

The background of the cover features a stylized illustration of a bridge. At the top, a series of arches and piers are depicted in a light orange color. At the bottom, a large, white arch of a bridge spans the width of the cover, with vertical lines representing the bridge's structure. The overall color scheme is a warm, textured orange.

结构理论 及在桥梁上的应用

中国建筑工业出版社

结构理论及在桥梁上的应用

张士铎 编著

中国建筑工业出版社

本书分两部分阐述：一是基本理论，二是在桥梁结构上的应用，总共十二章。在基本理论中介绍了矩形板、圆板、曲梁结构反应、有限差分法、有限元法及有限板条法。在桥梁结构中包括：正交板桥及悬臂行车道板的有效分布宽度的计算，拱的受力分析，以及平弯桥设计准则和近似计算方法等项。除作理论性的介绍外，还用具体计算示例，说明其计算步骤。

本书可供城市和公路桥梁设计技术人员及高等院校有关桥梁结构专业师生参考。

结构理论及在桥梁上的应用

张 士 铎 编著

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：9 $\frac{1}{4}$ 插页：1 字数：225千字

1981年3月第一版 1981年3月第一次印刷

印数：1—5,470册 定价：1.50元

统一书号：15040·3830

前 言

本书分两个部分，一是基本理论，二是在桥梁结构上的应用，总共十二章。在基本理论中介绍了矩形板、圆板、曲梁结构反应、有限差分法、有限元法及有限板条法。在桥梁结构中包括：正交板桥及悬臂行车道板的有效分布宽度的计算，拱的受力分析以及平弯桥设计准则和近似计算方法等项。在编著中，参考了若干最新的文献与著作，有一部分内容是作者在国内发表过的论文，经过有关同志论证修订的，本书可供城市和公路桥梁设计技术人员及高等院校桥梁结构专业师生教学参考。

限于作者水平，本书内容难免有不妥之处，希望读者提出批评指正。

同济大学 张士铎

1978.12.30

关于国际通用单位的说明

一、力:

$$1 \text{ kg} \cdot \text{f} = 9.8 \text{ N}$$

$$1 \text{ N} = 0.102 \text{ kg} \cdot \text{f}$$

($\text{kg} \cdot \text{f}$ = Kilogram force 公斤力)

(N = 牛顿)

二、力偶:

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m} = 9.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 0.102 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

($1000 \text{ N} \cdot \text{m} = 102 \text{ kg}$)

三、应力:

$$1 \text{ kg/cm}^2 = 0.098 \text{ M} \cdot \text{Pa}$$

$\text{M} \cdot \text{Pa} = 1 \text{e megapascal}$ 或 (N/mm^2)

$$1 \text{ M} \cdot \text{Pa} = 10.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$1 \text{ bar} = 0.1 \text{ MPa}, \quad 1 \text{ MPa} = 10 \text{ bars}$$

在本书中, 仍用 kg , $\text{kg} \cdot \text{m}$, kg/cm^2 如合成国际通用单位

$$1 \text{ kg} = 9.8 \text{ N}$$

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m} = 9.8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$1 \text{ kg/cm}^2 = 0.098 \text{ N/mm}^2$$

目 录

第一部分 基 本 理 论

第 一 章 弹性矩形板的基本理论	1
§ 1-1 基本假定	1
§ 1-2 座标与尺寸	2
§ 1-3 位移	2
§ 1-4 应变	3
§ 1-5 应力	5
§ 1-6 应力的合力	6
§ 1-7 板微分单元的平衡	8
§ 1-8 矩形板挠度的微分方程式	9
§ 1-9 边界条件	10
§ 1-10 角隅处的集中力	12
§ 1-11 小结	12
参考文献	14
第 二 章 圆板的基本理论	15
§ 2-1 座标与尺寸	15
§ 2-2 直座标 (亦称笛卡尔座标) 与极座标的换算关系式	15
§ 2-3 位移	16
§ 2-4 应变	17
§ 2-5 应力	18
§ 2-6 应力的合力	19
§ 2-7 圆板挠度的偏微分方程式	20
§ 2-8 边界条件	20
§ 2-9 小结	21
参考文献	22
第 三 章 曲梁的结构反应	23
§ 3-1 曲梁平衡方程的建立	23
§ 3-2 曲梁微分方程式的推导	27
§ 3-3 双力矩与边界条件	29
§ 3-4 曲梁的刚度矩阵	29
§ 3-5 圆拱的柔度矩阵及其应用	32
参考文献	35
第 四 章 有限差分法	36
§ 4-1 有限差分法的基本原理	36

§ 4-2	边界条件的差分表达式	38
§ 4-3	有限差分方程式	39
§ 4-4	用正方形网格的有限差分解工程实用问题	41
§ 4-5	差分的误差	45
§ 4-6	三角与六角网格的差分式	45
参考文献		47
第 五 章	有限元法在平板分析中的应用	48
§ 5-1	矩形单元计算步骤	48
§ 5-2	矩形薄板单元位移函数	56
§ 5-3	矩形薄板单元的荷载移置	57
§ 5-4	计算示例	60
参考文献		62
第 六 章	有限板条法	63
§ 6-1	概述	63
§ 6-2	推演过程	63
§ 6-3	基本函数 Y_m 的表达式	70
§ 6-4	简支板条	71
§ 6-5	计算示例	73
参考文献		76

第二部分 在桥梁结构上的应用

第 七 章	简支正交板桥荷载的有效分布宽度	77
§ 7-1	几种有效分布宽度公式的规定与存在的问题	77
§ 7-2	板桥中有效分布宽度 b 的试验与经验公式	79
§ 7-3	利用板的理论进行解析的结果	80
§ 7-4	几种板桥有效分布宽度的对比	83
参考文献		86
第 八 章	悬臂板有效分布宽度	87
§ 8-1	板的微分方程	87
§ 8-2	板的有限差分方程式	88
§ 8-3	差分方程式的解	94
参考文献		95
第 九 章	拱的受力分析	96
§ 9-1	无铰单跨拱有限元的分析法	96
§ 9-2	常截面连拱的受力分析	100
§ 9-3	计算示例	111
§ 9-4	变截面悬链线连拱的受力分析	113
参考文献		115
第 十 章	弯桥的解析准则	116
§ 10-1	基本微分方程的介绍	116
§ 10-2	应力的比值	117
§ 10-3	挠度的比值	118

§ 10-4 研究的参数	118
参考文献	120
第十一章 平弯曲板的近似计算	121
§ 11-1 在单位集中荷载 $P = 1$ 作用下, 简支曲梁截面内力公式的推导	121
§ 11-2 曲板的惯矩换算	122
§ 11-3 $G-M$ 法应用在各种不同桥梁体系中应乘以 α 系数	124
§ 11-4 利用直梁影响线应乘以修正系数	125
§ 11-5 计算示例	127
参考文献	131
第十二章 用力矩分配法解平弯圆弧形连续梁	132
§ 12-1 抗挠刚度、抗扭刚度及传递系数的推导	132
§ 12-2 均布荷载下的固端弯矩	137
§ 12-3 计算示例	139
参考文献	141

第一部分 基 本 理 论

第一章 弹性矩形板的基本理论

弹性矩形板的基本理论，是分析桥梁结构的工具，因此，必须熟练掌握。本章乃是先介绍应力应变的关系，从而推导挠度的微分方程，并包括对边界条件的处理以及角隅的集中力的探讨。

§ 1-1 基 本 假 定

承受竖向荷载的平板，中面上小挠度的微分方程式，可以用不同的方式来推导。一般方法，是应用三维弹性力学，其中忽略不重要的项（当板厚相对于其他尺寸是比较小的情况）。此外，还有另一种方法，虽可少用数学工具，但基本上则是应用梁的假设来推导出平板的微分方程。不过，所述的两种方法异途同归。为了比较容易为初学者所接受，本书采用第二种方法进行推导。进行第二种方法推演需要采用下列四个基本假定：

1. 当平板弯曲时，板的中面保持不变形，此不变形的面称为中性面；
2. 变形前垂直于中面的面，变形后仍然垂直于同样的面。如同在简支梁的理论中一样，这个假定不包括横向剪应力且认为是零。这是说横向剪应力如此之小，其结果引起横向截面的任何歪扭，对位移的影响可以忽略不计，但应该充分认识到保持平面的假定，在一个边缘的区间，如对薄板而言，将导致不足信的结果，例如，在角隅或孔洞附近，特别是当孔洞的直径与板厚属于同一级的量时；
3. 板在横向的法向应力与其他方向的应力相比较很小，故可以忽略。这个假定对薄板则不可靠，甚至平板对于在高度集中的横向荷载附近，同样也不可靠；
4. 平板的材料是匀质的，各向同性的，连续的，而且呈线弹性。这个假定乃是理想的材料特性，并允许应用两个弹性模量来表示应力与应变的关系。

大挠度必然引起中性面产生过分的应变，这就直接违反了第一个假定。不过，特殊情况，则是当板的中面可以弯成一个可展开的平面时，这个面如沿一个平面卷起来，将不改变面上两点的距离，例如锥体的表面与圆柱体的表面。假定中性面是一个可展的面，则在大挠度的情况下将无应变产生。大挠度导致的非线性方程式则难于求解。故当板的厚度比较大，由于第2、3两个假定的不适用，则需要借助更广泛的理论来求得解答。

关于平板的“薄”与“小”的准确定义，对具体问题要做具体分析。利用平板的小挠度理论以及更精确的理论，可以进行比较，但是定出一个精确的定义，并不现实。实践证明，这里阐述的基本假定，乃是推导平板微分方程的可靠基础。一般说来，即是认作当板的最大挠度与板厚相等，而且板的厚度达到其他尺寸（长度、宽度或直径）的5%左右。以上的说法，仅是给读者一个“薄”而“小”的概念，但绝不能做为硬性解释的准则。

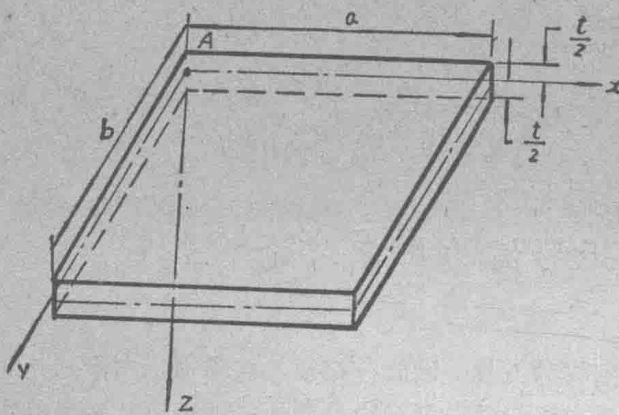


图 1-1 矩形板的坐标及尺寸

根据上述的四个假定，即可推导受荷情况下中性面挠度的微分方程。下面介绍推演的全部过程。

§ 1-2 坐标与尺寸

取A点为 x, y 坐标原点，如图1-1所示， Z 轴垂直于板的平面。

在平板上任一点距中性面的距离用 z 表示，但不要与 Z 轴弄混，更不要与挠度 ω 混淆，如图1-2所示。

板段变形前与变形后的情况如图1-2所示， z 的极端情况为 $\pm t/2$ 。

§ 1-3 位移

沿 x, y, z 轴的位移分别为 u, v 及 ω ，在竖向荷载作用下中性面变成曲面，用下列方程式描述其挠度，

$$\omega = f(x, y)$$

式中 ω 表示沿 Z 轴向下的挠度，如图1-2所示。

距中性面 z 距离任一点在 x 与 y 方向的位移，分别用 u 及 v 表示。这些位移如图1-3所示，它表示出中性面变形前与变形后位置的改变。注意：变形前垂直于中面的面，变形后仍然垂直于同样的面，这符合于基本假定2。但是，因为存在横向剪应变的可能性，虽然与其他应变相比是比较小的，故变形前垂直于中性面的面，实际上在变形后并不再垂直于中性面，因而，从垂直位置歪扭一个小的角度，称为横向剪应变，如图1-3中虚线所示。附加位移沿 u, v 方向用 U_s 及 V_s 表示，不过，目前，均忽略其影响。

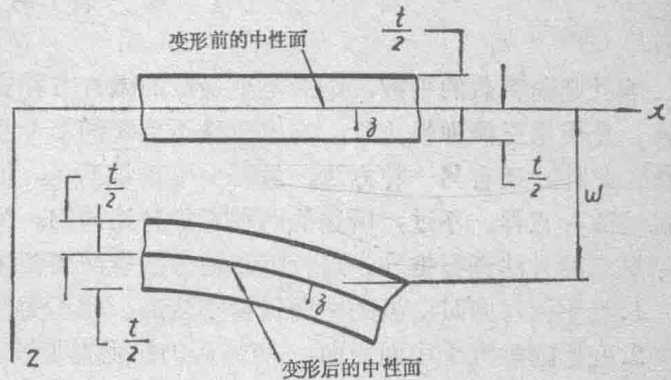


图 1-2 板的横截面在 $X-Z$ 平面上的投影，其中表示 ω, z 与 Z

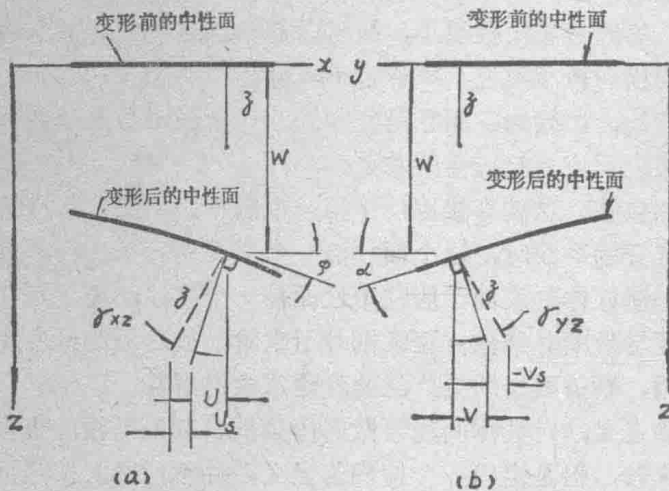


图 1-3 在平板中性面上任意一点 z 距离的位移
a—在 x 方向的位移 u ，由于 γ_{xz} 引起的 U_s 忽略不计；
b—在 y 方向的位移 v ，由于 γ_{yz} 引起的 V_s 忽略不计

位移 u 及 v 用中性面的挠度 ω 表示，从三角关系得到：

$$u = -z \sin \varphi$$

$$v = -z \sin \alpha$$

由于挠度是微量，故

$$\sin \varphi = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \sin \alpha = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (1-1)$$

因此，位移表达式为

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

必须提及，在中性面上 $z=0$ ，故位移 u 及 v 均为零，这符合于基本假定 1。

§ 1-4 应 变

在离中性面一个竖直距离 z 点上，沿 x 与 y 方向的垂直应变 ε_x 、 ε_y 及相应的剪应变 γ_{xy} ，可以用中性面的挠度 ω 来表示。这些表达式的推导根据平面假定出发，如图 1-4 所示在 X - Z 平面内弯曲前与弯曲后的变位几何关系

$$ds_x = \rho_x d\varphi_x \quad ds'_x = (\rho_x - z) d\varphi_x$$

离中性面距离 z 沿 x 方向的应变表达式为

$$\varepsilon_x = -\frac{ds_x - ds'_x}{ds_x} = -z \frac{d\varphi_x}{ds_x} = \frac{-z}{\rho_x} \quad (1-3)$$

在没有得到 ε_x 用中性面挠度 ω 表达之前，先考查一下曲率半径 ρ_x 的表达式如何与中性面挠度产生关系，如图 1-5 所示，是挠曲后的中性面在 X - Z 平面上的投影。

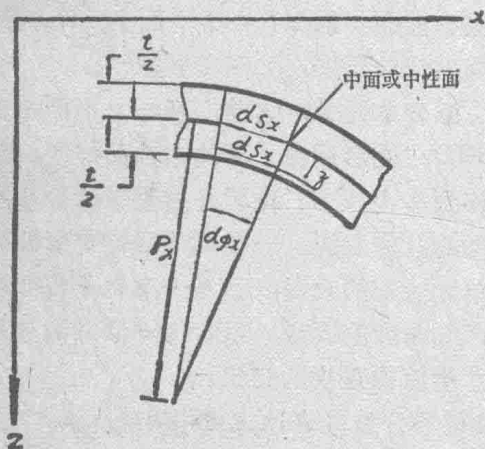


图 1-4 在 X - Z 平面上板弯曲后的曲面

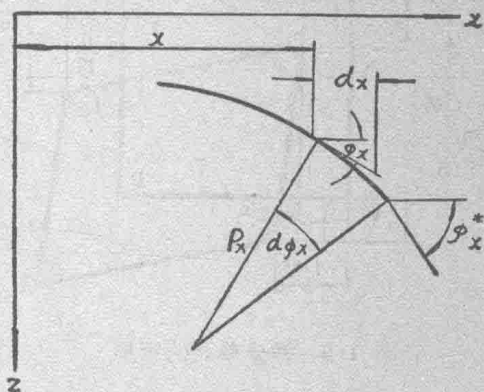


图 1-5 中性面在 X - Z 平面上的投影及曲率半径 ρ_x

假如挠度 $\omega(x, y)$ 是小的，

$$ds_x \approx dx$$

$$\varphi_s = \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\varphi_s^* = \varphi_s + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} dx = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx$$

$$d\varphi_s = \varphi_s^* - \varphi_s = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dx$$

即

$$\frac{d\varphi_s}{dx} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

在 $x+dx$ 处中性面的倾角表达式，可展成 x 的泰勒级数，因为 dx 是微量，故高阶微量可略去不计。

从几何关系，得到

$$\begin{aligned} ds_s &= \rho_s d\varphi_s \\ \frac{1}{\rho_s} &= \frac{d\varphi_s}{ds_s} = \frac{d\varphi_s}{dx} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1-4a)$$

同理得到

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (1-4b)$$

将 (1-4a) 式代入 (1-3) 中，并将 x 方向的应变用中性面的挠度 ω 来表示，得到

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (1-5a)$$

同理，

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (1-5b)$$

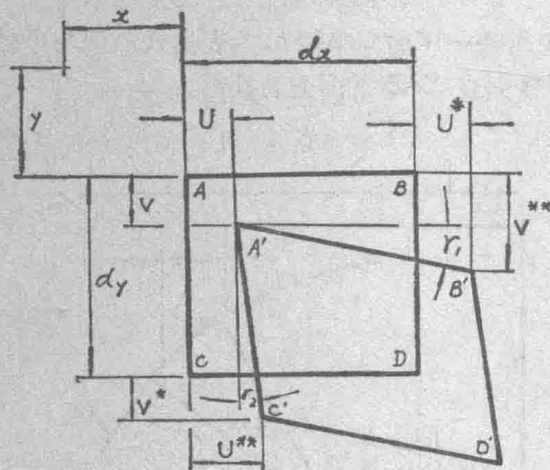


图 1-6 微分单元的变形

由于基本假定了，说明法向应力 σ_z 可以忽略不计。在下节中将要证明， ε_z 可以用 ε_x 及 ε_y 表示。

为的是得到相应的剪应变表达式，考虑距中性面 z 距离在 x - y 平面上一个矩形板的微分单元体，如图 1-6 所示。

微分单元变形之前，在 x - y 平面内为 $ABCD$ ，变形后由于板的中性面挠度，单元移到 $A'B'C'D'$ 位置。这里有两种基本类型的几何变形。一是属于线性变形即微分单元边长的改变，另外一类属于角变位即已知角度的改变。在 x - y 平面内微分单元产生值得重视的变化。

在 B 点 $(x+dx, y)$ 及 C 点 $(x, y+dy)$ ，线性位移分量的表达式可用 A 点 (x, y) 位移分量展开成泰勒级数求得，因为 dx, dy 均属微量，二阶微分量可以忽略不计，故有

$$U^* = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$$

$$V^* = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$U^{**}=u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$V^{**}=v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

剪应变可以定义为已知角度的角变位。从图 1-6 中看出 $\angle CAB$ 变成 $\angle C'A'B'$ ，角的变位是 $\gamma_1 + \gamma_2$ ，故剪应变为

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2$$

对小的变形：

$$\gamma_1 = \frac{V^{**} - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_2 = \frac{U^{**} - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{故剪应变表达式} \quad \gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-6)$$

将 (1-2) 式代入 (1-6) 中，得到用中性面挠度 ω 表示剪应变的公式，

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (1-7a)$$

应变的表达式如 (1-5) 所示，可从图 1-6 中得到，从垂直应变的定义知道

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{U^* - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (1-7b)$$

$$\varepsilon_y = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{V^* - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (1-7c)$$

在广义平板理论中需要用到 γ_{xz} 及 γ_{yz} ，在两维问题中不会用到。

如果将 (1-7) 式写成矩阵表达式为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}$$

简化写法为 $\{\varepsilon\} = z \{\chi\}$

式中 $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ 代表板的曲率。

§ 1-5 应 力

在这里提到的应力应变关系，可用两个独立的常数，即弹性模量 E 及波桑比 ν 来表示。这些关系式的推导，乃是基于材料特性的理想化。按照第一章 § 1-1 所述的第四个基本假定，平板的材料是属于均质，各向同性，连续而且呈现线弹性，则应力与应变有下列关系：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z) \quad (1-8a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) \quad (1-8b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z) \quad (1-8c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad (1-8d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \quad (1-8e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \quad (1-8f)$$

根据基本假定3, 在板的横向法向应力 σ_z 与其他方向的应力相比是较小的, 故从(1-8)式, 令 $\sigma_z=0$, 解 σ_x , σ_y 为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (1-9a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (1-9b)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ 忽略不计}$$

或者
$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{E}{\nu}\varepsilon_z \quad (1-9c)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad (1-9d)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz} \quad (1-9e)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \quad (1-9f)$$

将 $\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, $\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, $\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$ 代入(1-9a), (1-9b)及(1-9d)中, 得到应力的表达式如下:

$$\sigma_x = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1-10a)$$

$$\sigma_y = -z \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1-10b)$$

$$\tau_{xy} = -z \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (1-10c)$$

§ 1-6 应力的合力

在上节中, 研究了板的应力状态并用中性面的挠度来表示。正向的应力可用矩形单元上, 应力层上力的作用方向来表示。为清楚起见, 分别用六个图示来代表 σ_x , σ_y , τ_{xz} , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xy} 如图1-7。

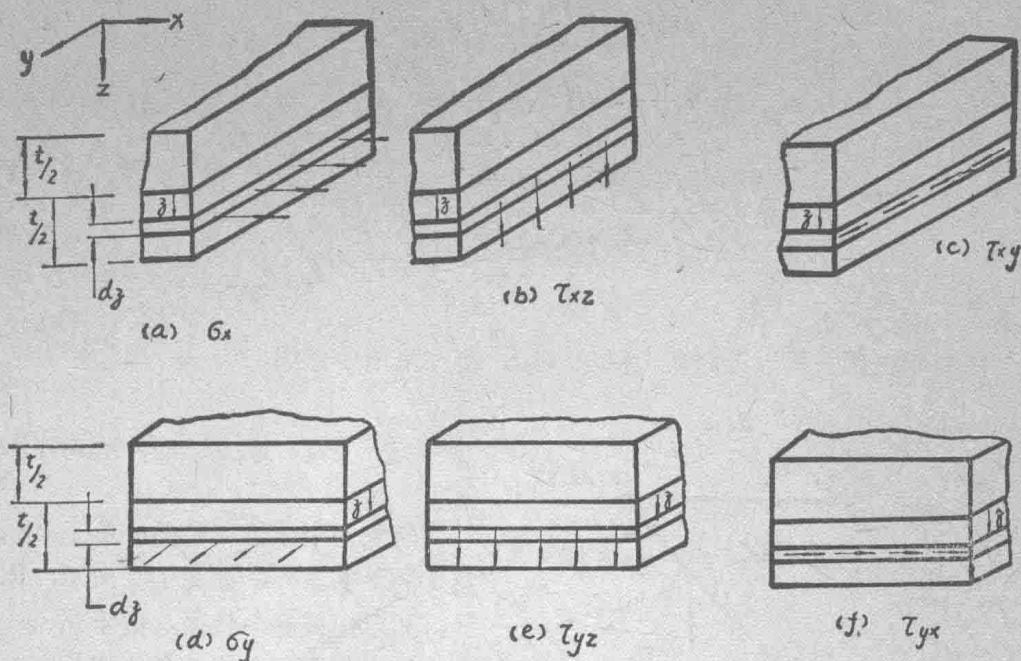


图 1-7 正方向的应力状态

在微分单元的横截面上，应力分布可以合成为在 x ， y 方向单位长度的力矩与力。这些力矩与力称为应力的合力，其正方向如图 1-8 所示。

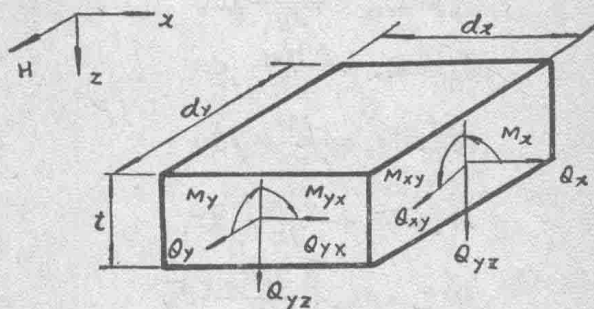


图 1-8 正方向的应力合力

因此，从定义出发，其应力的合力可以写成：

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz, & M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz, & M_{xy} &= M_{yx} = - \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz \\
 Q_{xy} &= Q_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz, & Q_{xz} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, & Q_{yz} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz, \\
 Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, & Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz
 \end{aligned}$$

将以上这些应力的合力表达式，进行积分并代入(1-10)中去得到

$$M_x = -N \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1-11a)$$

$$M_y = -N \left(\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1-11b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = N(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (1-11c)$$

$$Q_x = Q_y = Q_{xy} = Q_{yx} = 0 \quad (1-11d)$$

式中 $N = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

从平衡条件出发去推导横向剪力 Q_{xz} 及 Q_{yz} ，将在下节中介绍。

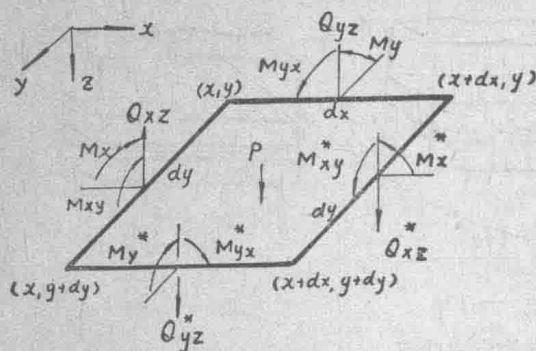


图 1-9 矩形板的微分单元及应力合力

§ 1-7 板微分单元的平衡

研究一个矩形板的微分单元 dx, dy 及 t 的平衡条件，如图 1-9 所示，为简化计，只示出板的中性面，由于 $P(x, y)$ 的作用，应力的合力（指单位长度上的内力）作用在板的边缘上。

在横截面 $(x+dx, y)$ 及 $(x, y+dy)$ 上应力合力表达式可用 (x, y) 处的

的应力合力通过泰勒级数展开，并忽略高阶微分得到

$$Q_{yz}^* = Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \cdot dy$$

$$Q_{xz}^* = Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \cdot dx$$

$$M_y^* = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy$$

$$M_x^* = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot dx$$

$$M_{yx}^* = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \cdot dy$$

$$M_{xy}^* = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx$$

从 $\Sigma F_z = 0$ ，得到

$$-Q_{xz} dy - Q_{yz} dx + Q_{yz}^* dx + Q_{xz}^* dy + P dx \cdot dy = 0$$

或 $-Q_{xz} dy - Q_{yz} dx + \left(Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} dy \right) dx + \left(Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} dx \right) dy + P dx dy = 0$

得到

$$\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + P = 0 \quad (1-12a)$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$M_y dx + M_{xy}^* - M_y^* dy - M_{xy} dy + Q_{yz}^* dy dx + Q_{xz}^* \frac{dy}{2} dy - Q_{xz} dy \frac{dy}{2} = 0$$

将 M_{xy}^* , M_y^* , Q_{yz}^* 及 Q_{xz}^* 代入后, 将高阶微分舍去, 则为

$$\begin{aligned} M_y dx + M_{xy} dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - M_y dx - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - M_{xy} dy \\ + Q_{yz} dy dx + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} dy dy dx + Q_{xz} \frac{dy}{2} \frac{dy}{2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \\ \times dx dy \frac{dy}{2} - Q_{xz} \cdot dy \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

消去后, 得到

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = 0 \quad (1-12b)$$

同理, $\Sigma M_y = 0$, 舍去高阶微分, 并简化后得到

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = 0 \quad (1-12c)$$

将 (1-12b) 取 y 的偏导, 从 (1-12c) 取 x 的偏导, 然后均代入 (1-12a) 中去, 最后得到

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P \quad (1-13)$$

如果将 (1-11a), (1-11b) 及 (1-11c) 代入 (1-12b) 及 (1-12c) 中, 则得到 Q_{xz} 及 Q_{yz} 用中面挠度 ω 的表达式,

$$Q_{xz} = -N \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) = -N \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \omega) \quad (1-14a)$$

$$Q_{yz} = -N \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right) = -N \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \omega) \quad (1-14b)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为拉普拉斯算子。

§ 1-8 矩形板挠度的微分方程式

为得到矩形板小挠度的微分方程式, 将 (1-11a), (1-11b) 及 (1-11c) 分别代入 (1-13) 中, 其结果得到

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{P}{N} \quad (1-15a)$$

或简写为

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega = \frac{P}{N}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1-15b)$$

有时应用差分法求解, 可将 (1-15a) 式改写为

$$M_x + M_y = -N(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

或为

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{M_x + M_y}{N(1+\nu)}$$