

● 普通高等教育“十三五”规划教材

信号与系统

主 编 张 宇
副主编 熊 炜 黄道敏



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

信号与系统

主 编 张 宇

副主编 熊 炜 黄道敏



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

• 北京 •

内 容 提 要

本书主要阐述确定性信号的时域和频域分析基本方法,线性时不变系统的特性,以及确定性信号通过线性时不变系统的时域和变换域分析方法。全书共8章,主要内容包括信号与系统的基本概念,连续时间系统的时域、频域和复频域(s 域)分析,离散信号与系统的时域和复频域(z 域)分析以及 Simulink 在信号与系统中的仿真应用。本书内容丰富,方法科学,内容安排上深入浅出,注重理论与工程应用背景相结合,便于教学和学生自学。

本书可作为高等院校电气信息类专业“信号与系统”课程的教材,也可供相关专业的工作人员自学和参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统 / 张宇主编. — 北京: 中国水利水电出版社, 2016.11
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5170-4833-6

I. ①信… II. ①张… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第257367号

策划编辑: 周益丹 责任编辑: 李 炎 加工编辑: 赵佳琦 封面设计: 李 佳

书 名	普通高等教育“十三五”规划教材 信号与系统 XINHAO YU XITONG
作 者	主 编 张 宇 副主编 熊 炜 黄道敏
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)、82562819 (万水)
经 售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	三河市铭浩彩色印装有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 21.25印张 523千字
版 次	2016年11月第1版 2016年11月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	42.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

前 言

“信号与系统”课程是电气工程、自动化、通信工程、电子信息工程、电子科技与技术等专业的核心基础课程，是一门重要的承上（高等数学、线性代数、复变函数、电路分析基础、模拟电子技术等）启下（数字信号处理、通信原理、高频电子线路、自动控制技术、电子测量技术等）的课程。可以说“信号与系统”课程教学的成败直接决定是否能够培养出合格的电气信息类专业人才。

“信号与系统”是通信与信息系统、信号与信息处理等专业的研究生入学考试必考课程。为了适应现代信号处理技术的发展以及研究生入学考试要求，同时解决授课学时与教学内容、理论传授与实践练习之间的矛盾，通过与“数字信号处理”课程整合，目前“信号与系统”课程主要侧重于连续时间信号与系统的时域、频域和复频域分析，其后续课程“数字信号处理”课程则主要侧重于离散时间信号与系统的时域、频域和复频域分析。

本书系“普通高等教育‘十三五’规划教材”，根据教育部高等学校电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会制定的“信号与系统课程教学基本要求”修订，在内容组织和选取上有较大的变化，基本上属于重写和重新组织，并有一定的补充。这些变化的目的在于帮助教师更好地讲授这门课以及学生更容易掌握这门课的内容。

在实践教学环节，逐渐放弃了传统、落后的实验箱，而将现代化仿真工具软件 Simulink 引入实践教学环节，加入课程设计。此外，“信号与系统”的实践教学还体现在大学生科技创新实践以及全国电子设计竞赛中，通过积极引导学生参加这样的实践活动，不但提高了学生对课堂知识的理解，而且也增加了学生的科技创新与实践能力。

编者在不断跟踪国内外“信号与系统”教材体系和内容变化的基础上，结合自己长期从事本课程双语教学的实践体会，并针对我国教学体系与教学实践改革的现状和要求，以及学生的具体情况，本着知识体系完备、例题典型丰富、强化基础、贴近实际、叙述简洁、讲解透彻、便于读者自学的原则，改版编写了这本反映现代“信号与系统”基本原理、教学体系和内容的教材。

本书第 1、2、3、5 章由张宇副教授执笔，第 4 章由黄道敏讲师执笔，第 6 章由熊炜副教授执笔，第 7 章由熊炜副教授和曾春艳讲师执笔，第 8 章由康瑞讲师执笔。全书由张宇副教授负责统稿。

在本书的编写过程中，研究生徐晶晶、吴俊驰、刘小镜等同学参与了部分文字的录入和插图的制作，在此向他们一并表示衷心感谢。

限于编者的水平，书中恐有疏误之处，恳请读者批评指正。

作者于湖北工业大学

2016 年 7 月

目 录

前言

第1章 信号与系统的基本概念	1
1.1 信号及其描述方式	1
1.1.1 信号	1
1.1.2 信号的描述方式	1
1.2 信号的分类	1
1.3 常用单元信号	4
1.3.1 常用连续信号	4
1.3.2 常用奇异信号	6
1.4 信号的运算	12
1.5 信号的分解与合成	13
1.6 系统的模型	15
1.7 系统的分类	16
1.7.1 连续时间系统与离散时间系统	16
1.7.2 即时系统与动态系统	17
1.7.3 集总参数系统与分布参数系统	17
1.7.4 线性系统与非线性系统	17
1.7.5 时变系统与非时变系统	18
1.7.6 可逆系统与不可逆系统	19
1.7.7 因果与非因果系统	19
1.7.8 稳定系统与非稳定系统	20
1.8 系统分析方法	20
习题1	21
第2章 连续时间系统的时域分析	27
2.1 系统的数学模型——微分方程与传输算子	27
2.2 系统微分方程的经典解	31
2.3 系统零输入响应的求解	33
2.4 系统的冲激响应和阶跃响应	37
2.4.1 系统的冲激响应	37
2.4.2 单位冲激响应的求法	38
2.4.3 系统的阶跃响应及其求法	42
2.5 系统零状态响应——卷积积分	44
2.6 卷积运算的性质	47

2.6.1 卷积代数	47
2.6.2 卷积的微分与积分	48
2.6.3 与冲激函数或阶跃函数的卷积	49
习题2	53
第3章 连续时间信号的频谱——傅里叶变换	58
3.1 用完备正交函数集表示信号	58
3.1.1 正交矢量	58
3.1.2 正交函数与正交函数集	59
3.1.3 完备的正交函数集	59
3.1.4 常见的完备正交函数集	60
3.2 周期信号的傅里叶级数	61
3.2.1 三角函数形式的傅里叶级数	61
3.2.2 傅里叶级数的性质	63
3.2.3 指数形式的傅里叶级数	67
3.3 周期矩形脉冲的频谱分析	70
3.3.1 周期矩形脉冲信号的频谱	70
3.3.2 周期矩形脉冲频谱结构分析	72
3.3.3 周期信号频谱的特点	74
3.4 非周期信号频谱——傅里叶变换	74
3.4.1 频谱密度函数	74
3.4.2 典型非周期信号的傅里叶变换	78
3.5 傅里叶变换性质	83
3.5.1 傅里叶变换性质	83
3.5.2 周期信号的傅里叶变换	95
3.6 能量谱和功率谱——帕塞瓦尔定理	98
3.6.1 周期信号的功率谱、帕塞瓦尔恒等式	98
3.6.2 非周期信号的能量谱、帕塞瓦尔定理	100
习题3	101
第4章 连续时间系统的频域分析	107
4.1 系统的频率特性	107
4.2 系统对非正弦周期信号的响应	109

4.3 系统对非周期信号的响应	111	5.7.4 系统的框图	157
4.4 信号无失真传输条件	114	5.8 系统的信号流图与梅森公式	159
4.4.1 无失真概念	114	5.8.1 信号流图的定义	159
4.4.2 无失真传输条件	114	5.8.2 三种运算器的信号流图表示	159
4.5 理想低通滤波器的冲激响应与阶跃响应	116	5.8.3 模拟图与信号流图的相互转换规则	160
4.5.1 理想低通滤波器的冲激响应	116	5.8.4 信号流图的名词术语	162
4.5.2 理想低通滤波器的阶跃响应	117	5.8.5 梅森公式	163
4.6 抽样定理	118	5.9 系统函数	165
4.6.1 抽样的概念	118	5.9.1 系统函数的定义与分类	165
4.6.2 时域抽样	119	5.9.2 系统函数的一般表示式及其零、极点图	167
4.6.3 时域抽样定理	120	5.9.3 系统函数的应用	170
4.6.4 频域抽样及其抽样定理	121	习题 5	184
4.7 调制与解调	123	第 6 章 离散信号与系统的时域分析	192
4.7.1 调制	123	6.1 引言	192
4.7.2 解调	124	6.2 序列及其基本运算	192
4.7.3 调幅信号作用于线性系统	124	6.2.1 序列的定义	192
4.8 频分复用与时分复用	125	6.2.2 典型序列	193
4.8.1 频分复用	125	6.2.3 序列的基本运算	197
4.8.2 时分复用	125	6.3 卷积和	199
习题 4	127	6.3.1 卷积和的定义	199
第 5 章 连续时间系统的复频域分析	131	6.3.2 卷积和的性质	202
5.1 拉普拉斯变换	131	6.3.3 常用序列的卷积和公式	204
5.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换	131	6.4 离散时间系统的建模与求解	205
5.1.2 收敛域	132	6.4.1 LTI 离散系统	206
5.2 单元信号的拉普拉斯变换	133	6.4.2 LTI 离散系统的数学模型——差分方程	207
5.3 拉普拉斯变换的性质	134	6.4.3 线性差分方程的求解方法	210
5.4 拉普拉斯反变换	136	6.5 离散时间系统的零输入响应	210
5.4.1 简单函数的拉普拉斯反变换	136	6.5.1 一阶线性时不变离散系统的零输入响应	210
5.4.2 部分分式展开	137	6.5.2 N 阶线性时不变离散系统的零输入响应	211
5.4.3 待定系数的求法	138	6.6 离散时间系统的零状态响应	213
5.4.4 围线积分法	141	6.6.1 离散系统的转移(传输)算子	214
5.5 线性系统的拉普拉斯变换分析法	142	6.6.2 单位脉冲响应 $h(n)$	214
5.5.1 微分方程的复频域求解	142	6.6.3 零状态响应	217
5.5.2 电路的 s 域模型	144	6.7 系统差分方程的经典解	218
5.6 双边拉普拉斯变换	147	习题 6	220
5.7 系统的模拟图与框图	151		
5.7.1 三种运算器	151		
5.7.2 系统模拟的定义与系统的模拟图	152		
5.7.3 常用的模拟图形式	153		

第 7 章 z 变换与离散系统的 z 域分析	226	7.9.3 系统的因果稳定性	263
7.1 引言	226	7.9.4 $H(z)$ 的零、极点与系统频响	264
7.2 z 变换定义	226	7.10 z 变换与拉氏变换、傅氏变换关系	267
7.3 z 变换收敛域	227	习题 7	269
7.4 典型序列的 z 变换	231	第 8 章 Simulink 在信号与系统中的仿真应用	274
7.5 z 变换的性质	234	8.1 Simulink 仿真基础	274
7.6 逆 z 变换	245	8.2 Simulink 设计流程	275
7.7 z 变换求解差分方程	249	8.3 信号的时域分析	276
7.8 离散系统的表示和模拟	252	8.4 连续 LTI 系统时域和频域分析	286
7.8.1 离散系统的方框图表示	252	8.5 连续时间信号的频域分析	298
7.8.2 离散系统的信号流图表示	255	8.6 离散 LTI 系统 z 域分析	302
7.8.3 离散系统的模拟	257	附录 A Simulink 常用命令	309
7.9 系统函数与系统特性	261	附录 B Simulink 常用模块	311
7.9.1 系统函数	261	习题参考答案	315
7.9.2 $H(z)$ 的零、极点分布与时域特性	262	参考文献	332

第1章 信号与系统的基本概念

步入二十一世纪后，人类社会就进入了信息社会，信息社会的关键是信息的使用和传递。消息依附于某一物理量上就构成了信号。信息与信号密切相关，在现代社会中，人们广泛地涉足信号与系统的问题。特别是随着近代科学技术的发展，大规模、超大规模集成电路的出现，数字计算机的广泛应用，使得信号与系统日益复杂和综合，从而大大促进了其理论研究的发展。

在系统理论研究中主要包括两大任务：其一是系统分析；其二是系统综合。系统分析主要是处理整个系统与输入及输出信号的关系，以完成系统所具有的功能；系统综合则是为达到预期输出的目的而完成对物理模型的建立。

系统的概念是广义的，它极其广泛地出现在各个领域。本书仅限于对电信号及电系统的分析。

1.1 信号及其描述方式

1.1.1 信号

所谓信号，广泛地说其是随时间变化的物理量，是传递和记录信息的一种工具。从数学的角度而言，它可以看成是一个或多个独立变量的函数表达式。从通信技术角度而言，是借助电、光、声信号将文字、图像、语音、数码等信息从甲地传递到乙地或对不同信号进行各种形式的处理。本书中的电信号主要是指随时间或频率变化的电压量及电流量。

1.1.2 信号的描述方式

信号的描述方式主要有两种：一种是解析函数表达形式，另一种是图像表达形式。信号的独立变量与其函数的依托关系是多种形式的，例如以时间特征量作为自变量来表示信号，则称之为时域表示法，即把一个信号随时间变化的规律用 $x = x(t)$ 的解析函数表达式描述出来，或通过图像的形式描述出来。

若以频率特征量作为自变量来描述信号，则称之为频域表示法。这种信号既可以用解析函数表示也可以用图像表示。

1.2 信号的分类

由语音、图像、数码等形成的电信号，其形式是多种多样的，根据其本身的特征，可按以下几种方式分类。

1. 确定性信号与随机信号

如果信号可以表示为一个或几个自变量的确定函数，则称此信号为确定性信号，如正弦信号、阶跃信号等。

如果一个信号在发生以前无法确切地知道它的波形，即该信号没有确定的函数表达式，而

只能预测该信号对某一数值的概率，这样的信号就称之为随机信号。例如，信息传输过程中的信号严格来说都是随机的，因为这种信号中包含着干扰和噪声。

2. 周期信号与非周期信号

如果一个信号每隔固定的时间 T 都精确地再现该信号的本身，则称之为周期信号。周期信号具有两大特点，即周而复始且无始无终。一个连续时间周期信号的表达式为

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1-1}$$

满足此式的最小 T 值为信号的周期。只要给出该信号在一个周期内的变化过程，便可以确定它在任意时刻的数值。

作为非周期信号则无固定时间长度的周期。例如通信系统中测试所采用的正弦波，雷达中的矩形脉冲都是周期信号，而语音波形、开关启闭所造成的瞬态则是非周期信号。

3. 连续时间信号与离散时间信号

如果在所讨论的时间间隔内，除若干个不连续点之外，对于任意时间值都可给出确定的函数值，此信号就称为连续信号。例如，正弦波或如图 1-1 所示的矩形脉冲都是连续信号。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的（只取某些规定值）。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。离散信号在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，在其他时间没有定义，如图 1-2 所示的信号。此图对应的函数 $x(t)$ 只在 $t = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ 等离散时刻给出函数值 $2.1, -1, 1, 2, 0, 4.3, -2 \dots$ 。给出函数值的离散时刻的间隔可以是均匀的，也可以是不均匀的，一般情况下都采用均匀间隔，如图 1-2 所示。这时，自变量 t 简化为用整数序号 n 表示，函数符号记为 $x(n)$ ，仅当 n 为整数时 $x(n)$ 才有定义。离散时间信号也可以被认为是一组序列值的集合，用 $\{x(n)\}$ 表示。

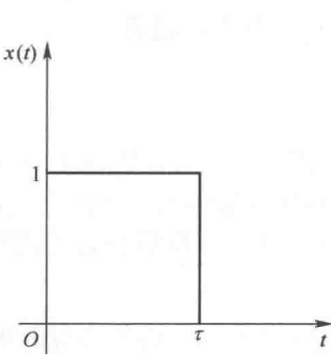


图 1-1 矩形脉冲

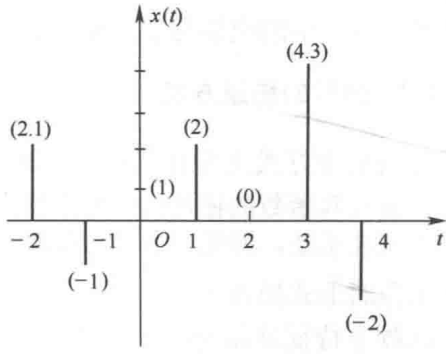


图 1-2 离散信号（抽样信号）

图 1-2 所示信号写作序列为

$$x(n) = \begin{cases} 2.1 & (n = -2) \\ -1 & (n = -1) \\ 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 2) \\ 4.3 & (n = 3) \\ -2 & (n = 4) \end{cases}$$

为简化表达, 此信号也可记为

$$x(n) = \{2.1 \quad -1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 4.3 \quad -2\} \quad (1-2)$$

数字 1 下面的箭头表示与 $n=0$ 相对应, 左右两边依次给出 n 取负整数和正整数时对应的 $x(n)$ 值。

如果离散时间信号的幅值是连续的, 则又可称之为抽样信号, 如图 1-2 所示。另一种情况是离散信号的幅值也被限定为某些离散值, 也即时间与幅度取值都具有离散性, 这种信号又称为数字信号, 各离散时刻的函数取值只能是“0”和“1”, 如图 1-3 所示。此外, 还可以有幅度为多个离散值的多电平数字信号。

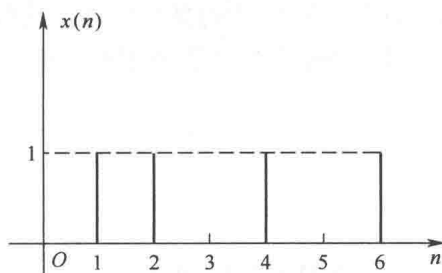


图 1-3 离散信号 (数字信号)

4. 能量信号与功率信号

能量信号是一个脉冲式信号, 它通常只存在于有限的时间间隔内。当然还有一些信号它们存在于无限的时间间隔内, 但其能量的主要部分集中在有限时间间隔内, 对于这样的信号也称之为能量信号。如图 1-4 所示都为能量信号。

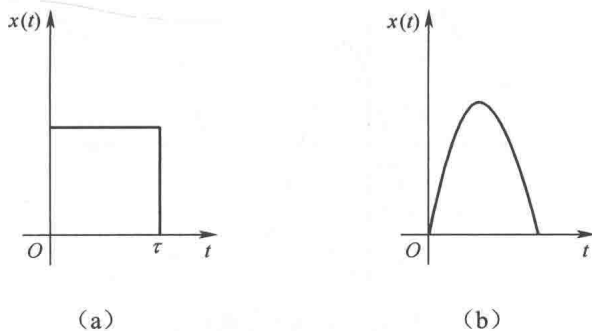


图 1-4 能量信号

作为能量信号在 $(-\infty, \infty)$ 时间间隔内, 在 1Ω 电阻上所消耗的能量可定义为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty \quad (1-3)$$

其中 $x(t)$ 既可为电压信号, 又可为电流信号。

当时间间隔趋于无限时, 其在 1Ω 电阻上所消耗的能量也趋于无穷大, 但在 1Ω 电阻上消耗的平均功率是大于零的有限值, 则这样的信号为功率信号。作为功率信号, 其平均功率可定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

由此可概括为, 若信号 $x(t)$ 能量有限, 即 $0 < E < \infty$, 此时 $P=0$, 则称该信号为能量信号; 若信号 $x(t)$ 功率有限, 即 $0 < P < \infty$, 此时 $E=\infty$, 则称该信号为功率信号。对于周期信号, 其能量随着时间的增加可以趋于无限, 但功率是有限值, 所以周期信号属于功率信号; 而非周期信号既可以是能量信号, 也可以是功率信号。

1.3 常用单元信号

对于实际信号而言, 大部分都是不同形式的复杂信号, 这些复杂信号通常是由常用的基本单元信号组合而成的, 因此了解常用单元信号是非常必要的。

1.3.1 常用连续信号

1. 正弦信号

正弦信号的定义为

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1-5)$$

式中: A 为振幅, ϕ 为初相位, ω 为角频率。它是周期为 T 的周期信号, 与频率 f 及角频率 ω 的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-6)$$

其波形如图 1-5 所示。

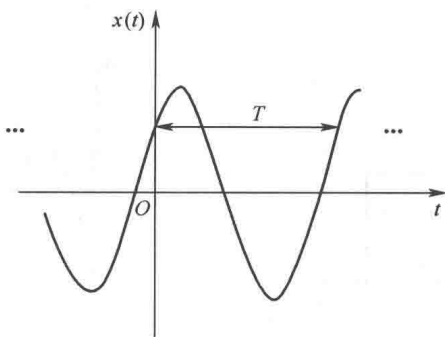


图 1-5 正弦信号波形图

2. 指数信号

指数信号的定义为

$$x(t) = Ae^{at}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1-7)$$

式中: a 为任意常数。

当 $a > 0$ 时, $x(t)$ 随 t 增大而呈指数增大; 当 $a < 0$ 时, $x(t)$ 随 t 增大而呈指数衰减; 当 $a=0$ 时, $x(t)=A$ (常数), 其波形如图 1-6 所示。

当指数信号 e^{at} 中的 a 为一复数 s 时, 该信号称之为复指数信号, 其表达式为

$$x(t) = Ae^{st} \quad (1-8)$$

式中, $s = a + j\omega$ 。由欧拉公式可知, 复指数信号可分解为实部和虚部两部分, 即:
 $e^{st} = e^{(a+j\omega)t} = e^{at}e^{j\omega t} = e^{at}(\cos \omega t + j\sin \omega t)$ 。其中, 实部包含余弦信号, 虚部包含正弦信号。而 s 的实部 a 表示了正弦和余弦振幅随时间变化的情况。当 $a > 0$ 时, 为增幅振荡信号; 当 $a < 0$ 时为减幅振荡信号; 当 $a = 0$ 时, 为等幅振荡信号。当 s 的实部 $a = 0$ 时, 复指数信号 e^{st} 将变化为纯虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 。

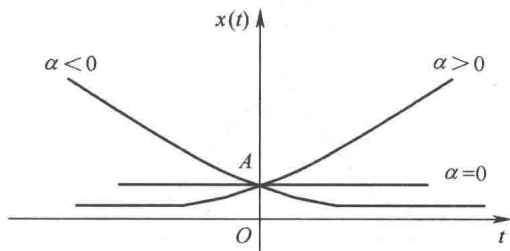


图 1-6 指数信号波形图

3. 抽样信号

抽样信号的定义为

$$x(t) = \frac{\sin t}{t} = Sa(t) \quad (1-9)$$

其波形如图 1-7 所示。

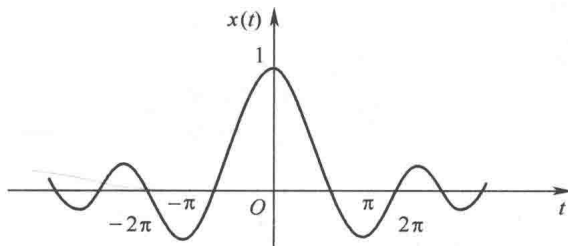


图 1-7 抽样信号波形图

该信号具有如下性质:

(1) 当 $t = 0$ 时,

$$Sa(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (1-10)$$

(2) 当 $Sa(t) = 0$ 时, 有

$$t = \pm k\pi, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1-11)$$

由式 (1-11) 可确定抽样信号的零值点。

(3) 该信号呈现与时间 t 反比衰减振荡的变化趋势。

(4) 该信号是关于时间 t 的偶函数, 即

$$Sa(t) = Sa(-t) \quad (1-12)$$

(5) 该信号在 $(-\infty, +\infty)$ 内的积分值为有限值, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi \quad (1-13)$$

4. 高斯信号

高斯信号的定义为

$$x(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-14)$$

其波形如图 1-8 所示。该信号在时间 $t \rightarrow \pm\infty$ 时趋于零。

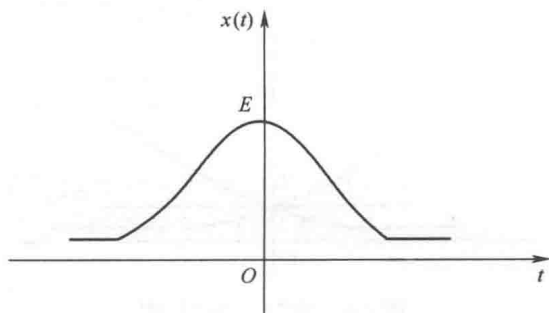


图 1-8 高斯信号波形图

1.3.2 常用奇异信号

若某一信号本身存在不连续点（跳变点）或其导数与积分存在不连续点，则称此信号为奇异信号。一般来说，奇异信号都是实际信号的理想化模型。

1. 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$

单位阶跃信号定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

其波形如图 1-9 所示。

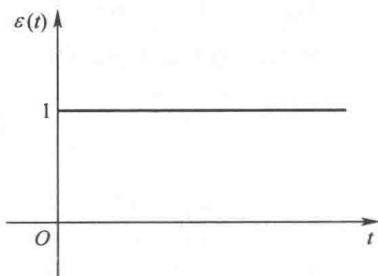


图 1-9 单位阶跃信号波形图

阶跃信号在信号分析中的作用主要是用来描述信号在某一时刻的转换。如果将此信号作为信号源放入电路中，就相当于起到了一个开关换路的作用。因此也常称此信号为“开关”函数。

2. 单位冲激信号 $\delta(t)$

单位冲激信号可定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-16)$$

其波形如图 1-10 所示。

该信号仅在 $t=0$ 的瞬间存在, 且在无穷小的时间间隔内取值为无穷大, 但积分值为有限值。图 1-10 中信号的箭头表示该信号的积分值等于 1, 通常将其积分值称之为冲激强度。

当冲激信号在 $(-\infty, \infty)$ 区间的积分值为任意常数 A 时, 则称之为强度为 A 的冲激信号, 用 $A\delta(t)$ 表示, 其波形如图 1-11 所示。

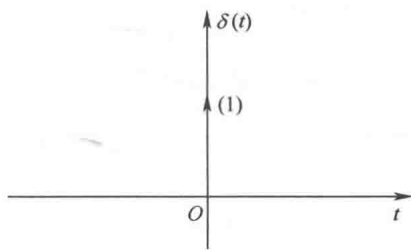


图 1-10 单位冲激信号波形图

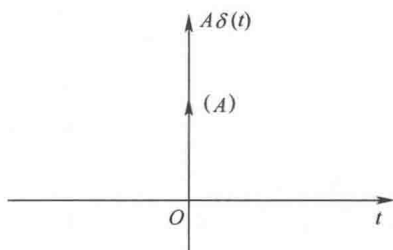


图 1-11 强度为 A 的冲激信号

实际上, 冲激信号是通过对某些满足一定条件的规则信号求极限来定义的。最简单的求极限过程如图 1-12 所示的矩形脉冲 $x(t)$, 其脉冲宽度为 τ , 幅度为 $1/\tau$ 。如果减小脉宽 τ , 则幅度 $1/\tau$ 必然增大, 但作为矩形脉冲的面积是不变的。当取 τ 趋于零的极限时, 其脉宽趋于无穷小, 而幅度趋于无穷大, 但二者乘积的极限却趋于一个有限值, 即 $x(t)$ 与横轴 t 所围成的面积恒为 1。这个矩形脉冲在 $\tau \rightarrow 0$ 时的极限情况就是单位冲激信号 $\delta(t)$, 该极限的数学表达式为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} x(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \varepsilon \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (1-17)$$

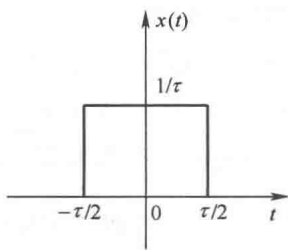


图 1-12 矩形脉冲的极限为冲激信号

冲激信号具有如下性质:

(1) 时移性质

如果单位冲激信号发生在 $t=t_0$ 处, 则该信号称为时移冲激信号。其表达式为

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t=t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (1-18)$$

其波形如图 1-13 (a) 所示。

冲激信号既可以沿时间轴右移也可以沿时间轴左移, 如图 1-13 (b) 所示。



图 1-13 时移后的冲激信号波形图

(2) 抽样性质

按照广义函数的理论, $\delta(t)$ 也可定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (1-19)$$

其中, $x(t)$ 是在 $t=0$ 时刻的连续函数。

证明: 因为 $x(t)$ 是连续函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} x(t)\delta(t)dt$$

即在 $t=0$ 时刻, $x(0^-)$ 与 $x(0^+)$ 的取值不变。由此可得

$$\int_{0^-}^{0^+} x(t)\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

由单位冲激信号的定义 $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

式 (1-19) 中给出了 $\delta(t)$ 的一个重要性质: 即冲激信号抽样性质。此式表明: $\delta(t)$ 与任意信号 $x(t)$ 相乘并在 $(-\infty, \infty)$ 时间内积分, 即可得到 $x(t)$ 在 $t=0$ 时刻 (抽样时刻) 的函数值 $x(0)$ 。

同理, 若冲激时刻发生在 $t=t_0$ 处, 则可筛选出抽样时刻 $t=t_0$ 处的函数值 $x(t_0)$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \quad (1-20)$$

(3) 乘积性质

如果 $x(t)$ 为在 $t=0$ 点连续且处处有界函数, 由式 (1-19) 可有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

由此可以得到

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1-21)$$

证明: 引入测试函数 $\phi(t)$ 。首先证明等式左端, 即

$$x(t)\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x(t)\delta(t)dt = \phi(0)x(0)$$

而等式右端为

$$x(0)\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = x(0)\phi(0)$$

可见式(1-21)的左端与右端相等。

式(1-21)表明： $\delta(t)$ 与任一信号 $x(t)$ 相乘，其乘积结果是一个强度为 $x(0)$ 的冲激信号，该冲激信号的冲激时刻不变。

将式(1-21)推广可得

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-22)$$

(4) 尺度变换性质

由式(1-19)，考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt$ ，令 $\tau = at$ ，则有

$$a > 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau = \frac{1}{a}x(0)$$

$$a < 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau = -\frac{1}{a}x(0)$$

综上所述可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}x(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$$

由此得到

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \neq 0 \quad (1-23)$$

(5) 冲激信号奇、偶性

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1-24)$$

(6) 冲激信号积分性质

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (1-25)$$

则由微、积分的互逆运算可有

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau \quad (1-26)$$

3. 符号函数 $\text{sgn}(t)$

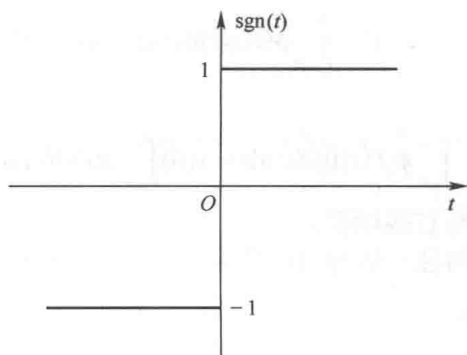
符号函数定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (1-27)$$

可以利用阶跃信号来表示符号函数

$$\text{sgn}(t) = 2\varepsilon(t) - 1 = \varepsilon(t) - \varepsilon(-t) \quad (1-28)$$

其波形如图 1-14 所示。

图 1-14 $\text{sgn}(t)$ 信号波形

4. 单位斜变信号

斜变信号也称斜坡信号或斜升信号，是指从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。如果增长的变化率是 1，就称作单位斜变信号，其波形图如图 1-15 所示，表示式为

$$r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-29)$$

如果将起始点移至 t_0 ，则表示式为

$$r(t-t_0) = \begin{cases} t-t_0, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (1-30)$$

其波形图如图 1-16 所示。

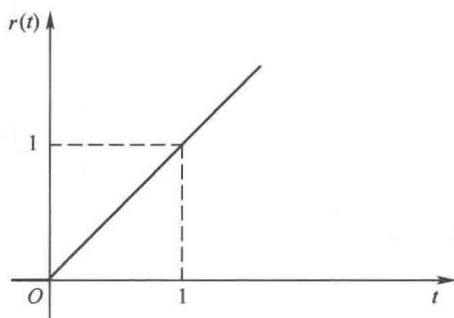


图 1-15 单位斜变信号波形图

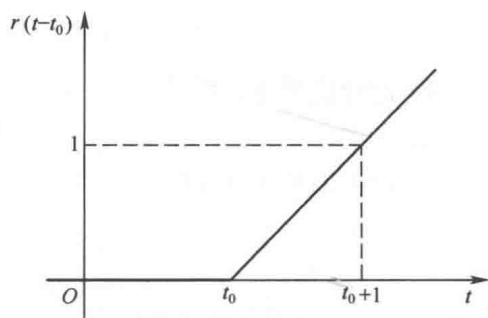


图 1-16 延迟的斜变信号波形图

5. 冲激偶信号

冲激函数的微分（阶跃函数的二阶导数）将呈现正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号，用 $\delta'(t)$ 表示。可以利用规则函数系列取极限的概念引出 $\delta'(t)$ ，在此借助三角形脉冲系列，

波形如图 1-17 (a) 所示。三角形脉冲 $s(t)$ 的底宽为 2τ ，高度为 $\frac{1}{\tau}$ ，当 $\tau \rightarrow 0$ 时， $s(t)$ 成为单

位冲激函数 $\delta(t)$ 。在图 1-17 (c) 中画出 $\frac{ds(t)}{dt}$ 波形，它是正、负极性的两个矩形脉冲，称为

脉冲偶对。其宽度都为 τ ，高度分别为 $\pm \frac{1}{\tau^2}$ ，面积都是 $\frac{1}{\tau}$ 。随着 τ 减小，脉冲偶对宽度变窄，