“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

线性代数

（第三版）

学习指导

郝志峰　著

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

线性代数

(第三版)

学习指导

XianxingDaishu(Di-san Ban)Xuexi Zhidao

郝志峰 著

高等教育出版社·北京

内容提要

本学习指导书是紧密配合"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数(第三版)》编写的,内容与教材同步,包括矩阵,消元法、初等变换与初等矩阵,行列式,秩,矩阵特征值问题,向量空间。每章都分为三个部分:学习疑难与解答、解题方法与研究、典型例题与分析。本书取材的深广度合适,注重指导读者的学习,内容叙述通俗易懂,解题方法归纳系统,符合初学者的思维规律,有利于读者掌握知识、开拓思维与提高能力。

本书可供广大学生学习、复习线性代数使用,对于从事线性代数教学的教师也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第三版)学习指导/郝志峰著. --北京:高等教育出版社,2016.7

ISBN 978-7-04-045536-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①郝… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第104997号

策划编辑 李 茜　责任编辑 李 茜　封面设计 张 志　版式设计 张 杰
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刁丽丽　责任印制 耿 轩

出版发行 高等教育出版社
社　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　刷 北京宏信印刷厂
开　本 787mm×960mm 1/16
印　张 10.75
字　数 180千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　次 2016年7月第1版
印　次 2016年7月第1次印刷
定　价 18.50元

物 料 号 45536-00

前　言

《线性代数（第三版）学习指导》一书是根据读者学习线性代数的特点编写而成的。每章都分为三个部分：学习疑难与解答、解题方法与研究、典型例题与分析。

本书的特点有：

1. 重点突出。如在学习疑难与解答中研究向量组之间的线性关系时，本书将重点放在最大无关组；再如注意例题的选择，以帮助读者正确理解概念和掌握运算方法。

2. 条理清晰。如在解题方法与研究中讨论向量组的线性相关性问题时，将一些判定线性相关性的定理放在一起，便于读者理解。

3. 深入浅出。如在典型例题与分析中学习矩阵乘法时选用的例子，注重直观便于读者掌握；再如尽量选用原教材的例题。

在编写过程中，编者曾广泛听取有关领导和任课教师的意见，还参考了许多其他线性代数的教材。

因学科水平所限，书中不妥之处在所难免，恳请广大教师和读者批评指正。

编　者

2015 年 10 月

目　录

第 1 章　矩　　阵

一、学习疑难与解答

问题 1　矩阵是怎样定义的?

答　$m \cdot n$ 个元排成 m 行 n 列的矩形阵列(表)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为维是 $m\times n$ 的矩阵,简称为 $m\times n$ 矩阵. 这里的横称为行,纵称为列. 矩阵可记为$[a_{ij}]_{m\times n}$或$[a_{ij}]$.

矩阵的元可以是实数,也可以是复数,或者元本身就是矩阵或其他更一般的数学对象,分别称这些矩阵为实矩阵、复矩阵、超矩阵等,本书主要在实数范围内展开.

问题 2　一些特殊矩阵指的是哪些?

答　特殊矩阵所指的范围比较广,这里一些特殊矩阵指的是下面一些矩阵.

(1) 从矩阵的形状看,一般说来 m 与 n 是不相等的. 当 $m=n$ 时,就称该矩阵为 n 阶矩阵或 n 阶方阵. 今后常将一阶矩阵作为数看待,但一个数绝不可看作为一阶矩阵. 另外,只有一列(即 $n=1$)或一行(即 $m=1$)的矩阵也常碰到,分别称为列矩阵或行矩阵,或称为列向量或行向量. 列向量常用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$表示,而行向量则常用 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}},\cdots$或 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\cdots$表示.

(2) 从矩阵中元素零的分布位置看,一些特殊矩阵指的是 $m\times n$ 梯矩阵、简化梯矩阵、方阵中的三角阵、对角阵、标量阵、单位阵等.

① 对 $k=1,2,\cdots,m-1$ 满足以下两个条件的 $m\times n$ 矩阵称为梯矩阵:一是若第 k 行是零(即该行的元全为零),则第 $k+1$ 行必是零行;二是若有第 $k+1$ 行是非零行,则该行的首非零元所在的列号,必大于第 k 行首非零元所在的列号,如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是梯矩阵.

② 一个梯矩阵若各非零行的首非零元均等于1,而该元所处列的其余元皆为0,则称其为简化梯矩阵,如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为简化梯矩阵.

③ 三角阵有上、下之分.对于方阵,若其非零元只出现在对角线及其上(或右)方,就称为上三角阵,记为 $\boldsymbol{U}$ 或 $\boldsymbol{R}$,如

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

是三阶上三角阵.相反,若非零元只出现在对角线及其下(或左)方的方阵称之为下三角阵,记为 $\boldsymbol{L}$,如

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

是三阶下三角阵.

在一般情况下,对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$,$\boldsymbol{A}$ 称为上三角阵;当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$,$\boldsymbol{A}$ 称为下三角阵.

④ 一个既是上三角又是下三角的矩阵称为对角阵,亦即对角阵是非零元只能出现在主对角线上的方阵,如

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

是三阶对角阵,记为 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(1,2,3)$.

n 阶对角阵记为 $\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$,即

$$\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\xlongequal{\mathrm{def}}\begin{bmatrix}\delta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n\end{bmatrix},$$

这里的 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 允许其中有等于零的. 当 δ_i 全为零时,称此矩阵为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$.

记号“def”或“d”表示定义相等.

⑤ 若对角阵中的 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 全等于 δ 时,称此矩阵为标量阵,如

$$\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

是三阶标量阵.

⑥ 当 $\delta=1$ 时,称此矩阵为单位阵,记为 $\boldsymbol{I}_n$(或 $\boldsymbol{E}_n$),如

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

是三阶单位阵.

(3) 从矩阵中元关于主对角线的关系看,一些特殊矩阵指的是对称阵、反称矩阵等.

① n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,位于主对角线对称位置的那些元分别相等,此矩阵是对称阵,即对所有的 i、j 有 $a_{ij}=a_{ji}$,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

是三阶对称阵.

② n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,位于主对角线对称位置的那些元绝对值相等,且差一个负号,此矩阵是反称矩阵,即对所有的 i、j 有 $a_{ij}=-a_{ji}$. 由此可知 $a_{ii}=0$,即反称矩阵的主对角线上的元必为零,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -4 & 5\\ 4 & 0 & -6\\ -5 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

是三阶反称矩阵.

问题 3 矩阵有哪些运算?

答 矩阵有下列运算:

设$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=[b_{ij}]$,

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nl} \end{bmatrix}=[c_{ij}],$$

(1) 相等

$$A=B \overset{\text{def}}{=\!=\!=} a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

(2) 加法

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}] \overset{\text{def}}{=\!=\!=} [a_{ij}+b_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

(3) 数乘法

$$\lambda A \overset{\text{def}}{=\!=\!=} [\lambda a_{ij}]=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix},\lambda \in \mathbf{R}.$$

(4) 减法

$$A-B \overset{\text{def}}{=\!=\!=} A+(-B)=[a_{ij}]+[-b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

(5) 乘法

$$AC \overset{\text{def}}{=\!=\!=} [d_{ij}]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{ml} \end{bmatrix},$$

其中 $d_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{in}c_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,l)$.

(6) 转置

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\text{或 } \boldsymbol{A}')\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

(7) 求逆矩阵(见下面的解题方法与研究).

问题 4 矩阵运算有哪些规则?

答 在介绍规则前先写出几个显而易见的事实,

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},$$
$$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A},$$
$$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},$$
$$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}.$$

在下列运算规则中 α、β 为任意实数,$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为矩阵.

(1) 加法交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

加法结合律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(2) 数乘结合律:$(\alpha\beta)\boldsymbol{A}=\alpha(\beta\boldsymbol{A})=\beta(\alpha\boldsymbol{A})$,

$\alpha(\boldsymbol{AB})=(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})$;

(3) 乘法结合律:$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,

$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{A}^{\alpha}\boldsymbol{A}^{\beta}=\boldsymbol{A}^{\alpha+\beta}\\(\boldsymbol{A}^{\alpha})^{\beta}=\boldsymbol{A}^{\alpha\beta}\end{matrix}\right\}$ 这里的 α、β 为整数. 定义 $\boldsymbol{A}^{0}=\boldsymbol{I}$、$\boldsymbol{A}^{-k}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{k}$;

(4) 分配律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$,

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,

$(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$,

$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$;

(5) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, $(\alpha\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(6) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$,

$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$,

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}(\alpha\neq 0).$$

问题5 任意两个矩阵都能相加吗？任意两个矩阵都能相乘吗？

答 任意两个矩阵不能相加，只有当两个矩阵具有相同的维（即有相同的行数和列数）才能相加，即 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$、$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 都是维 $m\times n$ 的矩阵才能相加.

任意两个矩阵不能相乘，只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时才能相乘，即 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是维 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ 是维 $n\times l$ 矩阵，这时 $\boldsymbol{AC}$ 才能相乘，其结果是维 $m\times l$ 矩阵.

问题6 (1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$； (2) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm T}=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}$；

(3) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，这三个等式成立吗？

答 这三个等式都不成立.

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\3&4\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都存在，且有 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}6&8\\0&0\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&0\\3&6\end{bmatrix}$.

由此可见，矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 不一定相等或不一定有相同的维，或 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 可能不存在（不能直接相乘）.

倘若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，称它们是可交换相乘的矩阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}1&3\\3&7\end{bmatrix}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}1&3\\3&7\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\6&4\end{bmatrix},$$

很明显 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm T}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{B}^{\mathrm T}$，而 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm T}=\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\begin{bmatrix}1&3\\3&7\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&-3\\-3&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}&=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\\&=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-6\\-3&4\end{bmatrix},\end{aligned}$$

很明显 $(\boldsymbol{AB})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$，而 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

问题 7 两个三角阵、对角阵相乘等于什么？

答 两个 n 阶上三角阵之积仍为 n 阶上三角阵. 两个 n 阶下三角阵之积仍为下三角阵. 两个 n 阶对角阵之积仍为 n 阶对角阵，且有

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

问题 8 在矩阵运算下线性变换及线性方程组应怎样表示？

答 线性变换，给定了 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，对任一维向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，由矩阵乘法，可得 m 维向量 $\boldsymbol{Ax}$，

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^m.$$

可以看作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 把向量 $\boldsymbol{x}$ 变换成 $\boldsymbol{Ax}$，故常称 $\boldsymbol{Ax}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的像，并称向量 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ax}$ 的原像.

若对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 及任意实数 α、β，有 $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{Ax}+\beta\boldsymbol{Ay}$，故也称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性变换. 特别地，每个 n 阶矩阵可看作是 $\mathbf{R}^n$ 到自身的一个线性变换.

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程，n 个未知数的方程组，简称为 $m\times n$ 线性代数方程组，引进记号

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

可将上述方程组写成 $$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

借助于上述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作为向量变换的看法，解 $m\times n$ 线性代数方程组，可几何地看成是对于给定的线性变换 A，要从已知的像向量 $\boldsymbol{b}$ 确定出原像向量 $\boldsymbol{x}$.

问题 9 一个矩阵的可逆矩阵是怎样定义的？可逆矩阵是唯一的吗？

答 对给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使下式成立

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，并称满足上式的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

说明:可逆矩阵亦称为非退化阵、非奇异阵、满秩阵等,不可逆矩阵亦称为退化阵、奇异阵、降秩阵等.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵存在,则其逆矩阵是唯一的.

问题 10 对角阵可逆吗?

答 对角线元全不为 0 的对角阵可逆,其对角阵的逆阵也是对角阵,两者各对应对角线元之积均为 1.

问题 11 有了逆阵之后,$m\times n$ 线性方程组的解是怎样的?

答 利用逆阵概念,可方便表出线性代数方程组的解,即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

问题 12 逆阵有哪些性质?

答 逆阵有如下性质:

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}(k\neq 0),(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},(\boldsymbol{A}_1\cdots\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\boldsymbol{A}_k^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

问题 13 什么叫分块矩阵?它有哪些运算规则?

答 对于一些维数较高的矩阵,为了运算的方便,引出了分块矩阵.具体的分法是:在行间做水平(虚)线,或(及)在列间作铅垂(虚)线,把矩阵划分成一些块,称为对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块.矩阵的分块方法不是唯一的,完全是为了需要而进行划分的,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix},$$

可以分为

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{D}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\5&6\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&4\\7&8\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{D}=[9\quad 10]$、$\boldsymbol{E}=[11\quad 12]$;

也可以分为

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\9&10&11&12\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{D}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}=[1\quad 2]$、$\boldsymbol{C}=[3\quad 4]$、$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}5&6\\9&10\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}7&8\\11&12\end{bmatrix}$;

也可以分为

$$A=\left[\begin{array}{cc:c:c}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{array}\right]=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{C}\quad \boldsymbol{D}],$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\5&6\\9&10\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3\\7\\11\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}4\\8\\12\end{bmatrix}$等.

将矩阵适当地分块是种技术,这样做,有时可利于凸显出矩阵所具有的某种简单结构,从而有可能利用已知的性质,简化运算与讨论,如对

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&0&0&0\\4&5&6&0&0&0\\7&8&9&0&0&0\\0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&11&12\\0&0&0&0&13&14\end{bmatrix}$$

适当分块后,可被看成是个“对角阵”:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{33}\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{22}=[10],\boldsymbol{A}_{33}=\begin{bmatrix}11&12\\13&14\end{bmatrix},$$

称形如上述对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块的矩阵为分块对角[矩]阵或拟对角[矩]阵.

若将矩阵按列分块(即在矩阵的每两个列向量间引入虚线),如

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c:c}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right]=[\boldsymbol{a}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{a}_n]$$

其中 $\boldsymbol{a}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列,$\boldsymbol{a}_j=[a_{1j}\quad\cdots\quad a_{mj}]^{\mathrm{T}}$.

有时也要用到按行分块

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\hdashline\vdots&&\vdots\\\hdashline a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}^1\\\vdots\\\boldsymbol{a}^m\end{bmatrix}.$$

矩阵按列分块,线性代数方程组可写成

$$[\boldsymbol{a}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{b},$$

从而得线性代数方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$,这样方程组有解的条件是 $\boldsymbol{b}$ 可作为向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的“线性组合”,而求解方程组可几何地解释为:已知$(n+1)$个向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,问题是求已知向量 $\boldsymbol{b}$ 用向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots\boldsymbol{a}_n$“线性表示”时的系数.

已知 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{A}$,若将逆阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块,写成 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1\cdots\ \boldsymbol{b}_n]$,单位阵 $\boldsymbol{I}$ 按列分块,写成 $\boldsymbol{I}=[\boldsymbol{e}_1\cdots\ \boldsymbol{e}_n]$(其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是除第 i 个元素为 1 其余元素皆为 0 的 n 维向量,称为 n 维自然单位向量),定义中 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 可等价地写成 $\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{e}_i(i=1,\cdots,n)$,这样求 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵 $\boldsymbol{B}$(即 $\boldsymbol{A}^{-1}$)的问题被归结为 n 个具有相同系数 $\boldsymbol{A}$ 的线性代数方程组的求解,至此已显露出线性方程组的求解、矩阵、向量理论这三者有着密切的关联.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似,这里不再赘述.

问题 14 什么叫子矩阵?什么叫主子矩阵?

答 对给定的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,取其 r 行$(1\leqslant r\leqslant m)$、$s$ 列$(1\leqslant s\leqslant n)$,位于交叉位置的 rs 个元,可按原来的相对位置构成一个 $r\times s$ 矩阵,称这样的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵. 如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

取其第一、三行及第二、三、四列,可得 2×3 子矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

说明:① 一个矩阵可以有很多个子矩阵;

② 在分块矩阵中所得到的每个子块都可看作是给定矩阵的一个子矩阵;

③ 每个矩阵可看作是自身的一个子矩阵.

对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,可获得从 1 阶开始直到 n 阶的一类重要的特殊方子矩阵,这种 k 阶方子矩阵(其对角线元是 $\boldsymbol{A}$ 的前 k 个对角线元 $a_{11},\cdots,a_{kk}$)称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶前主子矩阵,记为 $\boldsymbol{A}^{[k]}$,这是自 $\boldsymbol{A}$ 的左上角直到自身的一类方子矩阵,如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}^{[1]}=[1]$、$\boldsymbol{A}^{[2]}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{A}^{[3]}=\boldsymbol{A}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的所有的三个前主子矩阵.

一般地说,凡对角线元全为 $\boldsymbol{A}$ 对角线的元的子矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的主子矩阵,如对上述 $\boldsymbol{A}$,

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\7 & 9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{bmatrix}$$

就是 $\boldsymbol{A}$ 的另外两个主子矩阵.

运用子矩阵概念,可这样叙述梯矩阵及简化梯矩阵:

具有 r 个非零行的梯矩阵,必有对角线元全不为 0 的 r 阶上三角子矩阵,如梯矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & 3 & 0 & 7 & 1\\0 & 0 & 8 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

其非零行有三行,取其前三行及第二、三、五列(各行首非零元所在的列)得三阶子矩阵:

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\0 & 8 & 2\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

又如,对简化梯矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 6 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

也可找到这样的 r 阶上三角子矩阵,分别为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 4 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

而简化梯矩阵的特点,在于存在 r 阶单位阵作其子矩阵,其中 r 是简化梯矩阵的(也是原梯矩阵的)非零行行数.

二、解题方法与研究

1. 在矩阵运算中值得注意的事项

(1) 两个矩阵只有在行数与列数分别相等时才能相加减.

(2) 两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相乘只有在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时才能进行.

(3) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(5) $(\boldsymbol{AB})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$,$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(6) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,不一定有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$,但 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O}$.

(7) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,不一定有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$(见下面证明题中例 3).

还有一些注意事项,读者需在学习中加以总结与归纳.

2. 矩阵相乘的方法

两个矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相乘(设相乘 $\boldsymbol{AB}$ 存在)采用的是"法则法",即采用"行乘列法则":$\boldsymbol{AB}$ 的 i-j 元是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应位置元的乘积之和(简说为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列之积).

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5&6&7\\8&9&10\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$.

解 $\boldsymbol{AB}$ 中 1-1 元是 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与 $\boldsymbol{B}$ 的第一列之积,即 $1\times5+2\times8=21$.

$\boldsymbol{AB}$ 中 2-3 元是 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{B}$ 的第三列之积,即 $3\times7+4\times10=61$.

$\boldsymbol{AB}$ 中其他元采用行乘列法则亦可求得.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&7\\8&9&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&24&27\\47&54&61\end{bmatrix}.$$

3. 判定一个矩阵为某些特殊矩阵的方法

(1) 判定梯矩阵、简化梯矩阵的方法

主要是采用"目测法"(即"观察法"),即利用梯矩阵、简化梯矩阵等定义通过观察而得到.

例 $\begin{bmatrix}0&3&0&7\\0&0&8&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$是梯矩阵,$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$是简化梯矩阵.

(2) 判定上(或下)三角阵的方法

主要是采用"目测法"(即"观察法").

例 $\begin{bmatrix}1&7&9\\0&3&11\\0&0&5\end{bmatrix}$是三阶上三角阵,$\begin{bmatrix}1&0&0\\7&3&0\\9&11&5\end{bmatrix}$是三阶下三角阵.