普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校少数民族预科教材

高等数学基础教程

主　编　王立冬　齐淑华
副主编　奉黎静　林屏峰　刘延涛
主　审　刘　满

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校少数民族预科教材

高等数学基础教程

主　编　王立冬　齐淑华
副主编　奉黎静　林屏峰　刘延涛
主　审　刘　满

科学出版社
北　京

内 容 简 介

为落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要》中提出“要进一步办好高校民族预科班”精神，规范少数民族预科教育教学，进一步提高少数民族预科数学教学质量，本教材以新修订的民族预科数学教学大纲为依据，针对民族预科特点，由具有多年预科教学实践经验的老师编写而成.

本书着眼素质教育，注重培养学生数学思维能力. 在教材内容选取和讲述上，本着从简单到复杂、从特殊到一般的原则，力求深入浅出，“预、补结合”，难易结合，易教易学，主要内容包括：函数、极限、连续函数、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分以及定积分. 为了增加可读性和趣味性，同时还增加了一些数学家简介，兼顾各层次民族预科学生学习状况，还分层次提供多种程度的习题，结合教育部会考题，供学生练习.

本书主要供普通高校民族预科班的学生学习使用，也可以供相关学生自学使用,也可以供教师教学参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础教程 / 王立冬，齐淑华主编. —北京：科学出版社，2016.9
普通高等教育“十三五”规划教材 • 普通高等院校少数民族预科教材
ISBN 978-7-03-049619-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②齐… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 200167 号

责任编辑：张中兴　胡海霞 / 责任校对：彭　涛
责任印制：白　洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 9 月第 一 版　开本：787 × 1092　1/16
2016 年 9 月第一次印刷　印张：19　1/2
字数：462 000

定价：45.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

少数民族预科教育是大学教育的特殊层次，预科教材应体现这种特殊性. 为落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要》中提出“要进一步办好高校民族预科班”精神，规范少数民族预科教育教学，进一步提高少数民族预科数学教学质量，教育部民族教育司民教司和教育部少数民族预科教育教学管理指导委员会于 2015 年和 2016 年两次组织有关预科数学教育教学专家，对一年制本科预科数学教学大纲进行了修订. 本书是以新修订的教学大纲为依据，针对民族预科特点，由具有多年预科教学实践经验的老师编写而成. 在编写的过程中，针对民族预科学生，力求突出以下特色：

1. 明确指明本课程研究的主要对象，研究问题使用的主要工具和主要方法.

2. 通过研究数学问题的规律性，在概念、性质、运算的学习中注重数学思想的熏陶，培养学生数学思维能力，即抓住主要特征，抽象数学概念，建立数学模型；利用联想、判断、类比、归纳、推理作出猜测，然后通过分析、证明、计算来揭示事物内在规律；找到简单与复杂之间的过渡媒介和桥梁；达到用数学思维独特的眼光观察带有数学印记的奇妙规律，领悟数学科学思想的目的.

3. 着眼素质教育，用微积分的主导思想——函数思想方法和微积分中所体现的哲学思想贯穿全书，同时介绍有关数学家的数学贡献、事迹等，弘扬数学文化，让学生学习和吸取先辈大师创建数学这个“人造宇宙”的精神食粮；用数学运算法则培养学生遵纪守法、按章办事的素养.

4. 在内容安排与表述上，本着从简单到复杂、从特殊到一般的原则，力求深入浅出，注重讲清数学的基本概念、基本性质，兼顾预科学生多层次的特点，“预、补结合”，难易结合，易教易学，有较强的可读性.

5. 在方法上，体现具体到抽象再由抽象解决更复杂的具体问题，把复杂问题拆成简单问题的方法.

6. 在习题的安排、选择上，兼顾各层次民族预科学生学习状况，提供多种程度的习题供不同层次学生选择练习；同时结合教育部会考题型，增加机考模拟测试题.

参加本书编写的有大连民族大学王立冬老师、刘满老师、齐淑华老师、刘延涛老师、周晓阳老师；中南民族大学奉黎静老师、肖明蔚老师；西南民族大学林屏峰老师. 本书出版得到了大连民族大学、中南民族大学、西南民族大学的大力支持，一并致谢!

由于时间仓促以及民族预科教育的特殊性，编写中难免有疏漏和不妥，恳请读者指正.

凡有生命力的教材，总是需要不断地听取读者的意见、建议进行改进和完善，以适应教学、学习的要求，本书也不例外，所以我们诚挚地希望读者提出宝贵意见和建议.

编　者
2016 年 6 月

目　录

第1章

函　　数

Functions

微积分研究的主要对象是函数，使用的主要工具是极限，研究问题所使用的主要方法是分类、类比，具体的内容就是通过极限这个工具把函数进行分类(无穷小类、无穷大类、连续类、可导类、可积类等). 它与初等数学所研究函数的重要区别是：初等数学研究的大多都是具体函数的具体性质，如研究函数的单调性、奇偶性、周期性等，而微积分所研究的大多都是抽象函数的抽象性质，如连续性、可导性、可积性等.

古典数学与现代数学讨论问题的重要区别之一是，古典数学主要是在数集上讨论问题，而现代数学主要是在一般的集合上讨论问题，所以为了便于把古典数学的思想方法推广到现代数学上去，并且准确而深刻地理解函数概念，集合知识是不可缺少的. 本章将简要地介绍集合的一些基本概念，在此基础上重点介绍函数的概念.

1.1　集合——微积分的基础，数学大厦的基石

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性. 集合论的基础是由德国数学家康托尔(Cantor，1845—1918)在 19 世纪 70 年代奠定的，经过一大批卓越的数学家半个世纪的努力，到 20 世纪 20 年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位. 可以说，当今数学各个分支的几乎所有结果都构筑在严格的集合论理论上. 所以，学习高等数学，应首先从集合入手.

所谓**集合(set)**(简称**集**)是指具有某种确定性质的对象的全体. 组成集合的各个对象称为该集合的**元素(element)**.

习惯上，用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合的元素. 用 $a\in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素，读作“a 属于 A”；用 $a\notin A$ (或 $a\bar{\in}A$)表示 a 不是集合 A 中的元素，读作“a 不属于 A”.

例 1.1.1　某学校全体男同学组成一个集合 A，而该学校的每个男同学是集合 A 的元素.

例 1.1.2　方程 $x^2-2x-3=0$ 的所有实根构成一个集合 B，而方程的每个实根是集合 B 的元素.

例 1.1.3　全体偶数组成一个集合 E，而每个偶数是集合 E 的元素.

例 1.1.4　圆周 $x^2+y^2=9$ 上所有的点构成一个集合 C，而圆周上的点是集合 C 的元素.

含有有限多个元素的集合称为**有限集(finite set)**，如上述例题中的集合 A，B；含有无限

多个元素的集合称为**无限集(infinite set)**，如上述例题中的集合 C，E. 不含有任何元素的集合称为**空集(empty set)**，记作 $\varnothing$.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法通常有两种. 一种是列举法，即将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内. 例如，所有正整数组成的集合可以表示为 $\mathbf{N}$，则 $\mathbf{N}$ 可以表示为

$$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

另一种是描述法，这种方法是用集合元素所具有的共同性质来刻画这个集合，即将具有性质 P 的元素 x 所组成的集合 A 表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，正整数集 $\mathbf{N}$ 也可表示成

$$\mathbf{N}=\{n\mid n\text{ 是正整数}\};$$

所有实数组成的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 为实数}\}.$$

又如例 1.1.4 中集合 C 可以表示为

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=9,\ x,\ y\text{ 为实数}\}.$$

1.1.2　集合的运算

1. 集合的运算

(1) 对于集合 A 和 B，若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，这时就称 A 是 B 的一个**子集(subset)**，记作 $A\subseteq B$，读作"A 含于 B"(或"B 包含 A"). 若 $A\subseteq B$，且存在[①] $b\in B$，使得 $b\notin A$，则称 A 是 B 的一个**真子集(proper subset)**，记作 $A\subset B$ (图 1-1).

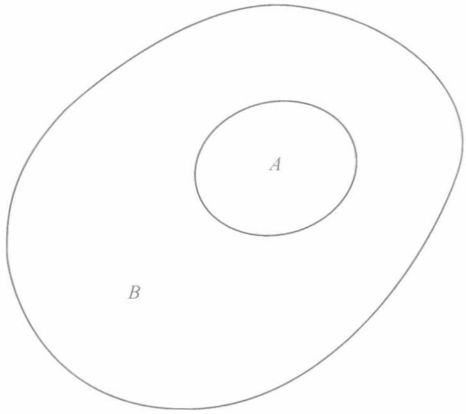

图 1-1

规定：$\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

全体自然数的集合、全体整数的集合、全体有理数的集合、全体实数的集合和全体复数的集合都是最常遇到的集合，我们约定分别用粗体字母 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 来表示这些集合，即

$\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合；

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合；

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合；

$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合；

$\mathbf{C}$ 表示全体复数的集合.

我们还把正整数、正有理数和正实数的集合分别记为 $\mathbf{Z}_+$，$\mathbf{Q}_+$ 和 $\mathbf{R}_+$，显然有

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$$

① 本书用符号 $\forall$ 表示"任意的"，符号 $\exists$ 表示"存在". 例如，集合 A 中任意的元素 a，可以表示为 $\forall a\in A$；集合 B 中存在一个元素 b，可以表示为 $\exists b\in B$.

和

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}_+ \subset \mathbf{Q}_+ \subset \mathbf{R}_+ .$$

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A，B **相等(equality of sets)**，记作 $A = B$. 此时 A 中的元素都是 B 中的元素，反过来，B 中的元素也都是 A 中的元素，即 A，B 中的元素完全一样.

(2) 设 A，B 是两个集合，称 $\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的**并集(union set)**，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\} .$$

它是将 A 和 B 的全部元素合起来构成的一个集合(图 1-2).

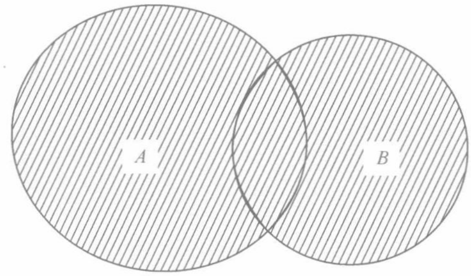

图 1-2

(3) 称 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的**交集(intersection set)**，记作 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\} .$$

它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合(图 1-3).

(4) 称 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集(difference set)**，记作 $A - B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\} .$$

它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合(图 1-4).

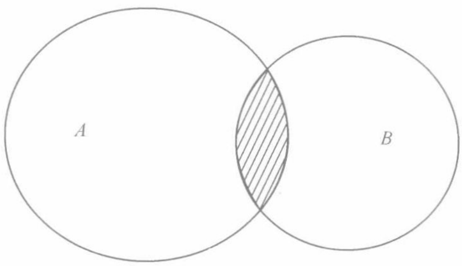

图 1-3

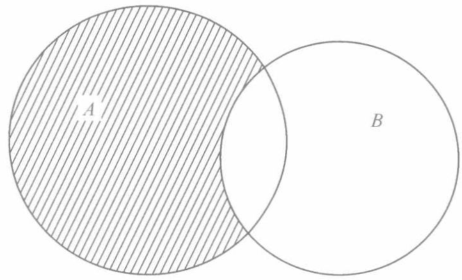

图 1-4

例 1.1.5　设 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$，$B = \{x \mid 1 < x < 3\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$，$A - B$.

解　$A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}$，$A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\}$，$A - B = \{x \mid -1 < x \leqslant 1\}$.

2. 集合运算的性质

(1) **交换律**　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$.

(2) **结合律**　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) **分配律**　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) **幂等律**　$A \cup A = A$，$A \cap A = A$.

(5) **吸收律**　$A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$.

若 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B$，$A \cap B = A$.

特别地，由于 $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$，所以有

$$A \cup (A \cap B) = A ，\quad A \cap (A \cup B) = A .$$

1.1.3　区间与邻域

1. 区间(interval)

在本教程中经常遇到以下形式实数集的子集——区间. 为了书写简练，将各种区间的符号、名称、定义列表如下：($a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$)

符号	名称		定义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开半闭区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半闭半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$
$(-\infty,+\infty)$		实数集	$\mathbf{R}$

2. 邻域(neighborhood)

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$. 数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 表为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a **的 δ 邻域**，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 当不需要注明邻域的半径 δ 时，常把它表为 $U(a)$，简称 a **的邻域**.

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 表为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a，称为 a **的 δ 去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它表为 $\mathring{U}(a)$，简称 a **的去心邻域**. $\mathring{U}(a)$ 的子集开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a **的右半邻域**，开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a **的左半邻域**.

习题 1-1

1. 下列集合是空集的是(　　).

(A) $\{x\mid x+5=0\}$；　　(B) $\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{且 } x^2+5=0\}$；

(C) $\{x\mid x>0 \text{ 且 } x<1\}$；　　(D) $\{x\mid x^2+y^2=0,\text{且 } x,y\in\mathbf{R}\}$.

2. 设集合 $A=\{a,b,c\}$，下列式子中正确的是(　　).

(A) $\varnothing\in A$;　　(B) $A\subseteq A$;　　(C) $b\subset A$;　　(D) $\{a\}<A$.

3. 设集合 $M=\{x\mid x^2>4\}$，$N=\{x\mid x<3\}$，下列式子中正确的是(　　).

(A) $M\cup N=N$;　　(B) $M-N=\varnothing$;

(C) $M\cap N=\{x\mid 2<x<3\}$;　　(D) $N-M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$.

4. 数集 $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},x\neq 1\right.\right\}$ 还可以表示为(　　).

(A) 去心邻域 $\mathring{U}\left(1,\frac{1}{2}\right)$;　　(B) 邻域 $U\left(1,\frac{1}{2}\right)$;

(C) 开区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;　　(D) 开区间 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

5. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $x^2\leqslant 9$;　　(2) $|x-1|>1$;　　(3) $(x-1)(x+2)<0$;　　(4) $0<|x+1|<0.01$.

1.2　函数——微积分的研究对象，变量依赖关系的数学模型

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着，这是物质世界的一个普遍规律. 17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的二百多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置.

1.2.1　函数的概念

1. 函数定义

定义 1.2.1　设非空数集 $D\subseteq\mathbf{R}$，若对任意的 $x\in D$，按照某种确定的法则 f，有唯一确定的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数(function)**，记作

$$f:D\to\mathbf{R},\quad \text{或}\quad f:x\mapsto y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为**自变量(independent variable)**，y 称为**因变量(dependent variable)**，D 称为函数 f 的**定义域(domain of definition)**，函数 f 的定义域常记作 D_f (或 $D(f)$). 对于任意的 $x\in D_f$，称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的**函数值(functional value)**，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 全体函数值构成的集合称为函数 f 的**值域(domain of value)**，常记作 $f(D)$ (或 $\mathbf{R}_f$)，即

$$\mathbf{R}_f=\{f(x)\mid x\in D_f\}.$$

关于函数概念的几点说明：

(1) 用符号"$f:D\to\mathbf{R}$"表示 f 是定义在数集 D 上的函数，十分清楚、明确. 在本书中，为方便起见，我们约定，将"f 是定义在数集 D 上的函数"用符号"$y=f(x)$，$x\in D_f$"表示. 当不需要指明函数 f 的定义域时，又可简写为"$y=f(x)$"，有时甚至笼统地说"$f(x)$ 是 x 的函数(值)".

(2) 根据函数定义，虽然函数都存在定义域，但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合

$D=\{x|f(x)\in\mathbf{R}\}$. 例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，没有指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即闭区间

$$[-1,1]=\{x\,|\,\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}.$$

具有具体实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束.

(3) 函数定义指出：$\forall x\in D$，按照对应法则 f，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，这样的对应就是所谓的单值对应. 反过来，一个 $y\in\mathbf{R}_f$ 就不一定只有一个 $x\in D$，使 $y=f(x)$. 例如函数 $y=\sin x$. $\forall x\in\mathbf{R}$，对应唯一一个 $y=\sin x\in\mathbf{R}$，反之，对 $y=1$，有无限多个 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{Z}$，按照对应关系 $y=\sin x$ 都对应 1. 即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

(4) 在函数 $y=f(x)$ 的定义中，要求与 x 值对应的 y 值是唯一确定的，这种函数也称为**单值函数(single valued function)**. 如果取消唯一这个要求，即对应于 x 值，可以有两个以上确定的 y 值与之对应，那么函数 $y=f(x)$ 称为**多值函数(multiple valued function)**. 例如函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

为了讨论的方便起见，我们总设法避免函数的多值性. 在一定条件下，多值函数可以分裂为若干单值分支. 例如，双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 就可以分成两个单值支：一支是不小于零的 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$，另一支是不大于零的 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$. 我们知道方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形是中心在原点、半径为 r 的圆周，这同时也就是双值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 的图形. 两个单值支就相当于把整个圆周分为上、下两个半圆周. 所以只要把各个分支弄清楚，由各个分支合起来的多值函数也就了如指掌了. 本书若无特别声明，所讨论的函数都限于单值函数.

必须注意，定义域和对应法则是确定函数的两大要素. 在数学中，两个函数相同是指它们的定义域和对应法则都分别相同，至于自变量和因变量用什么字母来表示，则是无关紧要的. 例如，函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 不是同一函数，这是因为，$f(x)=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，它们定义域不同. 而函数 $y=2x$ 与 $s=2t$ 表示同一函数，因为这两个函数的定义域和对应法则都相同.

从函数的定义我们可以看出函数概念最重要的要素是对应法则，这种对应法则包含着建立已知与未知的对应关系、简单与复杂的对应关系. 所以说函数概念本身也蕴含解决问题的思想方法.

2. 函数的表示法

函数的表示法一般有三种：表格法、图像法和解析法. 这三种方法各有特点，表格法一目了然；图像法形象直观；解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

例 1.2.1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

这是一个分段函数，其定义域是区间 $(-\infty,+\infty)$，函数值域是区间 $[0,+\infty)$ (图 1-5).

例 1.2.2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

这是一个分段函数，其定义域是区间 $(-\infty,+\infty)$，函数值域为集合 $\{-1,0,1\}$ (图 1-6). 对于任何实数 x，下列关系成立：$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

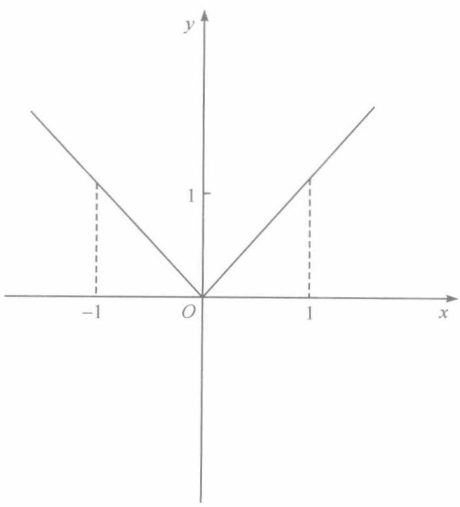

图 1-5

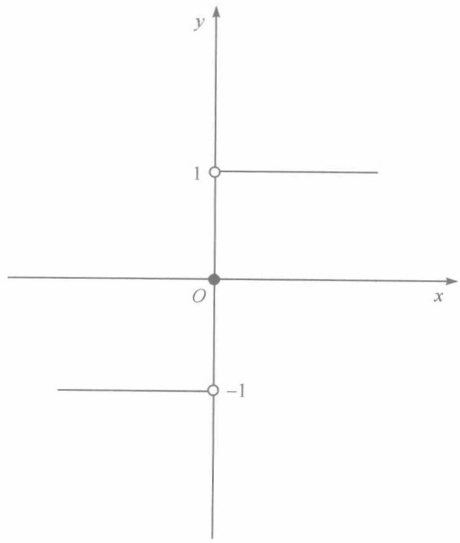

图 1-6

例 1.2.3　取整函数 $y=[x]$

在数学上常用 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 例如 $[2.5]=2$，$[3]=3$，$[0.1]=0$，$[-\pi]=-4$ 等. 函数

$$y=[x]$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数值域为整数集 $\mathbf{Z}$ (图 1-7).

例 1.2.4　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数},\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，函数值域为集合 $\{0,1\}$. 由于任何两个有理数之间都有无理数，并且任何两个无理数之间也都有有理数，因此我们无法作出它的图形.

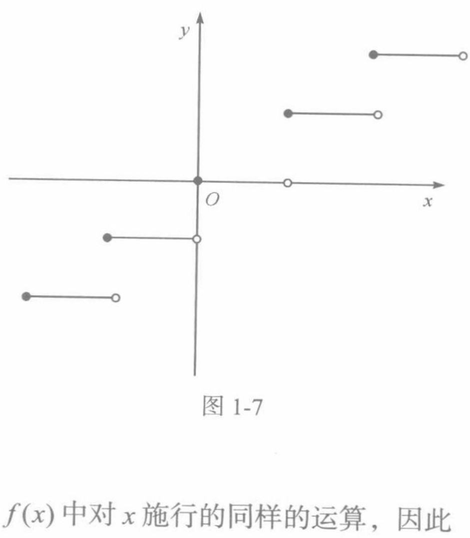

图 1-7

例 1.2.5　设

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $f(x+1)$ 的表达式.

解　f 是对应法则，$f(x+1)$ 表示对 $x+1$ 施行如同 $f(x)$ 中对 x 施行的同样的运算，因此

$$f(x+1)=\begin{cases}[(x+1)-1]^2, & 0\leqslant x+1\leqslant 1,\\ 2(x+1), & 1<x+1\leqslant 2.\end{cases}$$

则

$$f(x+1)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x+2, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

1.2.2　几种具有特殊性质的函数

1. 有界函数

定义 1.2.2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$，若存在正数 M，使得对任意的 $x\in X$，恒有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 X 上(内)**有界(bounded)**，或称 $f(x)$ 是 X 上(内)的**有界函数(bounded function)**. 否则，称 $f(x)$ 在 X 上(内)**无界(unbounded)**，或称 $f(x)$ 是 X 上(内)的**无界函数(unbounded function)**.

例如，对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切 x，$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数.

有界函数的几何意义：设 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界，即存在 $M>0$，使得对任意的 $x\in(a,b)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$. 注意到 $f(x)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的图形上点 $(x,f(x))$ 的纵坐标，因此，$y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界在几何上表示 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的函数图形必夹在两平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间. 反之亦然(图 1-8).

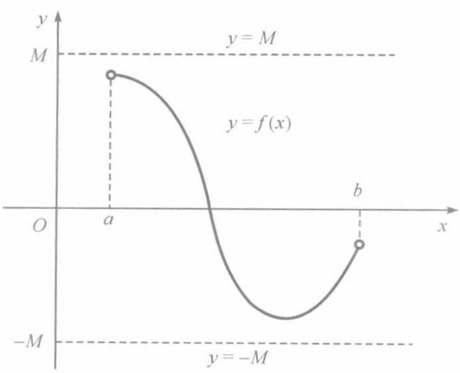

图 1-8

例 1.2.6　求证：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界；在 $(1,2)$ 内有界.

证明　不论正数 M 多么大$\left(\text{不妨设}M>\dfrac{1}{2}\right)$，总存在点 $x_0=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，但是

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\right|=2M>M.$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

当 $1<x<2$ 时，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x}<1$，对于 $(1,2)$ 内任意点 x 有不等式 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}<1$ 成立，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界.

从这一例题可以看出，函数是否有界，与其所在区间有关. 函数 $f(x)$ 若在定义域上有界，则它在定义域内的任一部分区间上有界.

定义 1.2.3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$，若存在数 A，使得对任意的 $x\in X$，

都有

$$f(x) \leqslant A \quad (\text{或 } f(x) \geqslant A)$$

成立，则称 $f(x)$ 在 X 上(内)**有上界**(或**有下界**)，也称 $f(x)$ 是 X 上(内)**有上界**(或**有下界**)的函数. A 称为 $f(x)$ 在 X 上(内)的一个**上界(upper bound)**(或**下界(lower bound)**).

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数. 即函数在 X 上(内)有界的充要条件是该函数在 X 上(内)既有上界又有下界.

若 $f(x)$ 在 X 上(内)有一个上界(或下界) A，则对任何 $C>0$，$A+C$ (或 $A-C$)都是 $f(x)$在 X 上(内)的上界(或下界)，可见，$f(x)$ 在 X 上(内)的上界(或下界)有无穷多个.

例如，由于 $|\sin x| \leqslant 1$，故 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，这是因为虽然 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个下界 0，但在 $(0,+\infty)$ 内无上界，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界. 从几何上来看，因为 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的函数图形不能夹在任何两条平行于 x 轴的直线之间，所以，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

2. 单调函数

定义 1.2.4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，若对于区间 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调增加(strictly monotone increasing)**(或**严格单调减少(strictly monotone decreasing)**)，称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**(或**单调减少区间**). 若把上述不等式改为

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在 I 上**单调增加(monotone increasing)**(或**单调减少(monotone decreasing)**).

当函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或减少)时，又称 $f(x)$ 是区间 I 上的**单调增加函数(monotone increasing function)**(或**单调减少函数(monotone decreasing function)**). 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间(或单调减区间).

单调增加函数的图形是随着自变量 x 的增加而上升的曲线(图 1-9)；单调减少函数的图形是随着自变量 x 的增加而下降的曲线(图 1-10).

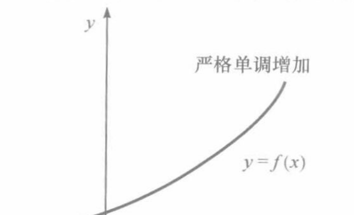

图 1-9

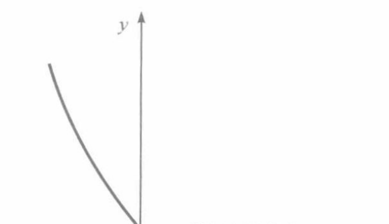

图 1-10

例如，函数 $y=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

又如，$y=x^2$ 在其定义域内不是单调函数，但在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

再如，余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内单调减少，而在区间 $(\pi,2\pi)$ 内单调增加.

3. 奇、偶函数

定义 1.2.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点 O 对称，如果对于 D 内任意一点 x，恒有

$$f(-x)=f(x)\quad (\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内为**偶函数(even function)**(或**奇函数(odd function)**).

如果点 (x_0,y_0) 在奇函数 $y=f(x)$ 的图像(图 1-11(a))上，即 $y_0=f(x_0)$，则

$$f(-x_0)=-f(x_0)=-y_0,$$

即 $(-x_0,-y_0)$ 也在奇函数 $y=f(x)$ 的图像上. 于是奇函数的图像关于原点对称.

同理可知，偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-11(b)).

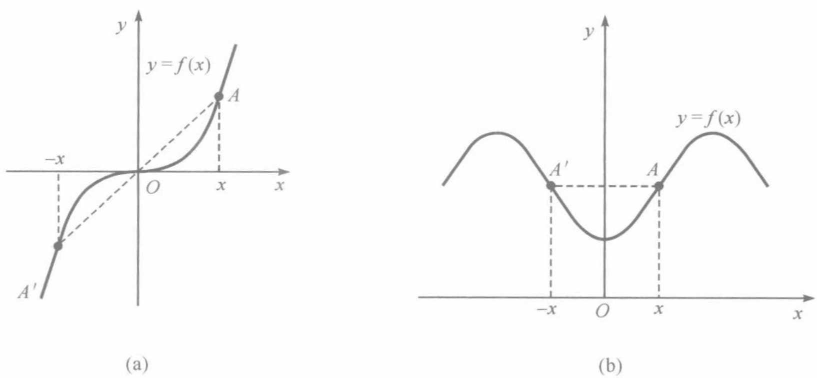

图 1-11

例如，函数 $y=x^2$，$y=\cos x$ 等在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数；而函数 $y=x^3$，$y=\sin x$ 等在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数. 注意 $y=0$ 既是奇函数也是偶函数.

例 1.2.7 证明 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

证明 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数.

例 1.2.8 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-a,a)$ ($a>0$)内的任意函数，证明：$F(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数；$G(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

证明 $F(x)$，$G(x)$ 的定义域是 $(-a,a)$，对任意 $x\in(-a,a)$，有

$$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x),$$

$$G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x),$$