加深其对于基础知识的理解和应用.

(3) 每节都精选了一定数量的习题,习题类型广泛,紧扣教材,根据难易程度分为 A、B 两部分,以使本书适合多层次读者的需要,并在书后附有参考答案及提示.

(4) 章节内容可选空间大,其中带 * 内容属于选学内容,教师可根据专业需要和教学时数做适当安排.

全书共 13 章,分上、下两册,第 1～6 章为上册,第 7～13 章为下册. 具体编写分工如下. 第 1～5 章由李东平编写,第 6 章及实验部分由张春阳编写,第 7 章、第 9～11 章由赵虹编写,第 8 章由赵红发编写,第 12 章由罗英语编写,第 13 章由刘仁云编写. 上册习题由张晓丽负责,下册习题由赵志欣负责,全书由刘仁云负责统稿.

全书定价 68 元,上册定价 34 元,下册定价 34 元.

编者在编写本书过程中,参考了国内外大量有关高等数学的教材,在此谨向各位作者表示由衷的感谢. 由于编者水平所限,加之时间比较仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正.

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

在中学的平面解析几何中,通过建立平面直角坐标系把平面上的点与有序数对对应起来,把平面上的图形与方程对应起来,从而可以用代数的方法来研究几何问题,类似的可以通过建立空间直角坐标系,用代数的方法研究空间的图形问题,这就是空间解析几何的主要研究内容. 并且空间解析几何也是学习多元微积分的必备知识. 向量是学习解析几何的工具,并且本身也很重要. 本章首先介绍向量的运算与性质,之后利用建立的直角坐标系来研究空间的曲线与曲面等图形.

7.1　向量的线性运算和空间直角坐标系

7.1.1　向量的概念

向量的基本知识在中学里已经进行过初步的学习. 这里只进行基本的介绍. 既有大小,又有方向的量叫做**向量**,也称为**矢量**. 如力、力矩、位移、速度、加速度等. 只有大小,没有方向(或不考虑方向)的量称为**数量**,也称为**标量**,如密度、质量、路程、长度和面积等.

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 向量也可用黑体字母表示,如用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{F}$ 表示;也可在字母上加一小箭头,如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{n}$、$\vec{F}$ 来表示.

本章只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**,简称**向量**. 因此,若向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量的大小叫做向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记作$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于 0 的向量叫做**零向量**,记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看做是任意的.

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,如果它们的方向相同或相反,就称这两个**向量平行**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行. 当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上,因此,两向量平行又称**两向量共线**. 类似还有共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个**向量共面**.

7.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法叫做向量加法的**三角形法则**,如图 7.1 所示. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法叫做向量加法的**平行四边形法则**,如图 7.2 所示.

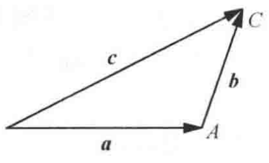

图 7.1

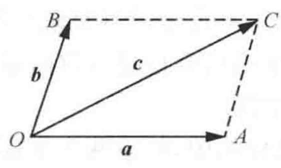

图 7.2

向量加法有下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

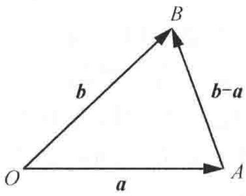

图 7.3

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**定义为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$. 把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 到 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引的向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 其对应的三角形法则如图 7.3 所示.

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立. 这个不等式称为**三角不等式**.

2. 向量与数的乘法

定义 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,这种乘积称为向量的**数乘**.

当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向是任意的.

特别的 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘法有下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

利用向量的数乘可以得到如下的定理.

定理 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明*:由向量数乘的定义,条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

已知 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时规定 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时规定 λ 取负值,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 方向相同,且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

7.1.3 空间直角坐标系

在平面解析几何中,建立的是平面直角坐标系,在这个基础上建立空间直角坐标系. 在空间取一平面 Π,在 Π 上先建立平面直角坐标系 xOy. 过原点 O 作向量 $\overrightarrow{Oz}$ 垂直于平面 Π,使 $\overrightarrow{Ox}$、$\overrightarrow{Oy}$、$\overrightarrow{Oz}$ 的方向满足**右手规则**,即 $\overrightarrow{Ox}$ 指向弯曲右手四指方向,$\overrightarrow{Oy}$ 指向手臂方向,$\overrightarrow{Oz}$ 指向翘起的大拇指方向,如图 7.4 所示. $\overrightarrow{Ox}$、$\overrightarrow{Oy}$、$\overrightarrow{Oz}$ 就确定了三条以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记作 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为**坐标轴**. 它们构成一个**空间直角坐标系**,称为 O-xyz **坐标系**. 三个两两垂直的单位向量依次记作 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线.

在空间直角坐标系中,任意两个坐标轴可以确定一个平面,这种平面称为**坐标平面**. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 $\boldsymbol{xOy}$ **面**,另两个坐标面是 $\boldsymbol{yOz}$ **面**和 $\boldsymbol{zOx}$ **面**. 三个坐标面把空间分

成八个部分，每一部分叫做**卦限**，含有三个正半轴的卦限叫做第一卦限，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方，按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示，如图 7.5 所示.

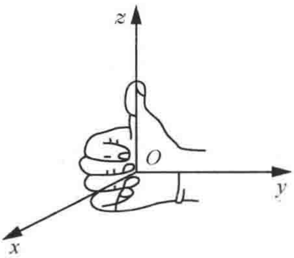

图 7.4

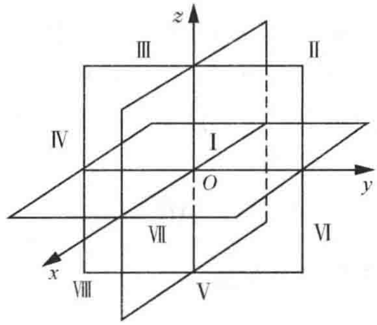

图 7.5

任给向量 $\boldsymbol{r}$，起点移到坐标系原点 O 处，终点为点 M，即 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线和三条坐标轴为棱作长方体，如图 7.6 所示，有 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

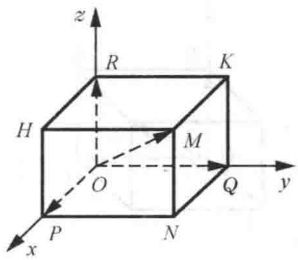

图 7.6

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**（在物理课程中进行的力或位移的分解是向量分解的实际应用）.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 三个分向量，进而确定了 x、y、z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x、y、z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x、y、z 之间有一一对应的关系：

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

据此，定义有序数 x、y、z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的**坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x、y、z 也称为点 M 在坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的坐标，记作 $M(x,y,z)$. 向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

7.1.4　利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).\end{aligned}$$

$$\lambda a=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

利用向量的坐标表示可得到如下两个结论.

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq 0$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

于是 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$. 即两个向量平行的充分必要条件是两个向量的坐标对应成比例.

(2) 设两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

7.1.5 向量的模与方向角

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,则按勾股定理可得**向量的模**

$$|r|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$,则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,于是点 A 与点 B 间的**距离**为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. 方向角与方向余弦

当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时,两个向量正方向之间的在$[0,\pi]$内的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**,记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

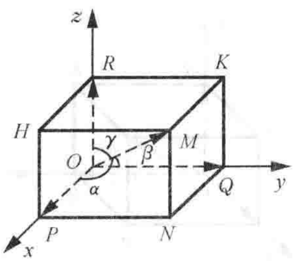

图 7.7

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴(正向)的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**,如图 7.7 所示.

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,则 $x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma$.

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**. 即 $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|}$,$\cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|}$,$\cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}$. 所以$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$.

上式表明,以向量 r 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$. 因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

习题 7.1

(A)

1. 画出空间直角坐标系,作出下列各点,并求它们到原点的距离.

(1) $(3,4,5)$; (2) $(1,1,-1)$; (3) $(-1,-2,-3)$; (4) $(-1,-1,3)$.

2. 填空题.

设点 $M(1,2,3)$.

(1) 则此点关于 xOy 平面的对称点为________,在第________卦限;

(2) 关于 yOz 平面的对称点为________,在第________卦限;

(3) 关于 y 轴的对称点为________,在第________卦限;

(4) 关于 x 轴的对称点为________,在第________卦限;

(5) 关于原点的对称点为________,在第________卦限;

(6) 关于点$(-1,0,2)$的对称点为________,在第________卦限.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,-3,4)$,$\boldsymbol{c}=(-2,-4,1)$,则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=$________; (2) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=$________.

4. 已知点 $A(2,4,3)$和点 $B(3,2,5)$,求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标和方向余弦、方向角.

5. 在 x 轴上求一点 P,使它到点 $A(-4,1,7)$,$B(3,5,-2)$的距离都相等.

(B)

1. 在 yOz 面上求一点 P,使它到三点 $A(1,2,2)$,$B(2,-1,-1)$,$C(0,2,1)$的距离都相等.
2. 若矢量与各坐标轴成相等的锐角,其模长为 $2\sqrt{3}$,求此矢量.
3. 若矢量与$(1,-2,3)$平行,且模长为 $2\sqrt{7}$,求此矢量.
4. 证明以三点 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$,$C(5,2,3)$为顶点的三角形为等腰三角形.

7.2　向量的数量积、向量积和混合积

7.2.1　两向量的数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线发生位移 $\boldsymbol{s}$. 由物理学知道,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角,如图 7.8 所示.

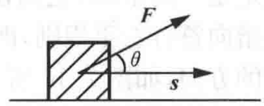

图 7.8

把这种两个向量的运算结果是一个数量的运算抽象出来,定义成两个向量的数量积.

数量积:对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 θ,称$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(**也称内积**),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,读作 $\boldsymbol{a}$ 点 $\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由数量积的定义可得到如下的性质和运算规律.

数量积的性质:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

如果认为零向量与任何向量都垂直,则对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积的运算律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,$\lambda$ 为实数.

数量积的坐标表示:

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

事实上,按数量积的运算规律和 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$,可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

两向量夹角的余弦的坐标表示:

设 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq 0$ 时,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 1　已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$和 $B(2,1,2)$,求$\angle AMB$.

解 从 M 到 A 的向量记作 $\boldsymbol{a}$,从 M 到 B 的向量记作 $\boldsymbol{b}$,则 $\angle AMB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

由已知可得 $\boldsymbol{a}=\{1,1,0\}$,$\boldsymbol{b}=\{1,0,1\}$. 由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$. 所以

$$\cos\angle AMB=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

从而 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

7.2.2 两向量的向量积

在研究物体转动问题时,常要分析这些力产生的力矩. 设 O 为一杠杆 L 的支点. 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于此杠杆 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ,如图 7.9 所示. 由力学规定,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$,它的模 $|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$,而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{M}$ 的指向符合右手规则,即弯曲四指代表 $\overrightarrow{OP}$ 的方向,手臂代表 $\boldsymbol{F}$ 的的方向,则翘起的拇指代表 $\boldsymbol{M}$ 的方向,如图 7.10 所示.

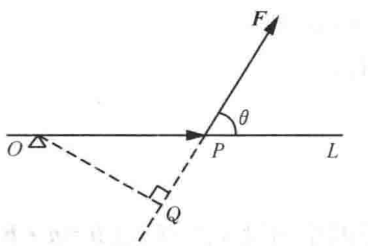

图 7.9

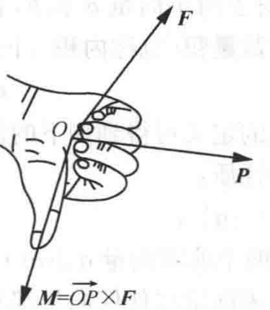

图 7.10

从这种由两个向量来确定另一个向量的情况抽象出两个向量的向量积.

向量积 设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出:

$\boldsymbol{c}$ 的模:$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角;

$\boldsymbol{c}$ 的方向:$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则,即 $\boldsymbol{a}$ 的方向指向右手的四指方向,$\boldsymbol{b}$ 的方向指向手臂的方向,大拇指的方向就为 $\boldsymbol{c}$ 的方向.

那么,向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(**或外积**),记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,读作 $\boldsymbol{a}$ 叉 $\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

根据向量积的定义,力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积,即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

由向量积的定义可得向量积的性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$.

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果认为零向量与任何向量都平行,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=0$.

(3) 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的起点相同,则以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

向量积的运算律:

(1) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为实数).

向量积的坐标表示：

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x)\end{aligned}$$

为了帮助记忆，可以利用三阶行列式符号来表示，上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x).\end{aligned}$$

例 2　设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$

例 3　计算与 $\boldsymbol{a}=(3,-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-2)$ 都垂直的单位向量.

解　由向量积的定义 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直，

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$，所以所求的单位向量为 $\pm\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}\right)$.

例 4　已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$、$C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解　根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

思考：推导一般已知三个顶点坐标的三角形的面积公式.

7.2.3　向量的混合积

设有三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，数量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记作 $[\boldsymbol{abc}]$.

下面推导混合积的坐标表示式.