数学奥林匹克小丛书

高中卷 5

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

不等式的解题方法与技巧

苏勇 熊斌 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 5

不等式的解题方法与技巧

inpike Xiao Congshu

苏勇 熊斌 编著

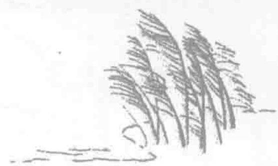
华东师范大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．不等式的解题方法与技巧／苏勇，熊斌编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4170-7

I.数... II.①苏...②熊... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019473号



数学奥林匹克小丛书·高中卷
不等式的解题方法与技巧

编　　著　苏　勇　熊　斌
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　徐海峰
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部　电话　021-62865537
门市(邮购)　电话　021-62869887
门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
华东　中南地区　021-62458734
华北　东北地区　021-62571961
西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
邮编　200062

印 刷 者　江苏苏州市永新印刷包装有限责任公司
开　　本　787x960　16开
印　　张　11.5
字　　数　206千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4170-7/G·2395
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

目录

1 证明不等式的基本方法

现实世界中的量,相等是局部的、相对的,而不等则是普遍的、绝对的,不等式的本质是研究“数量关系”中的“不等关系”.

对于两个量,我们常常要比较它们之间的大小,或者证明一个量大于另一个量,这就是不等式的证明.不等式的证明因题而异,灵活多变,常常要用到一些基本的不等式,如平均不等式、柯西不等式等,其中还需用到一些技巧性高的代数变形.本节将介绍证明不等式的一些最基本的方法.

1.1 比较法

比较法一般有两种形式:

(1) 差值比较　欲证 $A \geqslant B$,只需证 $A-B \geqslant 0$;

(2) 商值比较　若 $B>0$,欲证 $A \geqslant B$,只需证 $\frac{A}{B} \geqslant 1$.

在用比较法时,常常需要对式子进行适当变形,如因式分解、拆项、合并项等.

例 1　实数 x、y、z 满足 $xy+yz+zx=-1$,求证:

$$x^2+5y^2+8z^2 \geqslant 4.$$

证明　因为

$$\begin{aligned} & x^2+5y^2+8z^2-4 \\ =\ & x^2+5y^2+8z^2+4(xy+yz+zx) \\ =\ & (x+2y+2z)^2+(y-2z)^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

所以

$$x^2+5y^2+8z^2 \geqslant 4.$$

说明　本题的拆项配方,有一定的技巧,需要有较强的观察能力.

例 2　设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,试证:对任意实数 x、y、z,有:

$$x^2+y^2+z^2$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy+\sqrt{\frac{b+c}{a}}yz+\sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right).$$

并指出等号成立的充要条件.

分析 熟知 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0$,我们用类似的方法证明本题.

证明 上式左边－右边

$$=\left[\frac{b}{b+c}x^2+\frac{a}{c+a}y^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy\right]$$

$$+\left[\frac{c}{c+a}y^2+\frac{b}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}yz\right]$$

$$+\left[\frac{c}{b+c}x^2+\frac{a}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}xz\right]$$

$$=\sum ab\left[\frac{x}{\sqrt{a(b+c)}}-\frac{y}{\sqrt{b(c+a)}}\right]^2$$

$\geqslant 0$(这里$\sum$ 表示循环和号),

故原不等式成立.

例 3 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$,求证:

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

证明 由于不等式是关于 a、b、c 对称的,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,于是

$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\geqslant 1,$$

所以 $$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

说明 由本题的结论得

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c}\geqslant a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c},$$

即 $$a^a b^b c^c\geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

一般地，设 $x_i \in \mathbf{R}^+$, $i=1, 2, \cdots, n$，则有

$$x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{x_n} \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}},$$

证法与本例完全一样.

例 4 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a^2+b^2+c^2=1$，求

$$S=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

的最小值.

解 当 $a=b=c$ 时，$S=3$. 猜测：$S \geqslant 3$.

事实上，

$$\begin{aligned}
S-3&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\
&=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

综上所述，S 的最小值为 3.

说明 先猜后证是处理许多极值问题的有效手段. 猜，一猜答案，二猜等号成立的条件；证明的时候要注意等号是否能取到.

1.2 放缩法

有时我们直接证明不等式 $A \leqslant B$ 比较困难，可以试着去找一个中间量 C，如果有 $A \leqslant C$ 及 $C \leqslant B$ 同时成立，自然就有 $A \leqslant B$ 成立. 所谓"放缩"即将 A 放大到 C，再把 C 放大到 B 或者反过来把 B 缩小到 C 再缩小到 A. 不等式证明的技巧，常体现在对放缩尺度的把握上.

例 5 证明：对任意正实数 a、b、c，均有

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

证明 因为

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\geqslant(a+b)ab,$$

所以 $$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{abc(a+b+c)},$$

同理可得 $$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leqslant\frac{a}{abc(a+b+c)},$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{b}{abc(a+b+c)},$$

把上面三式相加,便得

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

说明 在处理分式不等式时,通分只有在不得已的情况下才进行,若想变为同分母比较简便的一种思想就是"放缩".

例6 设 $a_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,n)$,求证:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

分析 观察两边的式子,首先要设法让左边"变出"2^n.

证明 $$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

$$=2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right).$$

由于 $a_i-1\geqslant 0$,可得:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

$$\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)$$

$$\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2^n}{n+1}[n+1+(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)]$$

$$=\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

故原不等式成立.

例 7 求最大的实数 α,使得 $\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\alpha$ 对所有正实数 x、y、z 成立.

解法 1 令 $x=y$, $z\to 0$,则原式左端 $\to 2$,因此,若 $\alpha>2$,将出现矛盾,故 $\alpha\leqslant 2$.

下面证明:$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>2$.

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$,我们设法证明

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

将 $\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}$、$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 移到右边,即证

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}-z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

也即

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>\frac{x^2}{\sqrt{x^2+z^2}(\sqrt{x^2+y^2}+y)}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+z^2}+z)}.$$

两边约去 x,并且由于 $\sqrt{x^2+y^2}+y>2y$, $\sqrt{x^2+z^2}+z>2z$,所以,只要证明:

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{x}{2y\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{x}{2z\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由于 $\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}}$,所以 $\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$ 随 x 的增大而增大.

同样,$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 也随 x 的增大而增大.

所以我们只须考虑 $x=y$ 时的情况.

令 $x=y$,即证

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}z},$$

也就是
$$\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}z},$$
即证
$$\sqrt{2}z \geqslant \sqrt{y^2+z^2}.$$
这是显然成立的.

因此,
$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqslant 2.$$
故 $\alpha_{\max}=2$.

说明 本题也可利用待定系数法给出解答.

证法 2 同样,我们来证明
$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > 2.$$
设
$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \frac{2x^a}{x^a+y^a+z^a}. \quad ①$$
其中 a 为待定参数.

注意到①等价于 $(x^a+y^a+z^a)^2 \geqslant 4x^{2a-2}(y^2+z^2)$.
上式左边 $\geqslant 4x^a(y^a+z^a)$,故只须保证
$$y^a+z^a \geqslant x^{a-2}(y^2+z^2).$$
不难发现,取 $a=2$ 即可. 于是
$$\sum \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \sum \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}=2.$$
而等号显然不可能成立,所以
$$\sum \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} > 2.$$
故 $\alpha_{\max}=2$.

1.3 分析法

所谓分析法就是先假定要证的不等式成立,然后由它出发推出一系列

与之等价的不等式(即要求推理过程的每一步都可逆),直到得到一个较容易证明的不等式或者一个明显成立的不等式.分析法是一种执果索因的证明方法,在寻求证明思路时尤为有效.

例 8 若 $x, y \in \mathbf{R}, y \geqslant 0$,且 $y(y+1) \leqslant (x+1)^2$,求证:$y(y-1) \leqslant x^2$.

证明 若 $0 \leqslant y \leqslant 1$,则 $y(y-1) \leqslant 0 \leqslant x^2$.

若 $y > 1$,由题设知

$$y(y+1) \leqslant (x+1)^2,$$

$$y \leqslant \sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

要证明 $y(y-1) \leqslant x^2$,即只需证明

$$\sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2},$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + \frac{1}{4} \leqslant x^2 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}.$$

最后这个不等式是显然的,从而原不等式得证.

例 9 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,求证:

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geqslant a + b - 2\sqrt{ab}.$$

证明 注意到

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geqslant a + b - 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \quad c + 2\sqrt{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

因为

$$\begin{aligned} c + 2\sqrt{ab} &= c + \sqrt{ab} + \sqrt{ab} \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{c\sqrt{ab}\sqrt{ab}} \\ &= 3\sqrt[3]{abc}, \end{aligned}$$

从而

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geqslant a + b - 2\sqrt{ab}.$$

说明 在不等式的证明中，分析法和综合法有时需交替使用. 本题在用分析法得到 $c+2\sqrt{ab}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，再用分析法继续下去的话，会使问题变得复杂，此时结合综合法便使问题迎刃而解了.

例 10 已知 $n\in \mathbf{N}_+$，求证：

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \quad ①$$

证明 要证明①，我们只要证：

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geqslant (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \quad ②$$

②的左边为 $$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right). \quad ③$$

②的右边为 $$n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \quad ④$$

比较③式和④式，若有

$$\frac{n}{2}\geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}, \quad ⑤$$

及 $$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\geqslant \frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}, \quad ⑥$$

则②得证. 而⑤、⑥两式显然成立，因此①得证.

例 11 已知 $a,b,c\in \mathbf{R}^+$，$abc=1$. 求证：

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 4(a+b+c-1).$$

分析 想法是把 a 当作参数，将其看成是关于 $b+c$ 的一元二次方程，用判别式的方法来证明.

证明 不妨设 $a\geqslant 1$. 原不等式等价于：

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6\geqslant 4(a+b+c), \quad ①$$

即 $$(a^2-1)(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6$$

$$\geqslant 4a+3(b+c)$$

由于 $$(a+1)(b+c) \geqslant 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{bc} = 4,$$

所以如果我们能够证明：

$$4(a-1)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6 \geqslant 4a+3(b+c), \qquad ②$$

则①式成立.

而②等价于

$$2+a(b^2+c^2)+bc(b+c)-3(b+c) \geqslant 0,$$

故只需证 $$\frac{a}{2}(b+c)^2+(bc-3)(b+c)+2 \geqslant 0.$$

记 $$f(x)=\frac{a}{2} \cdot x^2+(bc-3)x+2,$$

则其判别式 $$\Delta=(bc-3)^2-4a.$$

我们只要证明 $\Delta \leqslant 0$ 即可，这相当于：

$$\left(\frac{1}{a}-3\right)^2-4a \leqslant 0.$$

即 $$1-6a+9a^2-4a^3 \leqslant 0.$$

也即 $$(a-1)^2(4a-1) \geqslant 0. \qquad ③$$

由 $a \geqslant 1$，③显然成立，进而①成立.

由上知等号在 $a=b=c=1$ 时成立.

1.4 待定系数法

引入适当的参数，根据题中式子的特点，将参数确定，从而使不等式获得证明.

例 12 设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数，求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

分析 欲求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值，只需先证明存在一个常数 c，使

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2} \leqslant c, \qquad ①$$

且 x、y、z 取某组数时，等号成立.

①式可化为 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{c}(xy+2yz)$. 由于右边两项为 xy 和 $2yz$，所以左边的 y^2 需拆成两项 αy^2 和 $(1-\alpha)y^2$. 由

$$x^2+\alpha y^2\geqslant 2\sqrt{\alpha}xy,$$

$$(1-\alpha)y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{1-\alpha}yz,$$

又由 $\frac{2\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}=2$，得 $\alpha=\frac{1}{5}$.

从而 $$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz).$$

解 因为 $$x^2+\frac{1}{5}y^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}xy,$$

$$\frac{4}{5}y^2+z^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}yz,$$

所以 $$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz),$$

即 $$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

当 $x=1$，$y=\sqrt{5}$，$z=2$ 时，等号成立.

所以，欲求的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

例 13 （Ostrowski） 设实数 a_1，a_2，…，a_n 与 b_1，b_2，…，b_n 不成比例. 实数 x_1，x_2，…，x_n 满足：

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=1.\end{cases}$$

证明：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}.$$

证明 设 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \beta(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - 1)$，

其中 α、β 为待定系数. 于是

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{\alpha a_i + \beta b_i}{2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha a_i + \beta b_i)^2}{4} - \beta$$

$$\geqslant - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha a_i + \beta b_i)^2}{4} - \beta.$$

上述不等式等号成立，当且仅当

$$x_i = -\frac{\alpha a_i + \beta b_i}{2}\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n). \qquad ①$$

将①式代回 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ 及 $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$ 中，有：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha A - \frac{1}{2}\beta C = 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha C - \frac{1}{2}\beta B = 1. \end{cases}$$

其中，$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$，$B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，$C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. 因此，

$$\alpha = \frac{2C}{AB - C^2},\ \beta = -\frac{2A}{AB - C^2}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha a_i + \beta b_i}{2}\right)^2 - \beta = \frac{A}{AB - C^2}.$$

说明 1 本题还有下列两种证明方法，供读者参考：

证法 2 由 Cauchy 不等式可得，对任意 $t \in \mathbf{R}$，

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2\right] \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i) x_i\right]^2 = 1,$$

即 $$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(At^2 + 2Ct + B) - 1 \geqslant 0$$

恒成立.

由判别式(关于 t 的) $\Delta \leqslant 0$，即有：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{A}{AB-C^2}.$$

证法 3 （综合运用上述两种方法）

由条件，对任意 $\lambda \in \mathbf{R}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-\lambda a_i)x_i=1.$$

利用 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(b_i-\lambda a_i)^2 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(b_i-\lambda a_i)x_i\right]^2=1.$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{B+\lambda^2 A-2\lambda C}.$$

我们的目标是证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{B-\frac{C^2}{A}},$$

因此，只须
$$\lambda^2 A-2\lambda C \leqslant -\frac{C^2}{A}.$$

即
$$\lambda^2 A^2-2\lambda AC+C^2 \leqslant 0.$$

取 $\lambda=\frac{C}{A}$ 即可满足上述条件.

说明 2 可以从本题证明 Fan-Todd 定理：

设 a_k、$b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 为两组不成比例的实数列，已知 $a_i b_k \neq a_k b_i$ $(i \neq k)$，则

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leqslant (\mathrm{C}_n^2)^{-2} \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i \neq k} \frac{a_k}{a_i b_k-a_k b_i}\right)^2.$$

证明 只需在本题中令 $x_k=(\mathrm{C}_n^2)^{-1} \cdot \sum_{r \neq k} \frac{a_r}{a_r b_k-a_k b_r}$，读者不难自行验证 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足全部条件.

例 14 求函数 $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{x_1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^2}+$