工科研究生数学必修课程辅导用书

矩阵论学习指导

赵礼峰 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

矩阵论学习指导

赵礼峰　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书为研究生教材《矩阵论》的配套学习参考用书，对矩阵论中的基本概念、主要结论和常用方法进行了简明扼要的分类总结. 全书共 7 章，每章都由教学基本要求、主要内容提要、解题方法归纳、典型例题解析、考博真题选录、书后习题解答、课外习题选解等内容组成.

本书可作为理工科院校硕士研究生“矩阵论”课程的学习指导用书，还可供相关科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论学习指导 / 赵礼峰编著. —南京：东南大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5641-6628-1

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①矩阵论—研究生—教学参考资料 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 158702 号

矩阵论学习指导

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话：025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	17.75
字　　数	348 千字
版　　次	2016 年 8 月第 1 版
印　　次	2016 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-6628-1
定　　价	36.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　言

矩阵论是高等学校理工科研究生的一门重要基础课程.矩阵理论不仅是数学的一个重要组成部分,而且已成为现代科技领域中处理大量有限维空间形式与数量关系的强有力工具,它不仅能使所描述的问题具有极简洁的形式,而且也能使所描述的问题得以深入系统地研究.随着计算机和信息技术的飞速发展,以及复杂问题线性化技术的发展与成熟,不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景,也使工程技术的研究发生了新的变化,开拓了崭新的研究途径.矩阵理论和方法对培养人的科学素质、数学思维能力、数值计算与数据处理能力等具有不可替代的作用,对于将来从事工程技术工作的研究生来说,掌握矩阵理论和方法极其重要.

矩阵论内容不仅理论性强,概念比较抽象,而且有其独特的数学思维方式和解题技巧.学生在学习矩阵论时,往往感到概念多、结论多、算法多,对教学内容的全面理解也感到困难.为了方便课堂教学和研究生自学,使其更好地掌握矩阵论的学习内容,作者根据多年从事矩阵论课程教学工作经验,编写了《矩阵论学习指导》一书.本书紧扣许立炜、赵礼峰编著的《矩阵论》(科学出版社出版)研究生教材的内容体系,另外增加了Hermite二次型一章内容.本书对矩阵论中的基本概念、主要结论和常用方法进行了简明扼要的归纳和总结;通过对大量有代表性的典型例题解析,进一步揭示矩阵论的思想和方法;对原教材各章课后习题给出了解答;每章还选录了部分高校的考博真题;课外习题选解中的许多题目选自张明淳教授的《工程矩阵理论》(第2版,东南大学出版社出版)和戴华教授的《矩阵论》(科学出版社出版).矩阵论的各种题型与解题方法几乎都能从本书中获得,通过本书的学习,希望能够帮助读者加深对矩阵理论的理解,提高数学推理能力和计算能力.

在本书编写过程中,得到了南京邮电大学理学院李雷教授、王友国教授、唐家山教授、许立炜副教授等专家的支持和帮助,我的研究生黄奕雯、纪亚宝、刘艳清、纪亚劲、张雄、王刚刚等同学也做了许多工作,在此一并表示感谢.

限于作者水平有限,书中疏漏和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正.

赵礼峰

2016年5月于南京邮电大学

目　　录

1 线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习矩阵论的基础，掌握有关概念与理论方法对后面学习有着重要作用.

1.1 教学基本要求

(1) 理解线性空间与线性子空间的定义与性质，会判断一个集合对于给定的运算是否是线性空间；

(2) 了解线性空间的基与维数以及向量在一个基下的坐标的求法；

(3) 掌握线性子空间的交与和的基与维数的求法以及维数的维数公式，掌握子空间的直和的判断方法，了解子空间的补子空间；

(4) 掌握线性变换的概念、线性变换的矩阵表示方法以及一个线性变换在不同基下矩阵之间的关系；

(5) 会求线性变换的核与值域的基与维数，了解坐标变换公式的应用；

(6) 理解线性不变子空间的定义与性质；

(7) 理解线性空间同构的意义与判断方法，了解线性空间同构的充要条件.

难点：(1) 线性空间的子空间交与和的基与维数的求法；

(2) 线性变换值域与核的求法；

(3) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在一组基下的坐标，求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在线性变换 T 下的像 $T(\boldsymbol{\alpha})$ 在另一组基下的坐标.

1.2 主要内容提要

1.2.1 线性空间

线性空间的定义：设 V 是一个非空集合，P 是一个数域，在 V 中定义加法，在 P 与 V 之间定义数量乘法，且上述两种运算满足 8 条运算律，则称 V 是数域 P 上的一个线性空间.

线性空间中的元素均称为向量.

线性空间 V 中零向量是唯一的，V 中每一个向量的负向量是唯一的，且对 $k \in$

$P,\boldsymbol{\alpha}\in V$,则

$$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Leftrightarrow k=0\text{ 或者 }\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

1.2.2 线性子空间

线性空间V的非空子集W对于V的两种运算也构成数域P上的线性空间,则称W是V的子空间.

线性空间V的非空子集W是V的子空间$\Leftrightarrow \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$以及$k,l\in P$,均有$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}\in W$.

有限生成子空间:线性空间V的任意n个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的所有线性组合的集合组成$V$的子空间,称为由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **生成的子空间**,记为

$$\text{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\mid k_i\in P\}.$$

子空间交与和:设W_1,W_2是V的两个子空间,则$W_1\cap W_2,W_1+W_2$都是V的子空间.

注:$W_1\cup W_2$一般不是V的子空间,$W_1\cup W_2$是V的子空间$\Leftrightarrow W_1\subseteq W_2$或者$W_2\subseteq W_1$.

直和:设W_1,W_2是线性空间V的两个子空间,若W_1+W_2中每个元素$\boldsymbol{\alpha}$的分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad(\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2)$$

是唯一的,则称W_1+W_2为直和,记为$W_1\oplus W_2$.

设W_1,W_2是线性空间V的两个子空间,则下列条件等价(判断子空间是否是直和的充分必要条件):

(1) W_1+W_2是直和;

(2) W_1+W_2中零元素的分解式唯一,即由

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad(\boldsymbol{\alpha}_1\in W_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in W_2)$$

可推出$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$;

(3) $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$;

(4) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$分别是$W_1,W_2$的线性无关组,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也线性无关;

(5) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

从而有结论:设W_1,W_2是线性空间V的两个子空间,若W_1+W_2是直和,则

$$\{W_1\text{ 的基}\}\cup\{W_2\text{ 的基}\}=\{W_1+W_2\text{ 的基}\}.$$

设W_1是n维线性空间V^n的一个子空间,则必存在V^n的另一个子空间W_2,使

$$V^n=W_1\oplus W_2.$$

1.2.3　线性空间的基、维数与坐标

线性空间 V 的一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为 V 的一组基，若它们满足：① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；② V 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. n 称为 V 的维数，记为 $\dim V=n$. V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的方法唯一，设为 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，则称 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标. 此时，$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}$.

主要性质：(1) 设 $\dim V=n$，则 V 中任意 n 个线性无关的向量均构成 V 的一组基；

(2) 设 $\dim V=n$，则 V 中任意 $r(r<n)$ 个线性无关的向量均可以扩充为 V 的一组基.

常用的基：(1) 线性空间 $\mathbf{C}^n(\mathbf{R}^n)$ 的自然基(也称为标准基) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) $P_n[x]$ 的基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$.

(3) 矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是第 i 行第 j 列处元素为 1，其余元素都为零的 $m\times n$ 矩阵.

(4) $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的基就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大无关组.

(5) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$，且 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $R(\boldsymbol{A})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n\}$，$\dim R(T)=r(\boldsymbol{A})$；$\boldsymbol{A}$ 的零空间 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^n\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\}$ 即为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，基就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，其维数等于 $n-r(\boldsymbol{A})$.

1.3　解题方法归纳

(1) 要证明 V 是数域 P 上的线性空间，必须验证 V 对于向量的加法与数乘运算封闭，且满足 8 条性质；如果说明 V 不是数域 P 上的线性空间，则只需说明 V 对于向量的加法与数乘运算其中之一不封闭，或者运算不满足 8 条中的某一条即可.

(2) 要证明 W 是 V 子空间，首先说明 W 不空，再证明 W 对 V 的两种运算封闭即可.

(3) 要说明一个线性空间 V 的维数是 n，只需找出 V 中 n 个线性无关的向量，并且 V 中每一个向量均可以由这 n 个向量线性表示.

(4) 求 $\mathbf{R}^n$ 的两个子空间 W_1 与 W_2 的交与和的基与维数的方法：

① 利用 W_1 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 W_2 的基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，求出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的极大无关组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$，则

$$\dim\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}=t=\dim(W_1+W_2);$$

② 求出使 $\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\beta}_s$ 的向量组的

极大无关组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$，就是 $W_1\cap W_2$ 的基.

(5) 证明 $W=W_1\oplus W_2$：首先证明 $W=W_1+W_2$，其次证明 $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ 或者 $\dim W=\dim W_1+\dim W_2$.

(6) 求线性变换 T 在一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵 $\mathbf{A}$：

① 直接求法：将 $T(\boldsymbol{\alpha}_j)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标作为第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 列，所得矩阵即为 $\mathbf{A}$.

② 间接求法：利用同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的性质求. 即若线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的矩阵是 $\mathbf{A}$，则 T 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$，其中 $\mathbf{P}$ 是从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

(7) 求线性变换 T 的值域与核的方法：

设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵是 $\mathbf{A}$，且 $r(\mathbf{A})=r$.

① 若 $\mathbf{A}$ 的列向量组的极大无关组为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$，则

$$\boldsymbol{\eta}_j=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\xi}_j\quad(j=1,2,\cdots,r)$$

即为值域 $R(T)$ 的一组基；

② 若齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n-r}$，则

$$\boldsymbol{\delta}_j=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\gamma}_j\quad(j=1,2,\cdots,n-r)$$

就是 T 的核 $\mathrm{Ker}(T)$ 的一组基.

1.4 典型例题解析

例 1.1 在实数域 $\mathbf{R}$ 上，二维向量的集合 $V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$，按照以下的加法与数乘：

$$\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in V,k\in\mathbf{R},$$

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\otimes(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{1}{2}k(k-1)a_1^2\right),$$

则 V 是数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

证明：首先 V 显然非空，且对两个运算封闭，即

$$\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in V,k\in\mathbf{R},$$

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\in V,$$

$$k\otimes(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{1}{2}k(k-1)a_1^2\right)\in V.$$

再设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2)$，$\boldsymbol{\gamma}=(a_3,b_3)$，及 $k,l\in\mathbf{R}$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\oplus\boldsymbol{\alpha}=(a_2+a_1,b_2+b_1+a_2a_1)$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta})\oplus\boldsymbol{\gamma}=((a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2+a_1a_2)+b_3+(a_1+a_2)a_3)$

$$= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3),$$

$$\boldsymbol{\alpha} \oplus (\boldsymbol{\beta} \oplus \boldsymbol{\gamma}) = (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3 + a_2a_3) + a_1(a_2 + a_3))$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3 + a_2a_3 + a_1a_2 + a_1a_3)$$
$$= (\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta}) \oplus \boldsymbol{\gamma};$$

(3) $\mathbf{0} = (0,0), \boldsymbol{\alpha} \oplus \mathbf{0} = (a_1 + 0, b_1 + 0 + a_1 \cdot 0) = (a_1, b_1) = \boldsymbol{\alpha};$

(4) $\boldsymbol{\alpha}$ 负向量为 $-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, a_1^2 - b_1)$，且

$$\boldsymbol{\alpha} \oplus (-\boldsymbol{\alpha}) = (a_1 + (-a_1), b_1 + (a_1^2 - b_1) + a_1(-a_1)) = (0,0) = \mathbf{0};$$

(5) $1 \otimes \boldsymbol{\alpha} = \left(1 \cdot a_1, 1 \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1-1)a_1^2\right) = (a_1, b_1) = \boldsymbol{\alpha};$

(6)
$$k \otimes (l \otimes \boldsymbol{\alpha}) = k \otimes \left(la_1, lb_1 + \frac{1}{2}l(l-1)a_1^2\right)$$
$$= \left(kla_1, k\left(lb_1 + \frac{1}{2}l(l-1)a_1^2\right) + \frac{1}{2}k(k-1)(la_1)^2\right)$$
$$= \left(kla_1, klb_1 + \frac{1}{2}kla_1^2(l-1+(k-1)l)\right)$$
$$= \left(kla_1, klb_1 + \frac{1}{2}kl(kl-1)a_1^2\right) = kl \otimes \boldsymbol{\alpha};$$

(7)
$$(k+l) \otimes \boldsymbol{\alpha} = \left((k+l)a_1, (k+l)b_1 + \frac{1}{2}(k+l)(k+l-1)a_1^2\right)$$
$$= \left((k+l)a_1, (k+l)b_1 + \frac{1}{2}(k^2 + l^2 + 2kl - k - l)a_1^2\right)$$
$$= \left(ka_1 + la_1, kb_1 + \frac{1}{2}k(k-1)a_1^2 \right.$$
$$\left. + lb_1 + \frac{1}{2}l(l-1)a_1^2 + ka_1 \cdot la_1\right)$$
$$= k \otimes \boldsymbol{\alpha} \oplus l \otimes \boldsymbol{\alpha};$$

(8)
$$k \otimes (\boldsymbol{\alpha} \oplus \boldsymbol{\beta}) = k \otimes (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1a_2)$$
$$= \left(k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2 + a_1a_2) + \frac{1}{2}k(k-1)(a_1 + a_2)^2\right)$$
$$= \left(ka_1 + ka_2, kb_1 + \frac{1}{2}k(k-1)a_1^2 \right.$$
$$\left. + kb_2 + \frac{1}{2}k(k-1)a_2^2 + ka_1a_2 + k(k-1)a_1a_2\right)$$
$$= \left(ka_1 + ka_2, \left(kb_1 + \frac{1}{2}k(k-1)a_1^2\right) \right.$$
$$\left. + \left(kb_2 + \frac{1}{2}k(k-1)a_2^2\right) + k^2a_1a_2\right)$$
$$= \left(ka_1, kb_1 + \frac{1}{2}k(k-1)a_1^2\right) \oplus \left(ka_2, kb_2 + \frac{1}{2}k(k-1)a_2^2\right)$$

$$= k \otimes \boldsymbol{\alpha} \oplus k \otimes \boldsymbol{\beta}.$$

故 V 是一个线性空间.

注: 要判定一个集合 V 是否构成数域 P 上的线性空间,需验证 V 对两种运算封闭,且满足 8 条运算性质.

例 1.2 判断 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的下列子集是否构成子空间:

(1) $W_1 = \{\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{2\times2} \mid \det\boldsymbol{A} = 0\}$;

(2) $W_2 = \{\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{2\times2} \mid \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\}$.

解: (1) 取 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,且 $\det\boldsymbol{A} = 0$, $\det\boldsymbol{B} = 0$,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in W_1$,而 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 1$,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \notin W_1$,故 W_1 不是子空间.

(2) 取 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,有 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$,而 $2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (2\mathbf{A})^2$,即不满足数乘运算,故 W_2 不是子空间.

注: 判断一个向量集合是否为子空间,只要证明加法或者数乘不封闭即可.

例 1.3 设 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $W = \{\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{2\times2} \mid \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}\}$.

(1) 证明 W 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间;

(2) 求 W 的基与维数;

(3) 写出 W 中向量的一般形式.

解: (1) $\boldsymbol{O} \in W$,所以 W 非空. 任取 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in W$, $k \in \mathbf{R}$,则 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CB}$,故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$, $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(k\boldsymbol{A})$,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, k\boldsymbol{A} \in W$,因此 W 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的子空间.

(2) 任取 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$,由 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$,得到 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$,其中 b,d 是任意实数. 于是得到 W 中两个线性无关的向量 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 构成一组基,所以 $\dim W = 2$.

(3) 由(2) 的解题过程得到 W 中向量的一般形式是

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } b,d \text{ 是任意实数.}$$

注: 求子空间的基与维数时,先给出该子空间中向量的一般表达式,再对其中的独立参数分别将一个取 1,其余均取 0,即得该空间的一组基.

例 1.4　下列 P^n 的子集中是 P^n 的子空间的为(　　).

A. $W_1 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\}$

B. $W_2 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leqslant 1\}$

C. $W_3 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1\}$

D. $W_4 = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 a_2 \cdots a_n = 0\}$

解:答案为 A.

因为设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in W_1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 0$,故 $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = 0$,即 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W_1$,同理 $k\boldsymbol{\alpha} \in W_1$,所以 W_1 是子空间.

B 选项数乘不封闭,例如取 $\boldsymbol{\alpha} = \left(\dfrac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right) \in W_2$,满足 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leqslant 1$,但是 $4\boldsymbol{\alpha} = (2, 0, \cdots, 0) \notin W_2$.

C 选项加法不封闭,例如取 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, \cdots, 0) \in W_3, \boldsymbol{\beta} = (0, 1, \cdots, 0) \in W_3$,但是 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (1, 1, \cdots, 0) \notin W_3$.

D 选项加法不封闭,例如取 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, \cdots, 1, 0) \in W_4, \boldsymbol{\beta} = (0, 1, \cdots, 1, 1) \in W_4$,但是 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (1, 2, \cdots, 2, 1) \notin W_4$.

例 1.5　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性空间的 4 个线性无关的向量,设

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$W = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4\},$$

求 W 的维数与一组基.

解:由题意

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $r(\boldsymbol{A}) = 3$,所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = 3$,且 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 为一个极大无关组,从而构成 W 的基,于是 $\dim W = 3$.

例 1.6　证明:所有 n 阶对称矩阵组成 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间;所有 n 阶反对称矩阵组成 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 维线性空间.

证明:用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 n 阶矩阵中除第 i 行、第 j 列的元素为 1 外，其余元素全为 0 的矩阵. 令 $\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}(1\leqslant i<j\leqslant n)$.

显然，$\boldsymbol{E}_{ii}$，$\boldsymbol{F}_{ij}$ 都是对称矩阵，$\boldsymbol{E}_{ii}$ 有 n 个，$\boldsymbol{F}_{ij}$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个. 不难证明 $\boldsymbol{E}_{ii}$，$\boldsymbol{F}_{ij}$ 是线性无关的，且任何一个对称矩阵都可以用这 $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ 个矩阵线性表示，此即 n 阶对称矩阵组成 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维线性空间.

同样可证所有 n 阶反对称矩阵组成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维线性空间.

注:要证明一个线性空间 V 在加法与数乘两种运算下是一个 n 维线性空间，只需在 V 中找出 n 个线性无关的向量，并且集合中任何一个向量都可用这 n 个向量线性表示.

例 1.7 已知 $\mathbf{R}^4$ 中的两组基:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 下的坐标.

解:(1) 设

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{P},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的坐标代入上式得

$$\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P},$$

故过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-2&-\frac{1}{2}&-2\\\frac{3}{2}&1&\frac{5}{2}&4\\\frac{1}{2}&2&\frac{9}{2}&5\\\frac{3}{2}&2&\frac{11}{2}&8\end{bmatrix}.$$

(2) 设

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的坐标代入上式后整理得

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{5}{9}\\-\dfrac{8}{27}\\\dfrac{1}{3}\\\dfrac{2}{27}\end{bmatrix}.$$

例 1.8 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7)^{\mathrm{T}},$$

求 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 与 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 的和与交的基和维数.

解:设 $W_1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$,$W_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$,则

$$W_1+W_2=\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\},$$

由于 $r\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}=3$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的一个极大线性无关组,所以和空间的维数是 3,基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$.

设 $\boldsymbol{\xi}\in W_1\cap W_2$,故

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

即

$$k_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-l_1\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-l_2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

解之得

$$k_1=-l_2,\quad k_2=4l_2,\quad l_1=-3l_2\quad (l_2\text{ 为任意数}),$$

于是

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=l_2(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}\quad (\text{很显然 }\boldsymbol{\xi}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2),$$

所以交空间的维数为 1,基为$(-5,2,3,4)^{\mathrm{T}}$.

例 1.9 在实数域上的线性空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 上定义映射

$$T:\mathbf{R}^{2\times 2}\to\mathbf{R}^{2\times 2},\quad T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA},\quad \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times 2},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

(1) 证明:T 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个线性变换;

(2) 证明:对于任意的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$ 都有 $T(\boldsymbol{XY})=T(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}T(\boldsymbol{Y})$;

(3) 求 T 在基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

下的矩阵;

(4) 设

$$\boldsymbol{F}_{11}=\boldsymbol{E}_{11},\quad \boldsymbol{F}_{12}=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12},$$
$$\boldsymbol{F}_{21}=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21},\quad \boldsymbol{F}_{22}=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22},$$

试证 $\boldsymbol{F}_{11},\boldsymbol{F}_{12},\boldsymbol{F}_{21},\boldsymbol{F}_{22}$ 也是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基,并求 T 在基 $\boldsymbol{F}_{11},\boldsymbol{F}_{12},\boldsymbol{F}_{21},\boldsymbol{F}_{22}$ 下的矩阵.

解:(1) 对任意的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$,$k,l\in\mathbf{R}$,根据 T 的定义有

$$\begin{aligned}T(k\boldsymbol{X}+l\boldsymbol{Y})&=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X}+l\boldsymbol{Y})-(k\boldsymbol{X}+l\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}=k(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA})+l(\boldsymbol{AY}-\boldsymbol{YA})\\&=kT(\boldsymbol{X})+lT(\boldsymbol{Y}),\end{aligned}$$

所以 T 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个线性变换.

(2) 对任意的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$,有

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{XY})&=\boldsymbol{AXY}-\boldsymbol{XYA}=\boldsymbol{AXY}-\boldsymbol{XAY}+\boldsymbol{XAY}-\boldsymbol{XYA}\\&=(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA})\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{AY}-\boldsymbol{YA})\\&=T(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}T(\boldsymbol{Y}).\end{aligned}$$

(3) 根据 T 的定义知

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{AE}_{11}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -b\\ c & 0\end{bmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{AE}_{12}-\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{bmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{AE}_{21}-\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}b & 0\\ d-a & -b\end{bmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{AE}_{22}-\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & b\\ -c & 0\end{bmatrix},$$

于是

$$T(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}0 & -c & b & 0\\ -b & a-d & 0 & b\\ c & 0 & d-a & -c\\ 0 & c & -b & 0\end{bmatrix},$$