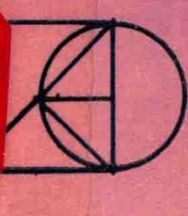
高等师范专科学校通用教材

解析几何

中南五省（区）师专《解析几何》
编写组编

湖 南 大 学 出 版 社



高等师范专科学校通用教材

解 析 几 何

中南五省（区）师专教材编委会
《解析几何》编写组　编

湖 南 大 学 出 版 社

高等师范专科学校通用教材

解析几何

中南五省（区）师专教材编委会
《解析几何》编写组　编
责任编辑：左宗仰

☆

湖南大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）

湖南省新华书店经销　　湖南省湘潭大学印刷厂印刷

☆

787×1092　32开　10.125印张　227千字　　插页 1
1989年 3 月第 1 版　　1989年 3 月第 1 次印刷
印数：0001—9000册
ISBN 7—314—00374—2/G · 69
定价：2.00元

前　言

教材建设是学校三大基本建设之一。长期以来，高等师范专科教育没有一套具有自己特点、较为系统的教材，影响了教育质量的提高。为了深化高等师范专科教育的改革，为普及九年制义务教育培养更多的合格教师，中南五省（区）教委（高教局）高教（教学）处，共同组织五省（区）师专及部分有关高校的教师，协作编写了师专12个专业85门主干课程的通用教材。

编写这套教材的指导思想是，从高等师范专科教育人才培养的目标出发，根据国家教委新制定的二年制师专教学计划、教学大纲的要求，兼顾三年制和双科制专业的需要，力求突出适用性、科学性及高等师范专科教育的特点。因此，这套教材，不仅适用于普通高等师范专科教育，而且也适用于教育学院和电大普通师范教育相关专业的教学，同时，还可作在职初中教师的培训和自修教材。

本教材是根据1987年全国师专理科教学计划修订会议的精神，以及国家教委委托广东省编写的师范专科学校数学专业《解析几何》课程的教学大纲（征求意见稿）的要求编写的。全书共分六章，总计80课时。加“*”号的部分，教学中可灵活处理。

本书由湖南衡阳师专方铨副教授主编，并负责编写第二、

四章。参加其余各章编写的有：广西南宁师专赵芝满讲师（第一章）；河南洛阳师专张汉英副教授（第三章）；湖北宜昌师专帅绪芝副教授（第五章）；广东韶关师专陈寿昌副教授（第六章）。在编写过程中，湖南省教委高教处、衡阳师专、韶关师专、洛阳师专给予了大力支持和帮助；广东佛山大学杨锦钜副教授、江西九江师专程平荪副教授、洛阳师专周炜老师对教材初稿提出了宝贵的意见，对此，我们深表感谢。

这套教材是按主编负责，分工编写的原则成书的。由于这样大规模有组织地进行教材编写在我们还是第一次，因而错误缺点在所难免，恳请读者批评教正。

中南五省（区）师专协作教材编委会

一九八八年三月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

目　录

第一章　矢量代数

解析几何的主要内容是用代数方法研究常见的曲面和曲线的性质。本章我们将引进矢量的概念，并研究它的各种运算，为讨论几何图形的性质提供重要的工具和方法。

1·1　矢量的概念

1.　矢量的概念及其表示

我们常碰到许多简单的量，只要取定单位以后，就可用一个实数来表示，例如距离、时间、质量、面积等，这种只有大小的量叫做数量。

另外还有一些比较复杂的量，除了知道它们的数值外，还必须指出它们的方向。例如说“有5公斤的力”是不明确的，还必须指出力的方向。对于速度、加速度、位移等，情形也是一样的，它们都是既有大小，又有方向的量。因此

定义　既有大小又有方向的量叫做**矢量**，或称**向量**。

矢量有两个特征：大小和方向。因此在几何上常用有向线段来表示，有向线段的方向表示矢量的方向，线段的长度表示矢量的大小。因此矢量的大小也叫做**矢量的长度**或**模**。如图1—1中的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$，A 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**始点**，B 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**终点**。有时用 $\vec{a}$、$\vec{b}$…或用黑斜体字母 $\vec{a}$、$\vec{b}$…

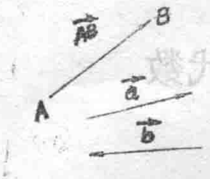


图 1—1

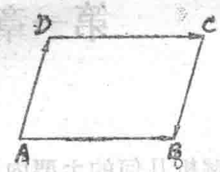


图 1—2

来表示矢量。矢量$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$的长度分别记作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\vec{a}|$。

2． 几种特殊的矢量

对于矢量，我们只考虑它的大小和方向，因此，两个模相等且方向相同的矢量叫做**相等矢量**。但必须注意，模相等的两个矢量未必相等。我们把两个模相等，方向相反的矢量叫做互为**反矢量**。例如在平行四边形 $ABCD$ 中（图1—2），矢量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{DC}$ 是相等的，记作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$。而矢量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 是互为反矢量，记作 $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$。

在图1—2中，矢量 $\overrightarrow{DC}$ 可以看成由矢量 $\overrightarrow{AB}$ 平移得到。平移后的矢量仍等于原来的矢量。象这样，只考虑大小和方向，而不考虑始点位置的矢量叫做**自由矢量**。

模等于零的矢量叫做**零矢量**。记做 $\vec{O}$。零矢量是终点和始点重合的矢量，因而它的方向不确定。

模等于 1 的矢量叫做**单位矢量**。与矢量 $\vec{a}$ 具有同一方向的单位矢量叫做 $\vec{a}$ 的单位矢量，常记做 $\vec{a}^0$

若一组矢量，当把它们平移到同一个始点时，它们在同一直线上，则称这一组矢量为**共线矢量**。共线矢量也叫做**平**

行矢量。若矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$共线，记为$\vec{a}\parallel\vec{b}$。同样，当把它们平移到同一个始点时，它们在同一平面上，则称这一组矢量为**共面矢量**。

我们约定，**零矢量与任何一个矢量共线，显然共线的矢量必共面，任何两个矢量必共面**。

例 1　设$ABCD-EFGH$是一个平行六面体(图1—3)，在下列各对矢量中，找出相等矢量和互为反矢量的矢量。

1)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$

2)　$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CG}$；

3)　$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{EG}$；

4)　$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{GF}$

5)　$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CH}$。

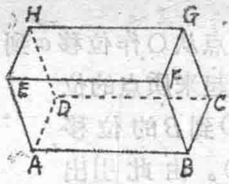


图 1—3

解　相等的矢量有2)、3)、5)；互为反矢量的有1)、4)。

例 2　在一个平行四边形的边上，以及一个等边三角形的边上可以分别作出哪些相等的矢量？

解　在平行四边形$ABCD$中（图1—2），可以作出如下相等的矢量：

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；　$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$；　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$；

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$

在等边三角形的边上不能作出相等的矢量。

练习1

1. 设$\vec{a}$、$\vec{b}$都是矢量，问下列式子是否成立？

1) $\vec{a}=3$；　2) $\vec{a}>2$；　3) $|\vec{a}|>2$；　4) $|\vec{a}|>|\vec{b}|$

2.满足下列条件的矢量终点各构成什么图形？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo

1）把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

2）把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

3）把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点；

4）把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点。

1·2 矢量的加法

1. 两矢量的加法及其性质

如果质点从O作位移$\vec{a}$到A点，再从A点作位移$\vec{b}$到B点，那么合起来质点的位移就是从O到B的位移$\vec{c}$（图1—4）。由此引出**矢量的加法**。

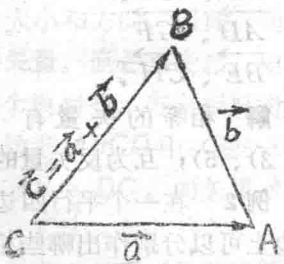


图 1—4

定义 设已知矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$，以任一点O为始点接连作矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，得一折线$OAB$，从折线的始点$O$到终点$B$的矢量$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$，叫做两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记做$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

上述求两个矢量和的方法叫做**三角形法则**。

在相等矢量的意义下，我们也可以用下面方法求两矢量的和。

以O为始点作矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，再以$\overrightarrow{OA}$、

$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形$OACB$，则对角线矢量$\overrightarrow{OC}$就是$\vec{a}+\vec{b}$（图1—5）。这种方法叫做**两矢量和的平行四边形法则**。

显然矢量和$\vec{a}+\vec{b}$与始点O的位置无关。

矢量加法具有下面的**运算规律**：

$$\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{交换律} \qquad (2)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{结合律} \qquad (3)$$

前面两个规律是显而易见的。由图1—5也易知交换律成立，下面证明结合律。

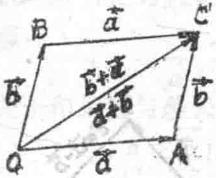


图 1—5

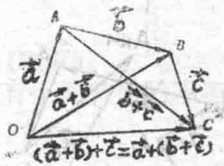


图 1—6

由图1—6有

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}$$

$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

所以 $$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

由于加法满足交换律和结合律，因此对于三个矢量相加可以不加括号，不论它们的先后顺序和结合顺序如何，它们

的和总是相等的：

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

以上说明，矢量加法和实数加法的运算规律是一样的。

2.多个矢量的和

对于任意有限个矢量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2\cdots\vec{a}_n$的和，可以记做

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n。$$

几何上求多个矢量的和可由三角形法则推广得到。从任一点O开始，依次引$\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2\cdots\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$，由此得一折线$OA_1A_2\cdots A_n$（图1—7）。于是矢量$\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$就是$n$个矢量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\cdots\vec{a}_n$的和。

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$
$$=\overrightarrow{OA_n} \qquad (4)$$

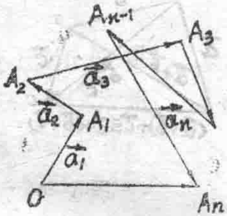


图 1—7

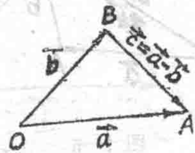


图 1—8

由此可知，要作有限个矢量的和，只要作出这些矢量所构成折线的封闭矢量即可，这种求和方法叫做**多边形法则**。

3.两矢量的减法

当矢量$\vec{b}$与矢量$\vec{c}$的和等于矢量$\vec{a}$，即$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$时，则矢量$\vec{c}$叫做矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**差**，记做$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$。

由矢量和的三角形法则和两矢量减法的定义，从图1—8

得

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} \qquad (5)$$

由此得到差矢量的几何表示：平移到共同始点的两个矢量的差，是从“减矢量”的终点到“被减矢量”的终点所引的矢量（图1—8）。

如果以$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$为邻边构成平行四边形$OACB$，那么它的两条对角线矢量分别为

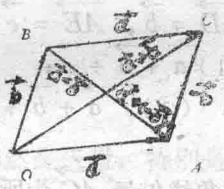


图 1—9

$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$，

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$。（图1—9）

由此图也可以看出矢量的减法运算可化为矢量的加法运算：

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})。$$

关于和矢量与差矢量的长度有下面常用的不等式：

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|;$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|。$$

例1 设互不共线的三矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\vec{c}$，试证顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零矢量。

证 必要性 设三矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成三角形ABC（图1—10）即有 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$。

那么

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}。$$

充分性 若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$（要证$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$构成三角形，先作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$得三角形$ABC$，然后只要证

$\vec{c}=\overrightarrow{CA}$就行了）。

作　$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$。

于是　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\vec{c}=0$。

所以　$\overrightarrow{AC}+\vec{c}=0$。

因此　$\vec{c}=\overrightarrow{CA}$。

故$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$可构成一个三角形ABC。

例 2　在平行六面体$ABCD\text{-}EFGH$中，已知$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$，作出下列矢量：

（1）$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$；　　（2）$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$。

解　（1）

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}.\end{aligned}$$

所以对角线矢量$\overrightarrow{AG}$为所求（图1—11）。

（2）　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$。

所以对角线矢量$\overrightarrow{EC}$为所求（图1—11）。

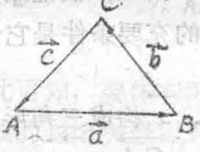


图 1—10

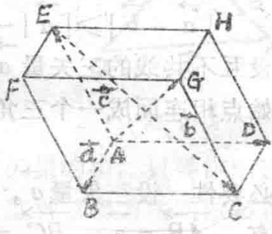


图 1—11

练习2

1. 在平行六面体$ABCD\text{-}EFGH$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$，作出下列矢量：

1） $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$；　　　2） $\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$。

2。 矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$必须满足什么几何性质，以下各式才成立？

1） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

2） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

3） $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

4） $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$。

1·3　数量乘矢量

我们知道，几个矢量相加仍然是矢量，特别是几个相同的非零矢量相加的情形，例如$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$是一个矢量，长度为$\vec{a}$的3倍，方向与$\vec{a}$相同。这与几个相同实数相加得到n倍实数的情形类似。由此引出

定义　实数λ与矢量$\vec{a}$的乘积$\lambda\vec{a}$是一个矢量，它的长度是$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；$\lambda\vec{a}$的方向，当$\lambda>0$时与$\vec{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\vec{a}$相反（图1—12）。

当然，当$\lambda=0$时$\lambda\vec{a}=0$，这时方向不定，显然$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$共线。

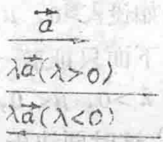


图 1—12

数量乘矢量有下面的**性质**和**运算规律**：

（1）　$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$，　$(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$；　　　（1）

（2）　非零矢量$\vec{a}$和它的单位矢量$\vec{a}^0$有下面的关系

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0 \quad 或 \quad \vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (2)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbo