普通高等教育“十三五”规划教材
应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

## 大学数学（经济管理类）Ⅲ

# 概率论与数理统计

主编　周宏宪　杨　林

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

大学数学(经济管理类)Ⅲ

# 概率论与数理统计

主编　周宏宪　杨　林

科　学　出　版　社

北　京

## 内 容 简 介

本书是针对高校应用型人才的要求和现阶段非重点高校学生的基础而组织编写的，既考虑到教学内容的深度与广度以及经济、管理类各专业对数学课程的教学基本要求，又考虑到与教育部颁布的研究生入学考试数学三的考试大纲中的内容相衔接，符合经济、管理类各专业对数学课程的要求. 本书主要内容包括：随机事件与概率、随机变量、多维随机变量、数字特征、极限定理、样本与统计量、参数估计与假设检验等.

本书在力求体系严密性的基础上，按知识点分模块组织编写，同时简化有关定理的证明，对于难度较大的证明予以省略，将数学理论与经济管理学中常见实例相结合，以提高概率统计知识的使用性.

本书适合作为普通高校经济、管理类专业的教材，也可供成人本科教育、高等职业教育选用.

**图书在版编目（CIP）数据**

大学数学：经济管理类. Ⅲ，概率论与数理统计/周宏宪，杨林主编. —北京：科学出版社，2016. 9

普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

ISBN 978-7-03-049680-5

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①周… ②杨… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O1 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 203157 号

责任编辑：张中兴 胡海霞／责任校对：钟 洋

责任印制：白 洋／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 9 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16

2016 年 9 月第一次印刷 印张：39

字数：973 000

**定价：95.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材》

## 编 委 会

# 从书序言

*Preface to the series*

本系列教材参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求, 结合编者多年来教学实践中的经验和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成, 其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括: 《高等数学 (理工类)(上、下册)》、《线性代数 (理工类)》、《概率论与数理统计 (理工类)》、《高等数学 (文科类)》、《大学数学 (经济管理类)(Ⅰ高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》.

我们知道, 高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程, 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业, 而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前, 关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多, 这类教材主要以经典数学的理论为基础, 讲述其理论、方法与例题分析, 目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是, 这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的, 这对于非数学类专业学生学习数学课程不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外, 这类教材几乎通用于所有的非数学类专业, 而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此, 本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术, 特别是信息技术发展相适应, 强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化, 将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块, 不同的专业可根据本专业培养方案的要求, 从中选取相应的模块, 使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象, 根据各个学科专业的特点, 针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题, 以突出教学内容的应用性, 使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性, 能广泛适用于非数学类各专业的学生可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出, 易教易学, 突出重点, 强调案例式教学方法.

当然, 上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷, 本系列教材距这样的目标还有一定的距离.

由于编者水平有限, 系列教材中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

**丛书编委会**
2016 年 6 月

# 前　言

*Preface*

本书参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业概率论与数理统计课程教学基本要求, 结合多年来教学实践中的经验和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成, 其目的是为高等学校经济、管理和农林类各专业学生提供一本比较适合的教材或学习参考书.

概率论是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象 (随机现象) 规律性的一门数学学科, 20 世纪以来, 广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 而数理统计是运用概率论的知识, 研究如何有效地对带有随机性影响的数据进行收集、整理、分析和推断的学科. 相对于其他许多数学分支而言, 数理统计是一个比较年轻的数学分支. 多数人认为 20 世纪 40 年代克拉美 (H. Carmer) 的著作《统计学的数学方法》, 使得 1945 年以前 25 年间英、美统计学家在统计学方面的工作与法、俄数学家在概率论方面的工作结合起来, 从而形成了数理统计这门学科. 数理统计有很多分支, 但其基本内容分为采集样本和统计推断两大部分. 发展到今天的现代数理统计学, 已经历了各种历史变迁. 现代统计学时期是数理统计发展的辉煌时期, 数理统计不仅在理论上取得了重大进展, 其方法在生物、农业、医学、社会、经济、工业和科技等方面得到越来越广泛的应用. 正是这种广泛的应用性, 使得概率论与数理统计课程成为高等学校大部分专业开设的一门重要的必修或选修课程.

本课程的学习可以使学生学习掌握处理随机性观察数据的基本理论和方法, 为各专业知识的深入学习和应用打下良好的基础. 关于概率论与数理统计的教材或教科书已非常多, 本书在参考近几年来国内外出版的有关教材的基础上, 结合了编者多年来教学的实践经验, 主要在以下几个方面做了一些尝试: ① 增加了概率论与数理统计的发展历史简介, 以激发学生的学习兴趣; ② 尽量与现代科学技术, 特别是信息技术发展相适应, 强调应用性、实效性; ③ 将知识点模块化, 以便灵活教学; ④ 略去了一些复杂的理论推导, 强调知识的应用性; ⑤ 深入浅出, 易教易学, 将理论与学生的专业知识结合起来. 当然, 上述尝试只是编者编写本书的希望或初衷, 本书实际上还远没有达到这样的目标.

本书共 26 个模块, 各模块包含大量例题和习题, 书末配有附表. 本书是在编者根据各自长期执教该课程的实践经验上完成的, 模块 1—8 以及模块 21—26 由杨林执笔, 模块 9—20 由周宏宪执笔. 在本书的编写过程中我们始终得到同行们的鼓励、支持和帮助, 他们提了许多中肯而宝贵的意见, 在此谨表感谢.

由于编者水平有限, 书中疏漏之处在所难免, 敬请读者批评指正.

**编　者**

2016 年 6 月

# 目　录
# Contents

丛书序言
前言
绪论 …… 1
模块 1　随机事件及其运算 …… 4
模块 2　概率的定义及性质、古典概型与几何概型 …… 9
模块 3　条件概率、全概率公式与贝叶斯公式 …… 16
模块 4　事件的独立性 …… 20
模块 5　随机变量及分布函数 …… 24
模块 6　离散型随机变量及常见分布 …… 27
模块 7　连续型随机变量及常见分布 …… 33
模块 8　随机变量函数的分布 …… 41
模块 9　多维随机变量及其联合分布 …… 44
模块 10　二维随机变量的边缘分布 …… 51
模块 11　二维随机变量的条件分布 …… 58
模块 12　随机变量的独立性 …… 62
模块 13　二维随机变量函数的分布 …… 67
模块 14　随机变量的数学期望 …… 75
模块 15　随机变量的方差 …… 84
模块 16　协方差和相关系数 …… 89
模块 17　大数定律 …… 94
模块 18　中心极限定理 …… 98
模块 19　数理统计基本概念 …… 101
模块 20　统计量与抽样分布 …… 104
模块 21　点估计的几种方法 …… 113
模块 22　点估计的评价标准 …… 118
模块 23　区间估计 …… 122
模块 24　假设检验的基本思想与概念 …… 131
模块 25　正态总体参数假设检验 …… 135
模块 26　其他分布参数的假设检验 …… 141

**参考文献** ································ 146
**附录** ································ 147
附表 1 泊松分布表 ································ 147
附表 2 标准正态分布表 ································ 150
附表 3 $\chi^2$ 分布表 ································ 152
附表 4 $t$ 分布表 ································ 154
附表 5 $F$ 分布表 ································ 155

# 绪 论

客观世界中存在着两类现象: 一类是在一定条件下必然出现的现象, 例如, 向上抛一颗石子必然落下; 在标准气压下, 100°C 的纯水必然沸腾; 两个同性的电荷一定互斥, 等等. 这类现象称为**必然现象**. 因为其结果是明确的, 所以也称为**确定性现象**; 另一类是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象, 例如, 在相同条件下, 抛一枚均匀的硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 并且每次抛掷之前不能预知抛币后的结果肯定是什么; 又如, 用同一门大炮向同一目标射击, 每次弹着点不尽相同, 并且在每次射击之前, 均无法预知其弹着点的确定位置. 这类现象, 虽然在试验或观察之前不能预知其确切结果, 但人们经过长期实践并深入研究后, 发现这类现象在大量重复试验或观察下, 其结果呈现出一定的规律性. 例如, 均匀的硬币重复抛掷多次, 正面朝上和反面朝上的次数大致相同. 这种在个别试验中结果具有不确定性, 而在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象称为**随机现象**, 或称为**不确定性现象**.

概率论是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象 (随机现象) 规律性的一门数学学科, 20 世纪以来, 广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域.

**【概率论简史】**

概率论的概念形成于 16 世纪, 与用投掷骰子的方法进行赌博有密切关系.

1654 年, 一个名叫德梅尔 (De Méré) 的赌徒就 “两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 $c$ 局便算赢家, 若在一赌徒胜 $a$ 局, 另一赌徒胜 $b$ 局 $(b < c)$ 时便终止赌博, 问应如何分赌本” 为题求教于数学家帕斯卡 (Pascal, 1623—1662). 帕斯卡与费马 (Fermat, 1601—1665) 通信讨论了这一问题, 并用组合的方法给出了正确的解答.

1657 年, 惠更斯 (Huygens, 1629—1695) 发表的《论赌博中的计算》是最早的概率论著作. 论著中的第一批概率论概念 (如数学期望) 与定理 (如概率加法、乘法定理) 标志着概率论的诞生.

18 世纪初, 伯努利 (Bernoulli, 1700—1782)、棣莫弗 (De Moivre, 1667—1754)、蒲丰 (Buffon, 1707—1788)、拉普拉斯 (Laplace, 1749—1827)、高斯 (Gauss, 1777—1855) 和泊松 (Poisson, 1781—1840) 等一批数学家对概率论作出了奠基性的贡献.

1812 年, 拉普拉斯所著的《概率分析理论》实现了从组合技巧向分析方法的过渡, 开辟了概率论发展的新时期.

19 世纪后期, 极限理论的发展成为概率论研究的中心课题, 是概率论的又一次飞跃, 为后来数理统计的产生和应用奠定了基础. 切比雪夫 (Chebyshev, 1821—1894) 对此作出了重要贡献. 他建立了关于独立随机变量序列的大数定律, 推广了棣莫弗-拉普拉斯的极限定理. 切比雪

夫的成果后来被其学生马尔可夫 (Markov, 1856—1922) 发扬光大, 影响了 20 世纪概率论发展的进程.

1933 年, 柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov, 1903—1987) 在他的名著《概率论基础》一书中提出了概率公理化定义, 并得到了数学家们普遍的承认. 公理化体系给概率论提供了一个逻辑上的坚实基础, 使概率论成为一门严格的演绎科学, 取得了与其他数学学科同等的地位, 并通过集合论与其他数学分支紧密联系起来.

在公理化的基础上, 现代概率论不仅在理论上取得了一系列突破, 在应用上也取得了巨大成就, 其应用几乎遍及所有的科学领域, 如天气预报、地震预报、工程技术、自动控制、产品的抽样调查、经济研究、金融和管理等领域.

**【数理统计简史】**

数理统计是运用概率论的知识, 研究如何有效地对带有随机性影响的数据进行收集、整理、分析和推断的学科. 相对于其他许多数学分支而言, 数理统计是一个比较年轻的数学分支. 多数人认为 20 世纪 40 年代克拉美的著作《统计学的数学方法》, 使得 1945 年以前 25 年间英、美统计学家在统计学方面的工作与法、俄数学家在概率论方面的工作结合起来, 从而形成了数理统计这门学科. 数理统计有很多分支, 但其基本内容分为采集样本和统计推断两大部分. 发展到今天的现代数理统计学, 已经历了各种历史变迁.

1. 近代统计学时期

18 世纪末到 19 世纪, 是近代统计学时期. 这一时期的重大成就是大数定律和概率论被引入统计学. 之后最小二乘法、误差理论和正态分布理论等相继成为统计学的重要内容. 这一时期有两大学派: 数理统计学派和社会统计学派.

数理统计学派始于 19 世纪中叶, 代表人物是比利时的凯特莱 (L. A. Quételet, 1796—1874), 著有《概率论书简》《社会物理学》等. 他主张用自然科学的方法研究社会现象, 正式把概率论引入统计学, 并最先用大数定律证明了社会生活中随机现象的规律性, 提出了误差理论. 凯特莱的贡献, 使统计学的发展进入了一个新的阶段.

社会统计学派始于 19 世纪末, 首创人物是德国的克尼斯 (K. G. A. Knies). 他认为统计学是一个社会科学, 是研究社会现象变动原因和规律性的实质性科学. 各国专家在社会经济指标的设定与计算、指数的编制、统计调查的组织和实施、经济社会发展评价和预测等方面取得了一系列重要成果. 德国统计学家恩格尔 (C. L. E. Engel, 1821—1896) 提出的恩格尔系数、美国经济学家库兹涅茨和英国经济学家斯通等研究的国民收入和国内生产总值的核算方法等, 都是伟大的贡献.

18 世纪到 19 世纪初期, 高斯因描述天文观测的误差而引进正态分布, 并用最小二乘法作为估计方法, 是近代数理统计学发展初期的重大事件, 对社会发展有很大影响.

用正态分布描述观测数据的应用是如此普遍, 以致在 19 世纪相当长的时期内, 包括高尔顿 (Galton) 在内的一些学者, 认为这个分布可用于描述几乎是一切常见的数据. 直到现在, 有关正态分布的统计方法, 仍占据着常用统计方法中很重要的一部分. 最小二乘法方面的工作, 在 20 世纪初以来, 经过一些学者的发展, 如今成了数理统计中的主要方法.

2. 现代统计学时期

从 19 世纪末到现在, 是现代统计学时期. 这一时期的显著特点是数理统计学由于同自然科

学、工程技术科学紧密结合并被广泛应用于各个领域而获得迅速发展. 各种新的统计理论和方法, 尤其是推断统计理论与方法得以大量涌现. 例如, 英国统计学家卡尔 · 皮尔逊 (K. Pearson, 1857—1936) 的 $\chi^2$ 分布理论, 统计学家戈赛特 (W. S. Gosset, 1876—1937) 的小样本 $t$ 分布理论, 统计学家费希尔 (R. A. Fisher, 1890—1962) 的 $F$ 分布理论和试验设计方法, 波兰统计学家奈曼 (J. Neyman) 和英国统计学家皮尔逊 (E. S. Pearson, 1895—1980) 的置信区间理论和假设检验理论, 以及非参数统计法、序贯抽样法、多元统计分析法、时间序列跟踪预测法都应运而生, 并逐步成为现代统计学的主要内容.

现代统计学时期是数理统计发展的辉煌时期, 数理统计不仅在理论上取得了重大进展, 其方法在生物、农业、医学、社会、经济、工业和科技等方面也得到越来越广泛的应用.

# 模块1
# 随机事件及其运算

## 一、随机试验与样本空间

对于随机现象的研究通常是通过随机试验来进行的. 我们把对某种现象做一次观察或进行一次科学试验, 统称为一个**试验**. 一个试验称为**随机试验**, 如果它满足如下条件:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且所有可能的结果是事先已知的;

(3) 每次试验的结果恰是这些可能结果中的一个, 但在一次试验之前不能确定哪一种结果会出现.

随机试验, 简称试验, 记作 $E$. 今后如不特别声明, 本书所提及的试验均为随机试验.

虽然一次随机试验的结果不能完全预言, 但是, 在相同条件下大量重复此试验时, 则会呈现出一定的数量规律性, 这种在大量重复试验中所呈现出的固有的规律性称为**统计规律性**. 例如, 多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致有一半, 同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布, 等等. 概率论就是研究随机现象中数量规律性的一门数学学科.

随机试验是一个广泛的术语, 包括各种科学实验, 也包括对客观事物进行的 "调查""观察""测量" 等.

**定义 1** 随机试验 $E$ 的一切可能的基本结果组成的集合称为**样本空间**, 记为 $\Omega = \{\omega\}$, 其中 $\omega$ 表示基本结果, 又称为**样本点**.

**例 1** 下面给出几个随机试验的样本空间.

试验 $E_1$: 将一枚硬币连抛两次, 观察正反面出现的情况, 则样本空间

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \left\{(\text{正, 正}), (\text{正, 反}), (\text{反, 正}), (\text{反, 反})\right\}.$$

试验 $E_2$: 将一枚硬币连抛两次, 观察正面出现的次数, 则样本空间 $\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$.

试验 $E_3$: 记录某一大型超市一天内进入的顾客的人数, 由于人数可能很多, 难以确定一个合适的上界, 因此取样本空间为 $\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

试验 $E_4$: 某射手打靶, 测量其弹着点与靶心的距离, 则样本空间 $\Omega_4 = \{\omega \mid \omega \geqslant 0\}$.

样本空间包含的样本点个数称为**容量**. 若容量有限, 就是有限样本空间, 如试验 $E_1, E_2$ 中的 $\Omega_1, \Omega_2$. 有限样本空间是最简单的样本空间, 研究它有助于深入分析更为复杂的样本空间. 若样本空间包含无穷多个样本点, 即无限样本空间, 此时又可细分为两类: 一类包含无穷但可列个样本点, 如 $E_3$ 中的 $\Omega_3$, 这类空间的性质类似于有限样本空间; 另一类包含无穷但不可列个样本点, 如 $E_4$ 中的 $\Omega_4$.

需注意的是, 对一个具体的随机试验来说, 样本空间并不唯一, 它依赖于试验目的. 例如, 试验 $E_1$ 和 $E_2$ 都是将一枚硬币连掷两次, 但由于试验目的不一样, 两个样本空间截然不同, 后者显然更为简单. 通过进一步的学习我们将会发现, 正是样本空间构建上的灵活性给解决实际问题带来了很大方便, 对于具体问题, 怎样选取一个恰当的样本空间是值得研究的, 也是解题的关键.

## 二、随机事件

**定义 2**　随机试验的若干个基本结果组成的集合称为**随机事件**, 简称**事件**, 只含有一个基本结果的事件称为**基本事件**.

随机事件常用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

关于随机事件概念的几点说明:

(1) 任一事件 $A$ 是相应样本空间的一个子集, 基本事件就是只含有一个样本点的事件.

(2) 当子集 $A$ 中某个样本点出现了, 就说事件 $A$ 发生了, 或者说事件 $A$ 发生当且仅当 $A$ 中某个样本点出现了.

(3) 样本空间 $\Omega$ 包含所有的样本点, 作为自身的子集, 在每次试验中它总是发生的, 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 作为样本空间的子集, 在每次试验中都不发生, 称为**不可能事件**.

事件作为样本空间的子集, 包含的样本点个数可以是有限个, 也可以是无限多个. 随机事件包含的样本点个数称为**事件数**, 用 $N(A), N(B)$ 等表示. 例如, $E_3$ 中令事件 $A$ 为 "顾客人数小于 100", 则 $N(A) = 100$; $E_4$ 中令事件 $B$ 为 "弹着点与靶心的距离大于 2cm", 则 $N(B) = \infty$.

**例 2**　掷一颗骰子出现的点数的样本空间为: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

事件 $A =$ "出现 5 点", 它由 $\Omega$ 的单个样本点 "5" 组成, 它是一个基本事件, 可记为 $A = \{5\}$;

事件 $B =$ "出现奇数点", 它由 $\Omega$ 的三个样本点 "1, 3, 5" 组成, 可记为 $B = \{1, 3, 5\}$;

事件 $C =$ "出现的点数不大于 6", 它由 $\Omega$ 的全部样本点 "1, 2, 3, 4, 5, 6" 组成, 是必然事件, 可记为 $C = \Omega$.

事件 $D =$ "出现的点数大于 6", $\Omega$ 中任一样本点都不在 $D$ 中, 所以 $D$ 是不可能事件, 可记为 $D = \varnothing$.

## 三、事件间的关系及运算

同一样本空间中可以有很多事件, 不同的事件有各自不同的特性, 彼此之间又存在一定的联系. 对事件之间关系的研究, 有助于我们认识随机现象的本质, 简化复杂事件的概率计算. 由于事件是一个集合, 因此事件之间的关系和运算可以按照集合之间的关系和运算来处理.

设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$. $A, B, A_k, B_k (k = 1, 2, \cdots)$ 为 $E$ 中的事件.

### 1. 事件的和 (或并)

"事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生" 这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和 (或并), 记作 $A \bigcup B$ 或 $A + B$. 这个事件发生等价于事件 $A$ 发生或事件 $B$ 发生. 图 1-1 中阴影部分即为 $A \bigcup B$. 显然, $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

类似地, 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件; 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

2. 事件的积 (或交)

“事件 $A$ 与 $B$ 同时发生” 这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积 (或交), 记作 $A\bigcap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$. 当且仅当 $A,B$ 同时发生时, 事件 $A\bigcap B$ 发生. $A\bigcap B$ 也记作 $AB$, 如图 1-2 所示, 即事件 $AB$ 所包含的样本点为事件 $A,B$ 所共有.

类似地, “事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生” 这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件, 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$. 无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件定义为 “事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生” 的事件, 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

3. 事件的差

“事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生” 这一事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差, 记作 $A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$. 当且仅当 $A$ 发生 $B$ 不发生时, 事件 $A-B$ 发生, 如图 1-3 所示.

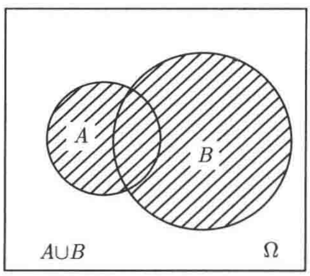

图 1-1　事件的并

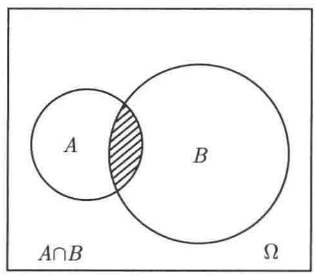

图 1-2　事件的交

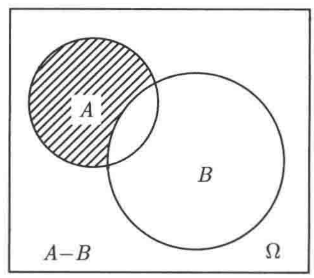

图 1-3　事件的差

4. 事件的包含与相等

若事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生, 则称事件 $A$ 包含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$, 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(图 1-4). $A\subset B$ 意味着 $A$ 所包含的样本点都属于 $B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等, 记作 $A=B$.

5. 事件互不相容 (或互斥)

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生, 即 $AB=\varnothing$, 两事件没有公共的样本点, 则称 $A$ 与 $B$ 是**互不相容或互斥事件**(图 1-5). 例如, 掷骰子试验中, “出现偶数点” 与 “出现奇数点” 是两个互不相容事件.

若 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件互不相容, 即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称这 $n$ 个事件互不相容, 可见 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容, 一定是两两互不相容的事件. 例如, 样本空间 $\Omega$ 中的各个样本点就是互不相容的事件.

6. 对立 (或逆) 事件

若 $A\bigcup B=\Omega$ 且 $A\bigcap B=\varnothing$, 则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互为**对立事件**(**或逆事件**). 在一次试验中, 若事件 $A$ 与 $B$ 是对立事件, 则其中必有一个发生, 且仅有一个发生. $A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$(图 1-6).

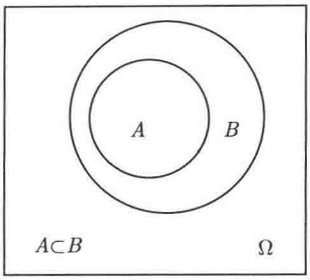


图 1-4 包含关系

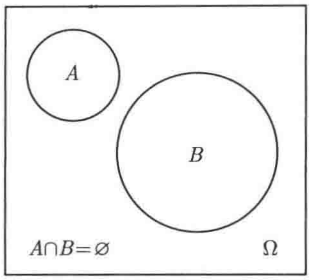


图 1-5 互不相容

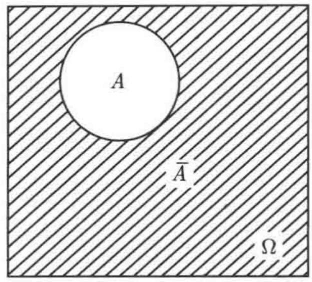


图 1-6 对立事件

事件的运算性质和集合的运算性质相同, 设 $A, B, C$ 为事件, 则有

(1) **交换律** $A\bigcup B = B\bigcup A$; $AB = BA$.

(2) **结合律** $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$, $(AB)C = A(BC)$.

(3) **分配律** $(A\bigcup B)C = (AC)\bigcup(BC)$, $(AB)\bigcup C = (A\bigcup C)(B\bigcup C)$.

(4) **对偶律** (De Morgan 定理) $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A}\bigcup\overline{B}$.

一般地, 对 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 或者可列个事件 $A_i (i = 1, 2, \cdots)$, 也有以下类似的结果:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

**例 3** 向指定目标射三枪, 观察射中目标的情况. 用 $A_1$, $A_2$, $A_3$ 分别表示事件 "第一、二、三枪击中目标", 试用 $A_1$, $A_2$, $A_3$ 表示以下各事件:

(1) 只击中第一枪;

(2) 三枪都没击中;

(3) 至少击中一枪;

(4) 至多击中两枪.

**解** (1) 事件 "只击中第一枪", 意味着第二枪不中, 第三枪也不中, 所以可表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件 "三枪都没击中", 就是事件 "第一、二、三枪都未击中", 所以可表示成 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(3) 事件 "至少击中一枪", 就是事件 "第一、二、三枪至少有一次击中", 所以可表示成 $A_1\bigcup A_2\bigcup A_3$ 或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\bigcup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\bigcup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\bigcup A_1A_2\overline{A_3}\bigcup A_1\overline{A_2}A_3\bigcup\overline{A_1}A_2A_3\bigcup A_1A_2A_3$.

(4) 事件 "至多击中两枪" 意味着三枪不能同时击中, 所以可表示成 $\overline{A_1A_2A_3}$ 或 $\overline{A_1}\bigcup\overline{A_2}\bigcup\overline{A_3}$.

## 习 题 1

1. 设样本空间 $\Omega = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$, 事件 $A = \{x \mid 0.5 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{x \mid 0.8 < x \leqslant 1.6\}$, 具体写出下列各事件:

(1) $AB$; (2) $A - B$; (3) $\overline{A - B}$; (4) $\overline{A\bigcup B}$.

2. 设 $A, B, C$ 为 3 个事件, 试用 $A, B, C$ 表示下列各事件: