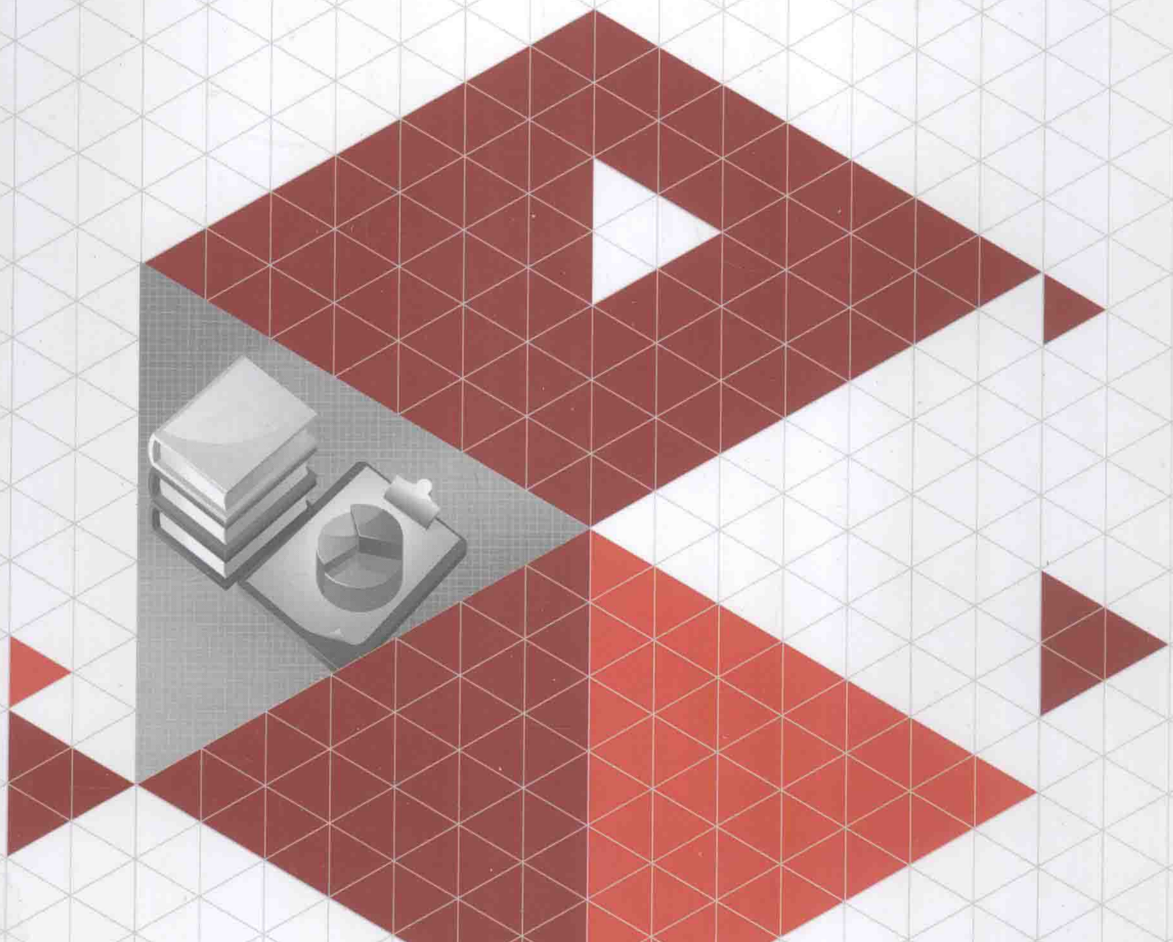
“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

新编经济应用数学

（线性代数 概率与数理统计）（第六版）

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主 编 刘 颖 孙守湖



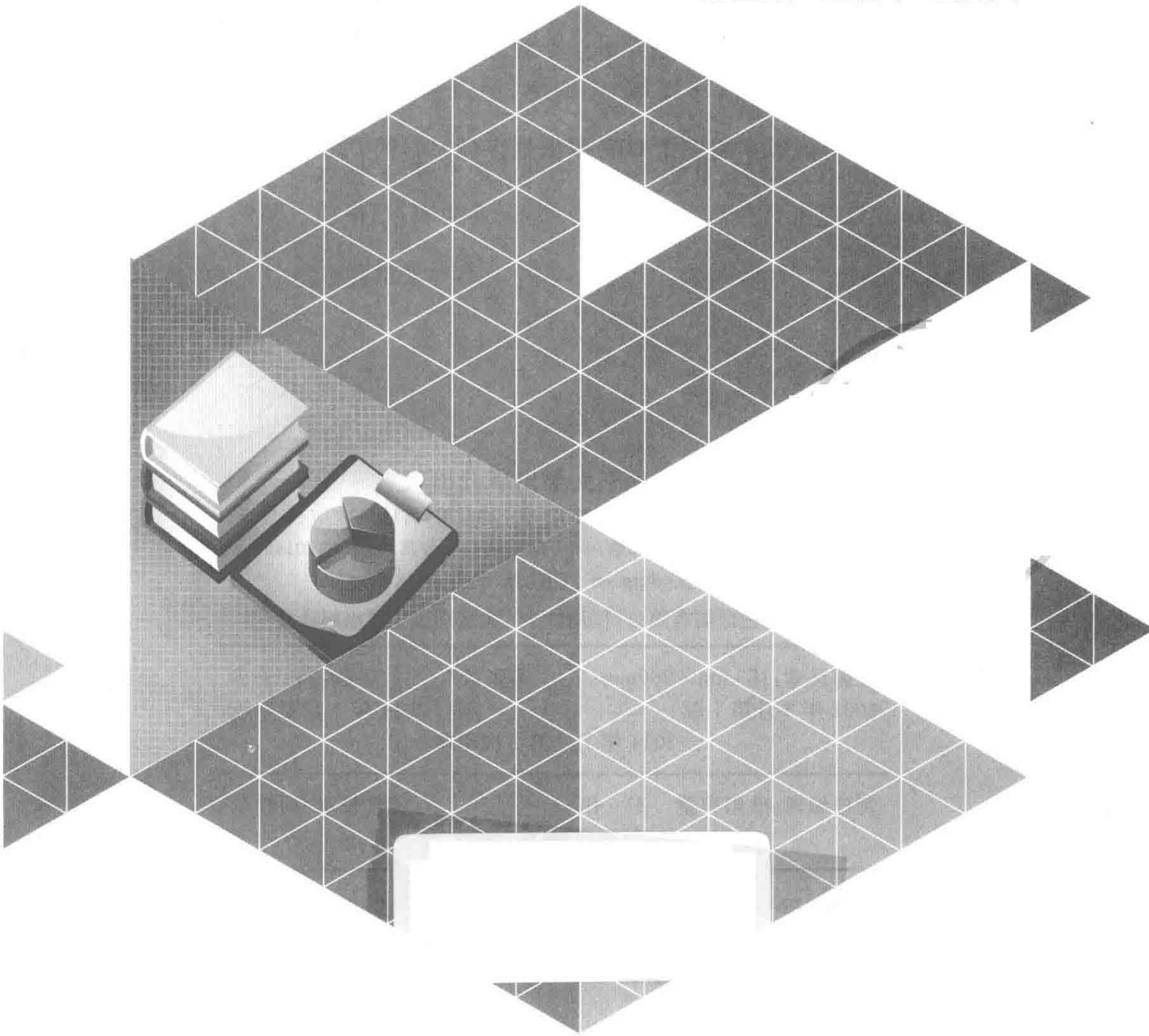
大连理工大学出版社

"十二五"职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

新编经济应用数学

（线性代数 概率与数理统计）（第六版）

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主 编 刘 颖 孙守湖
副主编 刘颖华 樊娟华



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编经济应用数学. 线性代数、概率与数理统计 / 刘颖，孙守湖主编. — 6 版. — 大连 ：大连理工大学出版社，2014.7

新世纪高职高专数学类课程规划教材

ISBN 978-7-5611-8686-2

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①刘… ②孙… Ⅲ. ①经济数学—高等职业教育—教材②线性代数—高等职业教育—教材③概率统计—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①F224.0②O151.2③O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 025797 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023

发行：0411-84708842　邮购：0411-84708943　传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　　印张：17　　字数：393 千字

2002 年 8 月第 1 版　　2014 年 7 月第 6 版

2014 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑：欧阳碧蕾　王　伟　　责任校对：周双双

封面设计：张　莹

ISBN 978-7-5611-8686-2　　定　价：36.00 元

总　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代,我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国,高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命,我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里,高等职业教育的迅速崛起,是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里,普通中专教育、普通高专教育全面转轨,以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步,其来势之迅猛,发人深省。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育,还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育,都向我们提出了一个同样的严肃问题:中国的高等教育为谁服务,是为教育发展自身,还是为包括教育在内的大千社会?答案肯定而且唯一,那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会,它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之,教育资源必须按照社会划分的各个专业(行业)领域(岗位群)的需要实施配置,这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题,这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

众所周知,整个社会由其发展所需要的不同部门构成,包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门,等等。每一个部门又可作更为具体的划分,直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标,就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命,而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑(在市场经济条件下尤其如此)。可以断言,按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才,是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论，但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型（也是一种特殊应用）人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的（同时也正处在变革分化过程中的）研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的、旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前 言

《新编经济应用数学(线性代数 概率与数理统计)》(第六版)是"十二五"职业教育国家规划教材、普通高等教育"十一五"国家级规划教材,也是新世纪高职高专教材编审委员会组编的数学类课程规划教材之一。

本教材是在《新编经济应用数学》(第五版)的基础上,根据近几年教学改革实践,为进一步适应高职高专总体培养目标的需要,进行全面修订而成的。在修订中,我们保留了原教材的系统与独特风格,即将数学的相关知识与经济过程中的实际应用联系起来,在每一部分数学知识的讲述中引进经济应用模型,同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革经验及一线教师的反馈意见与建议,摒弃一些陈旧的例子及复杂运算过程,代之引入计算机数学软件,把原教材的每篇两个模块"基本理论"与"数学模型与应用",发展为三个模块:"基本理论""数学模型与应用""应用Matlab求解"。

本教材以培养应用型人才为目标,注重数学模块与专业案例的对接,借鉴数学模型在提高学生综合能力和素质方面的成功经验,将数学基本知识、数学模型和数学实验有机融合。具体体现在以下几个方面:

1. 进一步强化了概念引出的背景及实际应用,降低了学生掌握同等程度概念知识的难度,易教易学。

2. 以经管案例驱动数学内容,实现数学模块与专业案例的对接,体现"模块案例一体化"的教学特色,缩短数学课程与后续专业课的距离。

3. 在每篇的数学模型与应用部分,剔除了部分例题与习题的复杂的解题过程,新增了一些实用性强、贴近生活的小案例,使之与经济应用的联系更紧密。

4. 把数学软件Matlab的应用纳入教材作为选学内容,使现代科技与数学结合,提高教学效率,培养学生的数学建模能力。

经过改进和调整,本教材具有如下特点:

1. 结构上。本教材分两篇,线性代数、概率与数理统计。在模块划分上分为三个模块:一是必选模块,这部分是

基础模块，即基本理论；二是限选模块，这部分是应用模块，即数学模型与应用；三是任选模块，这部分是实验模块，即应用 Matlab 求解。线性代数部分介绍了投入产出、线性规划和运输问题数学模型；概率与数理统计部分介绍了风险型决策数学模型、方差分析数学模型和一元线性回归分析数学模型。本教材每篇后配有知识结构图，书后配有综合测试题，全书脉络清晰，便于教师讲授，更利于学生理解。

2. 内容上。为了适应高职高专教育培养实用型创新人才的需要，对定理证明及理论性过强的内容做了大幅删减，主要利用图形及实例加以直观说明，降低了学生掌握同等程度知识的难度；习题量适中，在难易程度上做了很好的把握，有利于学生消化所学内容，提高数学建模的能力；全书可读性、趣味性强，有利于培养学生学习数学的兴趣。

3. 附录中新增加了常用经济术语简介，使学生能够理解在日常生活中出现在身边的术语的含义，如同比增长与环比增长等。同时保留了 Mathematica 软件在经济应用数学计算中的应用。

4. 突出了经济性和应用性，所选数学模型贴近生活实际，使经济与数学恰到好处地结合在一起。

本教材由辽宁省交通高等专科学校刘颖、辽宁经济职业技术学院孙守湖任主编，承德石油高等专科学校刘颖华、运城职业技术学院樊娟华任副主编，承德石油高等专科学校刘欣也参加了教材的编写工作。全书由刘颖审阅并统稿。各篇具体分工如下：第三篇的 3.1.1～3.1.4、第四篇的 4.1.1～4.1.4 由孙守湖编写；第三篇的 3.1.5～3.1.6、第四篇的 4.1.5～4.1.6 由刘颖华编写；第三篇的 3.2.1～3.2.3、第四篇的 4.2.1～4.2.3、4.3.1～4.3.2 及附录由刘颖编写；第三篇的 3.3.1～3.3.2 由樊娟华编写，刘欣参加了部分习题的编写。

由于水平所限，本书的不当之处在所难免，恳请读者批评指正，以便进一步修改完善。谨此，向支持本书编写和出版的各界同仁表示衷心的感谢。

编　者
2014 年 7 月

所有意见和建议请发往：dutpgz@163.com
欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com
联系电话：0411-84707492　84706104

目　录

第三篇　线性代数

第四篇　概率与数理统计

第三篇

线性代数

在一个函数、方程或不等式中，如果所出现的数学表达式是关于未知数或变量的一次式，那么这个函数、方程或不等式就称为线性函数、线性方程或线性不等式.如果从一个实际问题中归纳出来的数学模型中出现的函数、方程或不等式都是线性的，我们就称这个数学模型为线性模型.在经济管理活动中，许多变量之间存在着或近似存在着线性关系，因此对这种关系的研究显得尤为重要.许多非线性关系也可转化为线性关系.线性代数是研究线性关系的最基本的数学工具，投入产出、线性规划数学模型是最常见的线性模型.它们在数据计算、信息处理、均衡生产、减少消耗、增加产出等方面有着广泛的应用，是我们改善企业生产经营管理、提高经济效益的有用工具.本篇主要介绍研究线性代数的重要工具——行列式和矩阵，并探讨它们的应用即线性方程组的求解问题，最后介绍投入产出数学模型和线性规划数学模型.

第一部分

基本理论

【内容提要】

在经济管理与日常生活中，大量的实际问题都涉及行列式、矩阵的理论和方法. 尤其最优化问题更是以线性代数为基础. 而行列式与矩阵是研究线性代数的重要工具，本部分将介绍行列式的概念及计算，矩阵的基本概念及计算.

【预备知识】

解二元、三元线性方程组的加减消元法.

【学习目标】

1. 了解行列式的定义和性质，掌握二、三阶行列式的计算方法，会计算简单的 n 阶行列式，了解克莱姆法则的条件和结论；

2. 理解矩阵概念，掌握矩阵的线性运算、乘法、转置及其运算规律；

3. 熟悉矩阵的初等行变换；

4. 了解逆矩阵的概念及逆矩阵存在的条件，会求逆矩阵.

3.1.1 行列式的概念

【案例】（促销商品数量）某商场促销活动，销售四种品牌的短袖 T 恤衫 A_1，A_2，A_3，A_4，它们的售价分别为 22 元、24 元、26 元与 30 元. 该商场一天共售出了 13 件 T 恤衫，销售收入为 320 元. 由于货物混淆放置，给清点销售的 T 恤衫数量带来困难，只知道 T 恤衫 A_3 的销售量是 T 恤衫 A_1 与 A_4 的销售量的总和，T 恤衫 A_3 的销售收入也是 T 恤衫 A_1 与 A_4 的销售收入的总和，请你算出各种品牌的短袖 T 恤衫各销售的件数.

这里要求出各种品牌 T 恤衫各销售的件数，就要列线性方程组，还要用到行列式或矩阵的知识求出结果.

1. 二阶行列式

二元一次线性方程组也称二元线性方程组，其标准形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法可得

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}\end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组(1)的解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\[2ex]x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{cases}$$

为了研究和记忆的方便，引入二阶行列式的概念.

定义 1　由 2^2 个数组成的记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ 表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称它为**二阶行列式**，用 D 来表示，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中，a_{11}、a_{12}、a_{21} 和 a_{22} 称为这个二阶行列式的**元素**，简称为**元**；横排称为**行**，竖排称为**列**；从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为行列式的**次对角线**.

利用二阶行列式的概念，如果记 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}$，当所有未知数的系数组成的行列式 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1)有唯一解，它的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

用行列式求解线性方程组，必须要注意：

(1)分母 D 是由方程组的未知量的系数按原来顺序排列而成的行列式，D 称为**系数行列式**；

(2)第一个未知量 x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 分别代替系数行列式 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 后构成的行列式；第二个未知量 x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 分别代替系数行列式 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 后构成的行列式；

(3)如果系数行列式 $D\neq 0$，那么二元线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

【例 1】　解二元线性方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2=5\\x_1-4x_2=-3\end{cases}$.

解　因为

$$D=\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & -4\end{vmatrix}=3\times(-4)-2\times 1=-14\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5 & 2\\-3 & -4\end{vmatrix}=5\times(-4)-2\times(-3)=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=3\times(-3)-5\times1=-14$$

所以线性方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=1$.

类似地,讨论含有三个未知数的线性方程组的求解问题,可引入三阶行列式.

2. 三阶行列式

定义 2 由 3^2 个数组成的记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 表示数值

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

称它为**三阶行列式**.即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式由 3^2 个元素以三行三列组成,它表示 $3!=6$ 项的代数和,其中正负项各一半,每一项都是取不同行不同列的 3 个元素的乘积.如图3-1所示,实线连接的三个元素之积带正号,虚线连接的三个元素之积带负号,这样计算行列式的方法称为对角线法则.其中元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 所在的对角线称为行列式的主对角线.

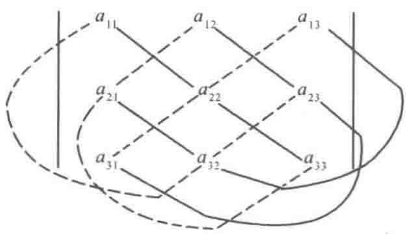


图 3-1

【例 2】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$ 的值.

解 由对角线法则,可得

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}\\ &=2\times3\times5+1\times1\times2+(-4)\times3\times2-2\times3\times2-2\times3\times1-1\times(-4)\times5\\ &=10\end{aligned}$$

3. *n* 阶行列式

定义 3 由 n^2 个数组成的记号 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 表示数值

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

称它为 **n 阶行列式**.

n 阶行列式是由 n 行、n 列共 n^2 个元素组成. 它表示 $n!$ 项的代数和,其中正负项各一半,每一项都是取不同行不同列的 n 个元素的乘积. 其中元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**.

【例 3】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

解 根据定义,有

$$\begin{aligned} D &=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &=\cdots \\ &=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \end{aligned}$$

例 3 所示的行列式,其主对角线上方的元素皆为零,称为**下三角形行列式**;同样,主对角线下方的元素全为零的行列式称为**上三角形行列式**. 上三角形行列式与下三角形行列式统称为**三角形行列式**.

由上例可知,下三角形行列式的值等于主对角线元素之积.

自测题

1. 用行列式求解线性方程组 $\begin{cases} 5x_1+2x_2=1 \\ 7x_1+3x_2=3 \end{cases}$.

2. 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

3. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

习题 3.1.1

1. 用行列式求解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+x_2=6 \\ -x_1+2x_2=2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ 7x_1-4x_2=12 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ 3x+y-5z=0 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$

2. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. 已知 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$，求 x 的值.

4. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

5. 验证下列等式：

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

3.1.2　行列式的计算及应用

1. 行列式的性质

三阶及三阶以上的行列式根据定义来计算是比较复杂的. 例如，一个三阶行列式是 6 项的代数和，一个五阶行列式就是 120 项的代数和，因此有必要讨论行列式的性质，进而来简化行列式的计算.

定义 1　将行列式 D 的行变为相应的列，得到新的行列式，称它为行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T} 或 D'.

例如，令 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$，那么 D 的转置行列式就是

$$D^{T}=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\2 & 1 & -3\\1 & 5 & 4\end{vmatrix}$$

性质 1 行列式转置后其值不变，即 $D^{T}=D$.

此性质说明行列式对行成立的性质对列也成立.

【例 1】 计算上三角行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 的值.

解 应用行列式的性质 1 及定义得

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{12} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这样，我们得出结论：三角形行列式的值等于其主对角线上所有元素的乘积.

性质 2 交换行列式的两行（或两列），行列式的值变号，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

推论 如果一个行列式的两行（或两列）相同，那么这个行列式等于零.

证明 交换行列式 D 中对应元素相等的两行，得到的行列式仍是 D，但由性质 2 知，行列式的值应变号，即 $D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3 行列式的某一行（或某一列）中所有元素都乘以同一个数，等于将该数提到行列式外相乘，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

推论 如果行列式中某一行（或一列）的所有元素都是零，那么这个行列式等于零.

性质 4 如果行列式中有两行（或两列）的对应元素成比例，那么这个行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 5 如果行列式的某一行(或一列)的元素都是两个数的和,那么这个行列式等于相应的两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(或一列)的所有元素都乘以数 k 后,加到另一行(或一列)的对应元素上去,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+ka_{s1} & a_{r2}+ka_{s2} & \cdots & a_{rn}+ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在以后的计算中,为简明起见,用 r 表示行的位置,用 c 表示列的位置,写在等号上面表示行(或列)变换,如用 $\xlongequal{r_2+r_3}$ 表示把第三行加到第二行,用 $\xlongequal{c_2+3c_1}$ 表示用 3 乘以第一列然后加到第二列.

注意:规定 r_i 表示第 i 行,c_j 第 j 列($i,j=1,2,\cdots,n$),用 r,c 表示行与列的变换,简化行列式的计算!

【例 2】 利用行列式的性质计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 6 & 9 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3\times2 & 3\times3 & 3\times7 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2+r_3} 3\times\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3\times0=0$