工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目

# 线性代数

◎ 朱柘琍 王学蕾 主编
◎ 时彬彬 陈丽珍 张莉 副主编

Linear Algebra

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目

# 线性代数

◎ 朱柘琍 王学蕾 主编
◎ 时彬彬 陈丽珍 张莉 副主编

Linear
Algebra

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 朱栢琍，王学蕾主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2016.8
ISBN 978-7-115-42692-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①朱… ②王… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第187560号

## 内容提要

本书以行列式、矩阵、向量为工具，以线性方程组为核心，强调矩阵初等变换的作用，阐明了线性代数的基本概念、理论和方法。本书立足于学生实际需求编写，取材广泛，内容丰富，突出对数学能力的培养，强化知识的应用，体现数学思想和方法。

本书内容由浅入深、循序渐进，一些结论的证明过程简单明了，便于教师和学生在轻松愉悦的教、学过程中把握线性代数课程的理论与方法。本书在基本内容的基础上还配有丰富实例和知识小结。同时，每节有适量基础习题，每章有综合练习题，可以帮助学生巩固所学内容。本书参考学时为 30～38 学时，可作为高等学校农、林、经济及工科类专业的教材使用。

◆ 主　　编　朱栢琍　王学蕾
副 主 编　时彬彬　陈丽珍　张　莉
责任编辑　吴　婷
责任印制　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：12　　　　　　2016 年 8 月第 1 版
字数：237 千字　　　　2016 年 8 月河北第 1 次印刷

定价：29.80 元

读者服务热线：(010) 81055256　印装质量热线：(010) 81055316
反盗版热线：(010) 81055315

# 前言

Preface

线性代数是高等学校理、工、经、管、农林各专业的一门重要的数学基础课程，用于提供自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具。

近年来，大学数学基础课程教学的一个重要且显著的变化就是以学生掌握本课程的基本内容和基本方法为前提适当减少学时，这就需要一本便于学生自学且能有助于他们牢固掌握线性代数基础知识的教材。

本书编者正是以便于少学时教和学为指导思想，在山东农业大学数学基础课多年的教学设计和多次的教学改革实践的基础上，吸收、借鉴我系优秀任课教师和现有多种教材的优点，结合编者多年的教学实践编写而成的。

全书符合教育部《大学数学课程教学基本要求》对本课程的全部要求。

本书内容共分 7 章，包括行列式、矩阵、$n$ 维向量、线性方程组、相似矩阵、二次型、线性空间与线性变换。全书贯穿“以行列式、矩阵、向量为工具，以线性方程组为核心”的基本观点，强调矩阵初等行变换的作用，阐明了线性代数的基本概念、理论和方法。在具体内容的编排上，力求概念的自然导入，内容由浅入深、循序渐进，一些结论的证明过程简单明了。

本书在具体内容的安排上具有以下特点：

一、保持了线性代数的完整性和结构的合理性。

二、概念的引入自然、浅显，是基本思想的自然延伸和推广，便于学生理解和掌握。

三、注重几何背景，建立几何直观，从具体看抽象，将概念形象化以加深理解。

四、强调实际背景，紧密联系实际，服务专业课程。

五、所配习题数量适当，立足于帮助读者掌握基本概念和基本方法，部分习题的编排适当兼顾研究生入学考试的要求，它们有一定难度和技巧，供读者参考。

本书的目标是让教师和学生在轻松愉悦的教、学中把握线性代数课程的理论与方法，分享线性代数的乐趣，帮助学生掌握基本概念和方法，便于在后续相关专业课和以后的实际工作中使用。

本书的参考学时为 30～38 学时，各章的参考学时见下面的学时分配表。

**学时分配表**

| 项　目 | 课程内容 | 学　时 |
|---|---|---|
| 第 1 章 | 行列式 | 4～5 |
| 第 2 章 | 矩阵 | 8～10 |
| 第 3 章 | $n$ 维向量 | 6～8 |
| 第 4 章 | 线性方程组 | 4～5 |
| 第 5 章 | 相似矩阵 | 4～5 |
| 第 6 章 | 二次型 | 4～5 |
| *第 7 章 | 线性空间与线性变换 | |
| 课时总计 | | 30～38 |

本书标“*”的部分是对大纲内容的拓广与加深，但也是部分专业研究生考试的内容，教师可在教学中做出适当取舍。

本书第 1、4、7 章由王学蕾编写，第 2、5 章由朱栢琍编写，第 3、6 章由时彬彬编写，最后由朱栢琍统一定稿。

我系多位教师均仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，学院领导也提供了指导意见。在此对他们的帮助与指导表示感谢。

编　者

2016 年 5 月 12 日

# 目录

Contents


**第 1 章　行列式** ············ 1

1.1　二阶与三阶行列式 ············ 1

1.2　$n$ 阶行列式 ············ 4

1.3　克莱姆（Cramer）法则 ············ 16

本章小结 ············ 19

实例介绍 ············ 20

综合练习题一 ············ 20

**第 2 章　矩阵** ············ 22

2.1　矩阵的概念 ············ 22

2.2　矩阵的运算 ············ 25

2.3　逆矩阵 ············ 36

2.4　分块矩阵 ············ 43

2.5　矩阵的初等变换和初等矩阵 ············ 51

2.6　矩阵的秩 ············ 58

本章小结 ············ 66

实例介绍 ············ 68

综合练习题二 ············ 69

**第 3 章　$n$ 维向量** ············ 72

3.1　$n$ 维向量组 ············ 72

3.2　向量组的线性关系 ············ 75

3.3　向量组的秩和极大线性无关组 ············ 80

3.4　向量的内积与正交矩阵 ············ 85

本章小结 ············ 91

实例介绍 ············ 92

综合练习题三 ············ 92

**第 4 章 线性方程组** …… 95
4.1 高斯（Gauss）消元法与矩阵的行变换 …… 95
4.2 齐次线性方程组解的性质与结构 …… 101
4.3 非齐次线性方程组解的性质与结构 …… 106
本章小结 …… 111
实例介绍 …… 113
综合练习题四 …… 114

**第 5 章 相似矩阵** …… 117
5.1 方阵的特征值与特征向量 …… 117
5.2 方阵的相似对角化 …… 126
5.3 实对称矩阵的相似对角化 …… 130
本章小结 …… 134
实例介绍 …… 135
综合练习题五 …… 136

**第 6 章 二次型** …… 139
6.1 二次型的概念 …… 139
6.2 配方法化二次型为标准形 …… 143
6.3 合同变换法化二次型为标准形 …… 145
6.4 正交变换化二次型为标准形 …… 148
6.5 惯性定律与正定二次型 …… 153
本章小结 …… 158
综合练习题六 …… 158

***第 7 章 线性空间与线性变换** …… 161
7.1 线性空间的定义与性质 …… 161
7.2 线性空间的基、维数与坐标 …… 165
7.3 线性变换及其矩阵表示 …… 171
本章小结 …… 174
综合练习题七 …… 175

**第 8 章 习题答案** …… 176

# 第 1 章　行列式

行列式是数学研究中的一个重要工具. 本章在介绍二阶、三阶行列式的基础上，归纳给出一般 $n$ 阶行列式的定义，讨论行列式的基本性质，给出利用行列式求解线性方程组的方法——克莱姆(Cramer)法则.

## 1.1　二阶与三阶行列式

### 一、二阶行列式

考虑用消元法求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $x_1$，$x_2$ 是未知量. 为消去 $x_2$，用 $a_{22}$ 和 $a_{12}$ 分别乘以两个方程的两端，得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2 a_{12}. \end{cases}$$

然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

同理，消去 $x_1$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1.1)有唯一的解

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

这就是一般二元线性方程组(1.1.1)的求解公式. 为了便于记忆这个公式，我们引进新的记号来表示结果(1.1.2).

**定义 1.1.1(二阶行列式)　设有 4 个可以进行加法和乘法运算的元素 $a$，$b$，$c$，$d$ 排成两行两列，引用符号**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.1.3}$$

**并称之为二阶行列式. 行列式也可简记为 $D$.**

由定义可知：二阶行列式实际上是一个算式，即从左上角到右下角的对角线(主对角线)上两元素相乘之后，减去从右上角到左下角的对角线(副对角线)上两元素的乘积，称之为计算二阶行列式的对角线法则.

**注**：这里 $a$，$b$，$c$，$d$ 都是数，该行列式的计算结果就是一个数. 例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-2\times3=-2.$$

按照二阶行列式的定义，式(1.1.2)中 $x_1$，$x_2$ 的表达式中的分母、分子可分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然，$D_i(i=1, 2)$ 即为 $D$ 中的第 $i$ 列换成方程组(1.1.1)的常数列所得到的行列式.

于是，当 $D\neq0$ 时，二元线性方程组(1.1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.1.4}$$

此为求解二元线性方程组的**克莱姆(Cramer)法则**.

**记忆方法：**

(1)$x_1$，$x_2$ 的分母相同，其行列式由(1.1.1)中未知量系数按其原有的相对位置排成，称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**.

(2)$x_1$，$x_2$ 的分子不同，分别是把分母行列式中 $x_1$，$x_2$ 的系数位置换成两个常数项，并保持两数原有的上下相对位置.

**例 1.1.1** 用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+\ \ x_2=1. \end{cases}$$

**解** 由于 $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq0$，且

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=14,\ D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-21.$$

由式(1.1.4)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-3.$$

## 二、三阶行列式

同样，利用二阶行列式定义三阶行列式为以下三项的代数和：

**定义 1.1.2(三阶行列式)　设有 9 个可以进行加法和乘法运算的元素排成三行三列，引用符号**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1.1.5}$$

**它的每项是原行列式中第一行的元素与划去该元素所在的行和列后的一个二阶行列式之积，每项的符号为 $(-1)^{1+j}$，其中 $j$ 为该元素所在的列数 $(j=1, 2, 3)$.**

**例 1.1.2** 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

**解** $D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$$+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\times(-5)+(-3+1)+(9+2)=-1.$$

类似于二元线性方程组的克莱姆法则，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，线性方程组(1.1.6)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.1.7}$$

此为求解三元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

**例 1.1.3** 用三阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ -x_1+3x_2-x_3=-1. \end{cases}$$

**解** 由于 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，且

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-6.$$

由式(1.1.7)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=6.$$

可以看出，对于未知量个数等于方程个数的二、三元线性方程组，利用行列式这个工具来求解(如果有解)十分简便，结果也容易记忆. 我们自然想到对未知量个数等于方程个数的 $n(n>3)$ 元线性方程组的求解，是否也有类似的结果? 下一节，我们将用递归的方法给出 $n$ 阶行列式的定义并讨论它们的一般性质和应用.

**习题 1-1**

1. 计算下列 3 阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix}3&6&1\\1&0&5\\3&1&7\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}3&0&4\\2&3&2\\0&5&-1\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix}3&2&1\\2&3&2\\1&2&3\end{vmatrix}$.

2. 求解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2=3,\\2x_1+3x_2=4.\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x\cos\theta-y\sin\theta=a,\\x\sin\theta+y\cos\theta=b.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2,\\2x_1+x_2-3x_3=1,\\-x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$　(4) $\begin{cases}2x_1-x_3=1,\\2x_1+4x_2-x_3=1,\\-x_1+8x_2+3x_3=2.\end{cases}$

## 1.2　*n* 阶行列式

### 一、*n* 阶行列式的定义

**定义 1.2.1　设有 $n^2$ 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 $n$ 行 $n$ 列，引用符号**

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\qquad(1.2.1)$$

**称为 $n$ 阶行列式，它是一个算式，有时也用记号 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 表示这个 $n$ 阶行列式.** 其中 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 称为该行列式的元素，其中第一个下标 $i$ 表示该元

素在第 $i$ 行，第二个下标 $j$ 表示该元素在第 $j$ 列. 在本书中，行列式的元素都是数(实数)，这时行列式是一个数值，该数值可归纳定义如下：

当 $n=1$ 时，一阶行列式的值定义为 $D_1=\det(a_{11})=a_{11}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.2.2}$$

其中
$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$
而

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 $M_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的**余子式**，$A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的**代数余子式**. 显然 $M_{ij}$ 为一个 $n-1$ 阶行列式，它是在 $D_n$ 中划去元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列后得到的一个行列式.

由于 $M_{1j}$ 是划去 $D_n$ 中第一行元素 $a_{1j}$ 所在行与列的元素后得到的余子式 ($j=1, 2, \cdots, n$)，因而 $A_{1j}$ 为 $D_n$ 的第一行诸元素 $a_{1j}$ 所对应的代数余子式. 按这一规则求行列式的值，我们也称式(1.2.2)为行列式 $D_n$ 按第一行的展开式，即行列式的值等于它的第一行诸元素与其对应的代数余子式乘积之和.

从 $n$ 阶行列式定义容易看出，$n$ 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项，每一项的形式为

$$\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列.

定义 1.2.1 是基于“余子式”的一种行列式定义，下面介绍与之等价的基于“逆序数”的另一种行列式定义. 先介绍逆序数的概念.

$n$ 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 按一定的次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 $n$ **级排列**，记为 $i_1i_2\cdots i_n$. 显然，$n$ 级排列共有 $n!$ 个. 其中，排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**. 如果在一个 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中有 $i_s$ 排在 $i_t$ 的前面，但 $i_s>i_t$，则这一对数与自然排列的顺序相反，我们称这一对数 $i_s$，$i_t$ 是排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 于是有

$$\tau(12\cdots n)=0,$$

$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=$($i_2$ 前面比 $i_2$ 大的数的个数)$+$($i_3$ 前面比 $i_3$ 大的数的个数)$+\cdots+$($i_n$ 前面比 $i_n$ 大的数的个数). 例如，

$$\tau(1432)=3,\ \tau(3412)=4,\ \tau(n, n-1, \cdots, 1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

**定义 1.2.2** 设有 $n^2$ 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 $n$ 行 $n$ 列，引用符号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**称为 $n$ 阶行列式，它是一个算式，其结果定义为**

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}. \tag{1.2.3}$$

它是 $n$! 项的代数和. 这些项是一切可能取自于 $D$ 的不同行与不同列的 $n$ 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$. 项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}$.

可以证明定义 1.2.1 与定义 1.2.2 等价，此处从略. 本书全程采用基于"余子式"的行列式定义.

**例 1.2.1** 试用行列式的定义，求行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**解** $D=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$=15(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$=-77.$

**例 1.2.2** 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**解** 连续使用行列式定义，有

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

该行列式主对角线上方的元素全为零，称之为**下三角行列式**(主对角线下方的元素全为零的行列式，称为**上三角行列式**).

同理，上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，主对角线以外元素全为零的行列式(称为**对角行列式**)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，可以定义关于副对角线的**对角行列式以及三角行列式**. 利用行列式的定义，关于**副对角线的对角行列式以及上、下三角行列式**，分别有如下结论：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

## 二、*n* 阶行列式的性质

一般来说，用行列式的定义计算 $n$ 阶行列式是很麻烦的. 为此，需要通过行列式的性质，简化行列式的计算. 先介绍两个基本性质.

首先引入转置行列式的概念.

考虑 $n$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 $D$ 的行列互换，得到一个新行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 $D$ 的**转置行列式**，记为 $D^{\mathrm{T}}$. 显然，$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

例如，设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. 易求得 $D=-14$，$D^{\mathrm{T}}=-14$，即 $D=D^{\mathrm{T}}$. 一般地，我们有以下结论.

**性质 1　行列式的值与它的转置行列式的值相等.**

由性质 1 可知，行列式的行和列具有同等的地位. 因此，行列式的性质凡是对行成立的，对列同样成立，反之亦然.

**性质 2　交换行列式的两行(或两列)，行列式改变符号，即**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

**则 $D=-D_1$. 其中，行列式 $D_1$ 是由行列式 $D$ 交换其 $i$、$j$ 两行得到的.**

对于二阶、三阶行列式，性质 1、性质 2 可以直接验证；对于 $n$ 阶行列式，可用归纳法证明. 在此证明略.

**推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则行列式等于零.**

**证**　设行列式 $D$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行相同 $(i\neq j)$. 由性质 2，交换这两行后，行列式改变符号，所以新的行列式值为 $-D$；但另一方面，交换相同的两行，行列式并没有改变，因此 $D=-D$. 即 $D=0$.

**性质 3　如果行列式某一行(列)的元素有公因子，则可以将公因子提到行列式外面. 即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**也可以说，用数 $k$ 乘行列式的某一行(列)，其结果就等于用数 $k$ 去乘这个行列式**(证明略).

**推论 1** 如果行列式有一行(列)元素全为零，则该行列式等于零.

**推论 2** 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则这个行列式等于零.

**性质 4** 如果行列式的某一行(列)元素都可以表示为两项的和，则这个行列式可以表示为两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

或者说，若两个 $n$ 阶行列式中除某一行(列)之外，其余 $n-1$ 行(列)对应相同，则两个行列式之和只对该行(列)对应元素相加，其余行(列)保持不变.

**证** $\text{左边} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} + \sum_{j=1}^{n}b_{ij}A_{ij} = \text{右边}.$

**性质 5** 行列式的第 $i$ 行(列)的元素的 $k$ 倍加到第 $j$ 行(列)的对应元素上，行列式的值不变，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 由性质 4，上式右边的行列式可以拆分为两个行列式的和. 对于这两个行列式，运用性质 3 的推论 2，可得结论.

## 三、行列式的展开式

我们将用下面定理说明，行列式不仅可像降价定义那样按第一行展开，也可以按任一行或列展开.

**定理 1.2.1** **行列式可按任意一行(列)展开，其展开式为**

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{it}\ (i=1,2,\cdots,n), \tag{1.2.4}$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{t=1}^{n}a_{tj}A_{tj}\ (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.5}$$

**称为行列式按行(列)展开法则.**

**证** 将行列式 $D$ 中第 $i$ 行依次与位于它上方的相邻行对换 $i-1$ 次，调到第 1

行，再按降阶定义展开，得

$$D=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}\sum_{t=1}^{n}(-1)^{1+t}a_{it}M_{it}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}(-1)^{i+t}a_{it}M_{it}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{it}.$$

**定理 1.2.2　行列式的某一行(列)的元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即**

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j), \tag{1.2.6}$$

或

$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=0(s\neq t). \tag{1.2.7}$$

**证**　$i\neq j$ 时，有

$$D+\sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{jt}=\sum_{t=1}^{n}a_{jt}A_{jt}+\sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{jt}=\sum_{t=1}^{n}(a_{jt}+a_{it})A_{jt}.$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1}+a_{i1} & \cdots & a_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D.$$

所以 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$.

综合定理 1.2.1 和定理 1.2.2，有

$$\sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{jt}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.2.8}$$

或

$$\sum_{t=1}^{n}a_{ti}A_{tj}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.2.9}$$

我们可以利用行列式的上述性质，来简化行列式的计算. 下面将通过一些典型的例题，介绍行列式计算的一些常用方法.

## 四、$n$ 阶行列式的计算

**例 1.2.3**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$