数学智慧树

青少年智慧树丛书
QINGSHAONIAN ZHIHUISHU CONGSHU

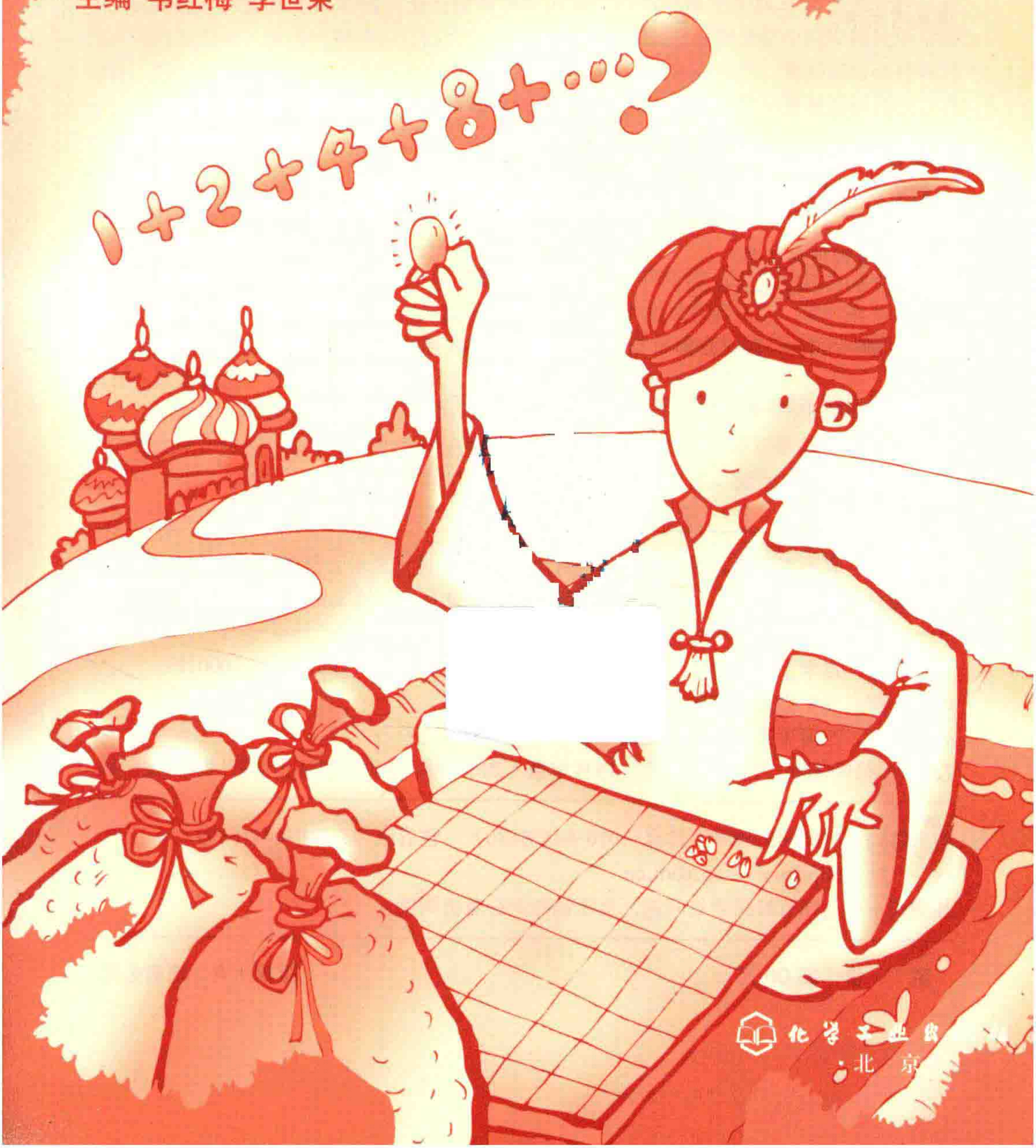
主编 韦红梅 李世荣

化学工业出版社

青少年智慧树丛书
QINGSHAONIAN ZHIHUISHU CONGSHU

数学智慧树

主编 韦红梅 李世荣



化学工业出版社
·北京

本书是一本围绕初中数学课程中的重点和难点展开的书。从数学的基本知识点入手，分四个部分编写，内容包括：数与代数，介绍代数的定理和公式的重要性，体现数学的实用性；空间与图形，介绍几何在生活中的应用；统计与概率，介绍统计与概率的综合应用；趣味数学，介绍数学的趣味性，让你在轻松愉快中学到知识。本书让数学在生活、学习和实践中活灵活现地展现出来，使青少年读者能切实领略体验数学源于生活、用于生活的真谛。

本书语言生动形象，通俗易懂，图文并茂。在每一部分前面都配有该部分内容的知识框架及框架介绍，引导青少年读者逐步进入数学的神圣殿堂。

本书适用于初中学生和小学高年级及对数学爱好者作为参考用书，也可作为数学课程的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

数学智慧树 / 韦红梅，李世荣主编.—北京：化学工业出版社，2007.7

（青少年智慧树丛书）

ISBN 978-7-5025-9378-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①韦…②李… Ⅲ. 数学-青少年读物 Ⅳ. 01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第096708号

责任编辑：郭燕春　肖志明　　　封面设计：3A设计艺术工作室
责任校对：徐贞珍　　　　　　　版式设计：北京水长流文化发展有限公司

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京彩云龙印刷有限公司
装　　订：三河市万龙印装有限公司
720mm×1000mm　1/16　印张　15½ 字数　296 千字　2007年7月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00 元

前　言

长久以来，数学被誉为“科学皇后”，从人类社会发展的最初阶段至科学技术飞速发展的今天，数学都体现着它特有的魅力。无论是在科技领域还是在人们日常的生活中，它无处不在，一直担当着举足轻重的角色。根据国家教育部中学生最新课程标准，我们编写了《数学智慧树》一书，本书为《青少年智慧树丛书》的数学分册。

本书介绍了一些形形色色的数学趣题、精彩的数学游戏和各种各样的动手操作题，读者可亲自体会到用数学知识去解决实际问题时所产生的成功感和喜悦感。

除此之外，读者还能学到大量与课本有关的知识，本书前三个部分分别为分数与代数、空间与图形、统计与概率，它们均与新课标相结合，讲述的都是整个初中阶段所学的内容，但又不同于课本里所讲的内容，大大地提高了趣味性和科学性。第四部分是趣味部分，它讲述数学中蕴含的无穷乐趣。让读者从大自然中发现数学规律，并且会应用它，这才是本书最终所要达到的目的。

本书主要有以下特点。

⑴科学性。紧扣教材并高于教材。本书的知识点均参照初中新课标各科考试大纲，并补充了大量的课外知识。

⑵新颖性。本书选择了一些与课本知识相关联、反映中国和世界科技方面的最新成果，以此来开拓学生的视野、扩大信息量，培养学生对未来世界的认知、适应能力。

⑶趣味性。本书图文并茂，并在大部分知识点里穿插有动手实验、小制作及做游戏等内容，让读者在轻松愉快中进入一个充满未知、乐趣无穷的知识世界。

⑷综合性。本书强调学科之间的内在联系、知识与社会的联系、学生与知识的联系等。

现在就让我们一起来品尝生活中的数学、科学中的数学和游戏中的数学吧！

本书由韦红梅、李世荣主编，参与本书编写的还有梁金辉、梁圣一、谭桦友、牙韩色、曾凡彬、韦善等，均为具有多年一线教学经验的老师。

由于作者水平有限，本书难免有不足之处，欢迎广大读者对本书提出建议，可直接到http://www.zhwbook.com“新书答疑”专栏与作者进行交流。

编者
2007年5月

目录

第一部分 数与代数

第二部分 空间与图形

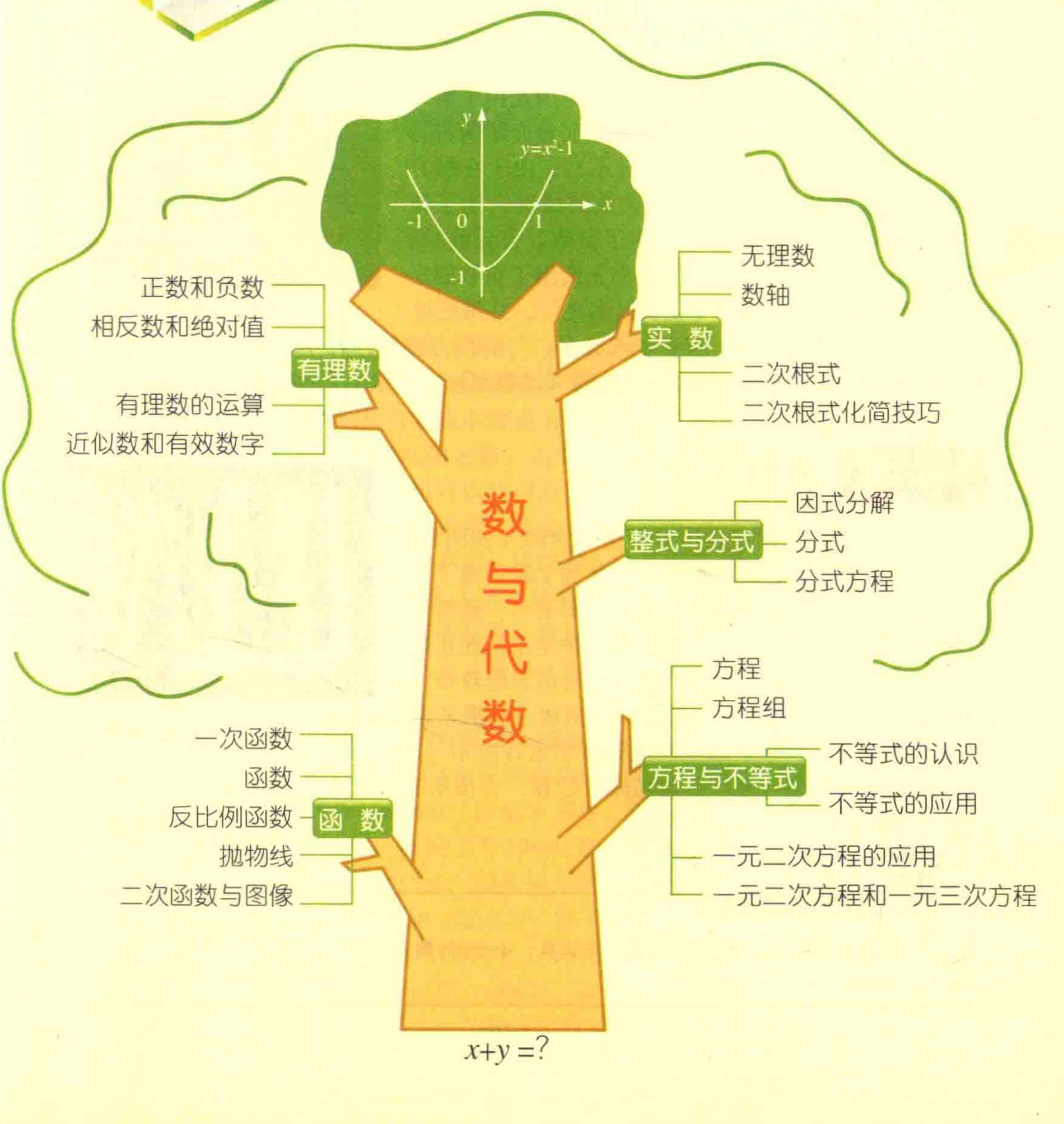
第三部分　统计与概率

第四部分　趣味数学

第一部分

数与代数

这部分内容主要介绍的是代数方面的内容，包括从整数过渡到实数、整式和分式、方程和方程组、不等式和不等式组、一次函数和二次函数及它们的函数图像。也举了许多生活中的例子、游戏、故事、数学趣题，充分说明定理和公式的重要性，体现出数学的实用性。



1 正数和负数

正数、负数的起源

中国是世界上最先使用负数的国家。战国时期李悝（约公元前455—公元前395）在《法经》中已出现使用负数的实例："衣五人终岁用二千五百不足四百五十。"在甘肃居延出土的汉简中出现了大量的"负算"，如"相除以负一百二十四算"、"负二千二百四十五算"、"负四算，得七算，相除得三算"。以负与得相比较，表示缺少，亏空之意，显然是来自生活实践的需要。

图1-1 九章算术

从历史上看，负数产生的另一个原因是由于解方程的需要。据世界上第一部关于负数完整介绍的古算书《九章算术》记载（如图1-1所示），由于在解方程组的时候常常会碰到小数减大数的情况，为了使方程组能够解下去，数学家发明了负数。公元前3世纪，刘徽在注解《九章算术》时率先给出了负数的定义："两算得失相反，要令正负以名之"，并辩证地阐明："言负者未必少，言正者未必多。"而西方直到1572年，意大利数学家邦贝利（R.Bombelli，1526—1572）在他的《代数学》中才给出了负数的明确定义。

算 筹

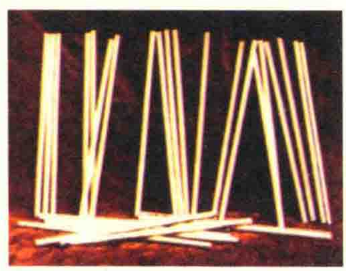


图1-2 算筹

由于我国古代数字是用算筹摆出来的（如图1-2所示），为了区分正数和负数，古代数学家创造了两种方法：一种是用不同颜色的算筹分别表示，通常用红筹表示正数，黑筹表示负数；另一种是采取在正数上面斜放一支筹来表示负数。因为后者的思想较新，很快发展为在数的最前面一位数码上斜放一小横来表示负数。1629年，颇具远见的法国数学家吉拉尔（A.Girard，1595—1632）在《代数新发现》中用减号表示负数和减法运算，吉拉尔的负数符号得到人们的公认，一直沿用至今。

敞开数学大门

正数、负数的概念：大于0的数是正数，小于0的数是负数，0既不是正数也不是负数，它表示正数和负数的分界。

正数、负数的应用

正数和负数是根据实际需要而产生的，随着知识面的拓宽，我们以前学过的自然数、分数和小数已不能满足实际需要，如一些具有相反意义的量，收入200元和支出100元，6°C和零下10°C等（如图1-3所示）。它们不但意义相反，而且表示一定的数量。怎么表示它们呢？我们把一种意义规定为正的，把另一种和它意义相反的量规定为负的，这样就产生了正数和负数。

图1-3　零下10°C

如$\frac{1}{21}$、35等都是正数。在正数前面加上“－”（读作负）号的数叫做负数。如$-\frac{1}{21}$、－35等都是负数。

认 识

为了实际生活需要，在数物体个数时，1、2、3……出现了自然数，没有物体时，用自然数0表示；当测量或计算有时不能得出整数时，我们用分数或小数表示。一物体沿东西两个相反的方向运动时，可以用正数、负数表示它的运动。还有哪些具有相反意义的，也可以分别用正数、负数来表示的实例呢？如高于海平面的地方用正数表示它的高度，低于海平面的地方用负数表示它的高度；进球和失球可用正数、负数表示；转进和转出的学生人数可用正数、负数表示；赚钱与赔钱可用正数、负数来表示等。我们的生活中处处有数学，正是“数学来源于生活，又服务于生活”的最好体现。那让我们一起去认识它吧！

图1-4　海拔高度

高于海平面1999m的地方表示为海拔＋1999m（如图1-4所示）；而太平洋中的马里亚纳海沟深达11034m，可记作海拔－11034m（即低于海平面11034m，如图1-5所示）。如果上升20m记作＋20m，那么下降15m记作－15m；如果运进货物8.5t记作＋8.5t，那么－6.5t表示运出6.5t；零下3.5°C表示为－3.5°C；如果盈利1000元，记作＋1000元，那么亏损200元就可记作－200元；如果把公元2000年记作＋2000，那么－2000表示公元前2000年。

图1-5　马里亚纳海沟深达11034m

应 用

某产品说明书中有这么一句话：“长度：（30±0.1）cm”。这说明，产品的标准长度是30cm，允许有0.1cm的误差，其中+0.1表示最多比标准长度长0.1cm；而−0.1则表示最多比标准长度短0.1cm。如果以中午为“基准”，中午以后的时间规定为正的，那么，午后3小时、午前2小时以及中午各应怎么表示？午后3小时记作+3时；午前2小时记作−2时；中午记作0时。如果将向东的方向规定为正，那么走+5m、−7m、0m各表示什么意义？走+5m表示向东走5m，走−7m表示向西走7m，走0m表示仍在原地，如图1-6所示。

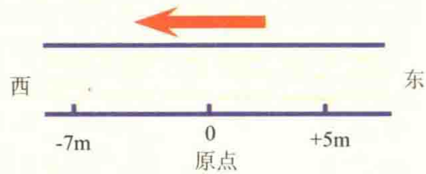


图1-6　正数、负数的应用

想一想　在生活中，你还发现什么事物用正数、负数来表示？

刘徽（生于公元250年左右），是中国数学史上一个非常伟大的数学家，在世界数学史上也占有突出的地位。他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》是我国最宝贵的数学遗产。《九章算术注》约成书于东汉之初，共有246个问题的解法。在许多方面，如解联立方程、分数四则运算、正负数的运算、几何图形的体积面积计算等，都属于世界先进之列。在《海岛算经》一书中，刘徽精心选编了9个测量问题，这些题目的创造性、复杂性和富有代表性都在当时为西方所瞩目。

刘徽的一生刻苦研究数学。他虽然地位低下，但人格高尚。他不是沽名钓誉的庸人，而是学而不厌的伟人，他给我们中华民族留下了宝贵的财富。

敞开数学大门

海拔：以海平面为起点，测出地面某个地点高出或低于海平面的垂直距离。由于地球内部质量的不均匀，因而世界各国有各自确立的平均海平面，即大地水准面。我国将青岛验潮站多年观测的黄海平均海平面确定为我国使用的大地水准面，以此作为我国的高程起算零点。

2 相反数和绝对值

相反数的定义

几何定义

在数轴上原点的两旁离开原点距离相等的两个点所表示的数叫做互为相反数。如图2-1所示，4与-4互为相反数，1.2与-1.2互为相反数。

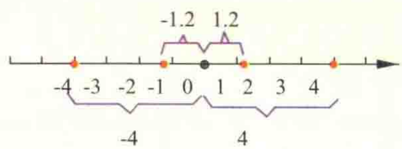


图2-1　相反数在数轴上的表示

在数轴上表示互为相反数的两点位于原点的两侧，并且与原点的距离相等。

代数定义

只有符号不同的两个数，我们说其中一个数是另一个数的相反数，也称这两个数互为相反数。特别要注意0的相反数是0。

注意

(1) “0的相反数是0”是相反数定义的一部分，千万不能把它漏掉。

(2) 相反数是成对出现的，不能单独存在。如-3和$+3$互为相反数，-3是$+3$的相反数，$+3$是-3的相反数，单独的一个数不能说是相反数。

(3) “只有符号不同的两个数”中的“只有”指的是除了符号不同以外其他完全相同（也就是绝对值相等），不能理解为只要符号不同的两个数就互为相反数，如-2和$+3$，符号不同，但它们不是互为相反数。

表示方法

一般地，数a的相反数是$-a$。这里a表示任意的一个数，可以是正数、负数或者0，a还可以代表任意一个代数式。如(1) 当$a=7$时，$-a=-7$，7的相反数是-7；(2) 当$a=-5$时，$-a=-(-5)=5$，-5的相反数是5；(3)当$a=0$时，$-a=0$，0的相反数是0。

由以上例题可以看出：

当$a>0$时，$-a<0$（正数的相反数是负数）；当$a<0$时，$-a>0$（负数的相反数是正数）；当$a=0$时，$-a=0$（0的相反数是0）；

当$a=x+y$时，$-a=-(x+y)$，也就是说$(x+y)$的相反数是$-(x+y)$。“数a的相反数是$-a$”这句话的含义就是说，要表示一个数的相反数，只要在这个数的前面添上一个“$-$”号就可以了。

注意

(1) 表示“和”或“差”形式的代数式的相反数时，要先给代数式加上括号后，再在括号前面添上一个“－”号。

(2) 因为a可以表示任意有理数，所以$-a$不一定是负数。

数形结合

若$a<0<c$，$ab>0$，$|b|>|c|>|a|$，化简$|a+c|+|b+c|-|a-b|$。

分析这个题目的关键是确定$a+c$、$b+c$、$a-b$的符号，根据已知条件可在数轴上标出a、b、c的大致位置，如图2-2所示。

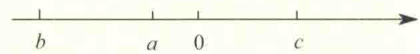


图2-2 a、b、c的大致位置

很容易确定$a+c>0$，$b+c<0$，$a-b>0$，由绝对值的概念：

原式$=(a+c)-(b+c)-(a-b)=a+c-b-c-a+b=0$。

用数轴上的点来表示有理数，用这样的点与原点的距离来表示有理数的绝对值，就是我们常说的数形结合。

分类解题

5个有理数a、b、c、d、e满足$|abcde|=-abcde$，

试求：$S=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}+\dfrac{|d|}{d}+\dfrac{|e|}{e}$的最大值。

由$abcde<0$，而a、b、c、d、e满足$abcde<0$仅有3种情况：①二正三负；②四正一负；③五负。又因为对于任意非零有理数a，则有：

$$\frac{|a|}{a}=\begin{cases}1 & (a>0)\\ -1 & (a<0)\end{cases}$$

故S最大值是在四正一负时取得，即S最大值为$4-1=3$。

敞开数学大门

绝对值的性质

(1) 有理数的绝对值是一个非负数，即$|a|\geqslant 0$，绝对值最小的数是零；

(2) 任何有理数都有惟一的绝对值，并且任何一个有理数都不大于它的绝对值，即$a\leqslant|a|$；

(3) 已知一个数的绝对值，那么它所对应的是两个互为相反数的数；

(4) 若两个数的绝对值相等，则这两个数不一定相等（如$|6|=|-6|$，但$6\neq-6$），只有这两个数同号，且这两个数的绝对值相等时，这两个数才相等。

3 有理数的运算

运算发展史

运算从古至今已发展了数千年，要谈运算的发展，就必须从运算工具的发展谈起。从结绳记数、筹算到算盘、电子计算机的出现，都见证了运算的发展。

古代数学的萌芽——运算的形成

人类初期的运算主要以记数为主。最早用来记数的工具是人的四肢（包括手、脚、手指、脚趾）或身边的石子、绳子、贝壳等。

古人不仅用结绳记数，而且还用石子等其他工具来记数。如他们饲养的羊，早上放牧到草地上，晚上必须圈到羊圈里。早上放牧时，从羊圈里出来一只，就往罐子里放一枚石子；到了傍晚，羊回到羊圈里，进去一只就从罐子里拿出来一枚小石子。如果石子全部拿光了，就说明羊全部进圈了；如果还有石子，就说明有羊丢失了，就要去找寻。此外，比结绳记数稍晚一些，古代的先祖又发明了契刻记数的方法，即在骨片、木片或竹片上用刀刻上口子，以此来表示数目的多少。

古代数学的发展——运算的发展

算筹是我国古代广泛应用的一种运算工具。“筹”实际上是小竹签，它又被称为算筹、算子（如图3-1所示），在中国历史上曾经使用了几千年之久，直到明代以后被算盘（如图3-2所示）所替代，算筹才退出历史舞台。由于明代珠算非常流行，所以当时出版了很多有关珠算的书籍。其中影响最大、流传最广的珠算书，当数程大位的《算法统宗》。程大位是明代最重要的数学家之一，他自幼博览群书，20年后在长江中下游一带经商，同时不断地研究数学。他遍访名师，广搜算经，经多年的积累与编写，终于在他60岁时完成了杰作《算法统宗》。此书出版后，很快就风行海内并传入日本。当时凡研究算法者，几乎每人手持一册。直到清朝末年，各地出版的珠算书不是它的翻刻本，就是它的改编本，其流传之广泛、长久在中国数学史上是罕见的。从15世纪开始，我国的算盘逐渐传入日本、朝鲜、越南、泰国等国家，对这些国家的数学的发展产生了重要的影响。

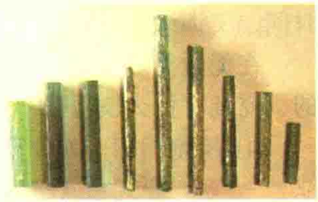


图3-1　筹

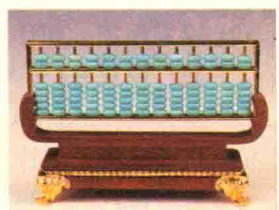


图3-2　算盘

运算的腾飞——电子计算机的发展

1946年2月14日，标志计算机诞生的ENIAC（Electronic Numerical Integrator and

Computer）在费城公诸于世。ENIAC代表了计算机发展史上的里程碑，它通过不同部分之间的重新接线编程，还拥有计算能力。

目前正在研究的智能计算机具有类似人的思维能力，能“说、看、听、想、做”；能代替人的一些体力劳动和脑力劳动。不久的将来还会出现速度更快、功能更强、更接近于人脑的光子计算机和生物计算机。总而言之，现代计算机的发展正朝着巨型化、微型化的方向发展，计算机的传输和应用正朝着网络化、智能化的方向发展，并越来越广泛地应用在我们的工作、生活和学习中，对社会和生活产生不可估量的影响（如图3-3所示）。

图3-3　计算机

运算技巧

先举个例子，求1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋…＋98＋99＋100，或许大家会认为太简单，谁都知道这是数学王子高斯小时候用特别的方法使老师大吃一惊的小故事，不过在此提出来是想告诉大家：有时用巧妙的方法做题是十分方便的，既节省时间，又训练了逻辑方式。

在无边无际的题海中，做完所有的题不太实际，掌握一些计算技巧是十分必要的，究竟有什么技巧呢?

(1) 凑整相加，如计算：$-51-23+47+17-16+36$

解： 原式＝$(-51-23-16)+(47+17+36)=-90+100=10$

可以看出个位$1+3+6=10$，$7+7+6=20$，将其分别计算，不易出错。

(2) 凑零相加，如计算：$1+2-3-4+5+6-7-8+9+\cdots+1997+1998-1999$

解： 原式$=1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(1998-1999)$

$=1+0+0+\cdots+(-1)=0$

(3) 化整分拆，如计算：$99999\times22222\times33333\times33334$

解： 原式$=33333\times(3\times22222)+33333\times33334$

$=33333\times(66666+33334)$

$=3333300000$

“±1”的妙用

桌上放7只茶杯，杯口全部朝上，每次翻转其中的4只，能否经过若干次翻转，把它们翻成杯口全部朝下（如图3-4所示）？

“±1”将告诉你：不管你翻转多少次，总是无法使这7只杯口全部朝下。道理很简单，用“+1”表示杯口朝上，“−1”表示杯口朝下，问题就变成：“把7个+1每次改变其中4个的符号，若干次后能否都变成−1？”考虑这7个数的乘积，由于每次都改变4个数的符号，所以它们的乘积永远不变，为+1。而7个杯口全部朝下时，7个数的乘积等于−1，因此这是不可能的。

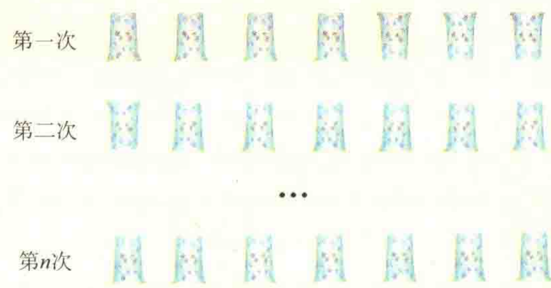


图3-4 7个杯子都能同时朝下吗

道理竟是如此简单，证明竟是如此巧妙，这要归功于“±1”的妙用。

有理数混合运算

进行有理数的混合运算时，先不要看算式里面某一个部分，要特别注意运算顺序，那就是：先算乘方，再算乘除，最后算加减，如有括号，就先算括号里面的。

计算：$0.125\times\frac{4}{5}-\frac{1}{6}\times(-2.5)\div\frac{5}{8}+15+(-2^4)$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{5}{2}\right)\div\frac{5}{8}+15+(-2^4)$$

$$=15\frac{23}{30}-16$$

$$=-\frac{7}{30}$$

想一想

如果把最后一项（-2^4）改成（-2）^{4}，最终结果是正的，还是负的？

敞开数学大门

有理数的运算包括

(1) 有理数的加法运算；
(2) 有理数的减法运算；
(3) 有理数的乘法（或乘方运算）；
(4) 有理数的除法运算。

4 近似数和有效数字

早在5000～8000年前，四大文明古国——中国、印度、埃及、巴比伦都已从母系社会过渡到父系社会，生产力的发展导致国家雏形的生产，生产规模的扩大刺激了人们对大数的需要。如某个原始国家组织了一支军队，国王陛下总不能老是说：“我的这支部队战无不胜共计有9名士兵！”于是就出现了十、百、千、万等符号，以后出现了亿、兆这样的大数单位。在我国商代的甲骨文上就有“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人”的刻文，即在八日辛亥那天消灭敌人共计2656人。如图4-1所示为甲骨文数字。在商周的青铜器上也刻有一些大的数字。

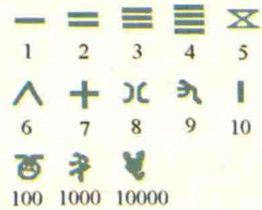


图4-1　甲骨文数字

在古罗马，最大的记数单位只有“千”，他们用M表示一千，“三千”则写成“MMM”，“一万”就得写成“MMMMMMMMMM”，真不敢想像，如果他们需要记一千万时该怎么办，难道要写成一万个M不成？总之，人们为了寻找记大数的单位是花了不少时间，也动了不少脑筋。旧社会有些农村私塾先生会说：“最大的数叫‘猴子翻跟斗’”。这些私塾先生可能认为孙悟空一个跟斗翻过去的路程是最远的，所以完全可以用“猴子翻跟斗”来表示最大的数。在古印度，使用了一系列大数单位后，最大的数的单位叫做“恒河沙”。是啊，恒河中的沙子谁能数得清呢！

不管是在学习中，还是在日常生活中，我们会遇到很多近似的数，那么，人们都是怎么去处理它的呢？

准确数和近似数

在算术里做除法运算的时候，有时能够整除，那么就得到准确的商；有时不能整除，如果要用整数和小数来表示商，那么就只能得到计算到某一位的近似商。

如$69\div4=17.25$，这里，17.25是准确的商。但是$3\div11=0.2727\cdots$，这里0.2727…是无限循环小数，只能取它的近似值：精确到0.01的近似商是0.27（不足近似商）；精确到0.001的近似商是0.273（过剩近似商）。

上面的例子说明，在某种计算中会产生近似数，除此之外，在日常计数和量度中也会产生近似数。

(1) 由于不容易得到准确数而只能得到近似数。如要统计一个国家的人口，或者一个城市的居民人数，因为居民人数时刻在变化，我们就不容易得到一个准