SUSHU RUOGAN WENTI TANXI JI ZHENGMING

素数若干问题探析及证明

张尔光／著

3

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

SUSHU RUOGAN WENTI TANXI JI ZHENGMING

素数若干问题探析及证明

张尔光／著

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
长春

图书在版编目（CIP）数据

素数若干问题探析及证明 / 张尔光著．—长春：东北师范大学出版社，2016.7

ISBN 978-7-5681-2132-3

Ⅰ.①素…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①素数—研究　Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 187725 号

□策划编辑：王春彦　　□封面设计：中联学林

□责任编辑：张　琪　张辛元　　□内文设计：中联学林

□责任校对：王中韩　王春林　　□责任印制：张　允　豪

东北师范大学出版社出版发行

长春市净月开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）

销售热线：0431—84568122

传真：0431—84568122

网址：http：//www.nenup.com

电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

北京天正元印务有限公司印装

2016 年 7 月第 1 版　2016 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

幅面尺寸：170mm×240mm　印张：12.5　字数：175 千

定价：38.00 元

素数研究之“敢言”

——写在前面的话

2015年10月18日,《素数若干问题探析及证明》一书的书稿已完成第三次修改。此书虽经几易其稿,但笔者仍然感到还存在许多不足。因为,本人乃是一位数学研究的爱好者。

本人对素数的研究始于20世纪80年代中期,至今已有30年,取得较大成果的是在近5年。21世纪初,本人发现了图的形成过程的循序逐增原理。在2010年《四色猜想命题》一书定稿之后,笔者便将循序逐增原理用之于数(包括自然数、素数、组合数等)的研究上,从中发现了素数若干问题的奥秘,对素数的研究才有较大的突破。

本著的最大特点和亮点就是“创新和发现”。这主要体现在破题的思维方法创新和观点创新两个方面。而破题的思维方法创新,是指作者不受传统思维方式束缚,另辟蹊径,独创证明思路。而观点创新,是指作者对素数的现象及问题的分析,有独特的眼光和独特的见解,提出了一系列新观点和新概念。比如,关于“素数没有穷尽问题”,作者提出了“完整内涵”和“单一内涵”的新观点,又从“完整内涵”和“单一内涵”提出了“素数没有穷尽问题”的证明点,并非是求证“集合”之外存在“更大素数”,而是对素数中“可穷尽”“不可穷尽”现象做出科学解答。又比如,作者根据哥德巴赫猜想表达的内涵,认为寻求到既能反映奇素数共同特征、又能被偶数所接受的数学式

子才是破题的关键点，只有找到这样的式子，才能使猜想变为一种数学证明。还比如，作者提出了“起效素数”“素数有效排除线”“素数的有效排除力”“自然数‘235状态’”“素数黄金带”等新概念。

本著以“引子”引出欧几里得对素数没有穷尽问题证明的疑点，指出其疑点的核心问题是证明点错位，其证明原理不能对“再假设”证明进行下去，对素数中“可穷尽”“不可穷尽”现象不能做出科学解答；笔者以素数中三个不可理解性问题为切入点，找到了素数中“可穷尽”“不可穷尽”现象的根本原因，避开除数（即合数的约数）将合数排除出素数之外的过程中的“重复排除”“无关排除”的因素，依照循序逐增原理，创立了素数的扩延范围单位，从中求得（单个）素数的有效排除力定理和整体素数的有效排除力定理（即起效素数的有效排除力总和定理），应用素数的有效排除力定理对“为什么偶素数可穷尽”“为什么个位数为5的奇素数可穷尽”“为什么个位数为1、3、7、9的奇素数不可穷尽”诸问题做出了证明；对欧氏证明的疑点及其原因进行了解读、分析。

本著遵循素数与自然数同存相随及循序逐增原理，创立了新的“自然数的扩延范围”的表达式，求得自然数扩延范围的素数的量与起效素数的有效排除力总和两者关系之定理，从新生素数无穷多个的角度对素数没有穷尽问题做出证明。

本著应用自然数扩延范围的素数的量与起效素数的有效排除力总和两者关系之原理，对罗卡尔关于“两个素数的平方之间至少有4个素数”的命题和杰波夫关于“在n^2和$(n+1)^2$之间有一定素数”猜想做出证明。笔者还发现并证明“在‘$(n-1)\times n$至$n\times n$之间’和‘$n\times n$至$n\times(n+1)$之间’存在一定素数”的问题。笔者创建了自然数“235状态”和“$6\times m\pm1$”等式，对新生素数、孪生素数、四子孪生素数的特征进行了解读，对孪生素数以及四子孪生素数没有穷尽问题做出证明。笔者将寻求素数的表达式及其得数称之为“素数黄金带”，并根据正整数方阵的原理，找到了一种可找到优质“素数黄金带”的形态。

本著找准了破解哥德巴赫猜想的关键点，寻求到既能反映奇素数共同特征、又能被偶数所接受的两个表达式，进而寻求到证明哥德巴赫猜想能够成立的两种方法。两种方法的证明结果表明，哥德巴赫猜想成立。

本著还对素数的其他问题提出了作者自己的观点，提出了有关素数的若干猜测，其中猜测素数与自然数的比率不可逾越1%的底线（即不可能低于1%）。

本著后面还附有三个“附表”，以供素数研究者在研究素数时参考。

在此，笔者要多说两句的，之所以对欧几里得对素数没有穷尽问题的证明提出质疑为引子，是因为，早在2005年，笔者曾对欧氏证明提出质疑，并将自己的观点写成稿件投往某学报发表。由于当时缺乏对欧氏证明过程的了解，没能抓住本质性的核心问题，当然被作退稿处理。不过，该学报编辑在“审稿人意见”栏中写的，将欧氏证明称为“这一证明非常严谨，无纰可挑，无漏可找。既简明，又科学，是归谬证明的千古传诵的优秀典范”的赞语，笔者仍记忆犹新。因为，笔者深知，此位编辑的赞语，实际上是两千多年来数学界一致认同的赞语。在10年之后，笔者再次对欧氏证明提出质疑，是在于笔者真正抓住了欧氏证明疑点的本质性的核心问题。而这，也许仅仅是笔者的观点而已。笔者更知道，自己这样做，简直是在做一件“蚍蜉撼大树”之事。

“敢言”“敢言”，既有作者感慨之言，也有作者狂态之言。然而，不管是何“言”，都是我的真言。笔者真诚希望本著能成为素数研究方面的一块可引来“玉”的“砖”，同时以“虚心加诚心”的态度，恳请同仁们提出宝贵意见。

作者　张尔光

2015年10月18日于广州

目　录
CONTENTS

素数中可穷尽和不可穷尽现象探析

——从对欧几里得的证明的质疑说起

摘　要　本文以“引子”引出欧几里得证明的疑点，指出欧氏证明原理不能对“再假设”证明进行下去，对素数中“可穷尽”“不可穷尽”现象不能做出科学解答；以素数中三个不可理解性问题为切入点，找到了素数中“可穷尽”“不可穷尽”现象的根本原因，应用素数的有效排除力原理对“为什么偶素数可穷尽”“为什么个位数为 5 的奇素数可穷尽”“为什么个位数为 1、3、7、9 的奇素数不可穷尽”诸问题做出了证明；对欧氏证明的疑点及其原因进行了解读、分析。

关键词　欧几里得　素数　可穷尽　不可穷尽　质疑　证明点

1. 引子——钝夫的质疑

这天，数学研究爱好者钝夫与数学教授聪生一起讨论素数没有穷尽问题。钝夫请教说：“假设第 48 个梅森素数为最后一个素数，即素数至此已穷尽，那你肯定不会认同。但不知你如何来证明我的观点是错的。”聪教授笑着说：“早在公元 300 年前古希腊数学家欧几里得就已证明了素数没有穷尽问题。依照欧氏定理和你给出的假设，证明式子是‘$K=2\times3\times5\times\cdots\cdots\times$第

48 个梅森素数 +1’,K 要么是素数,要么是多个素因数相乘的积,K 或其素因数都必定是‘集合’之外的更大素数,即是比第 48 个梅森素数还要大的‘更大素数’。因此,第 48 个梅森素数之后素数没有穷尽。所以,你的观点是错的。”钝夫又诚恳地说:“聪教授,你刚才的证明也许是对的。我深信根据欧氏公式完全可求得比第 48 个梅森素数还要大的‘更大素数’。现我再假设,假设素数至这个‘更大素数’已穷尽。毫无疑问,这个‘更大素数’不是续接第 48 个梅森素数之后的下一个素数,也即是说,第 48 个梅森素数至这个‘更大素数’之间必定存在未知的若干个素数。据此,你如何将第 48 个梅森素数至这个‘更大素数’之间的若干素数,按照‘从小到大依次排列’呢?假如你不能做到‘从小到大依次排列’,那你如何让证明进行下去呢?假如证明不能进行下去,又怎能说对素数没有穷尽问题做出证明了呢?”钝夫一连串推理式的连珠炮般的发问,使聪教授完全无言以对。接着,钝夫将自己的质疑及其因由细说了一遍。之后,一本正经地说:“欧氏证明疑点多多,主要疑点在于:其一,素数没有穷尽主要体现在素数随着自然数的不断扩延而扩延,‘更大素数’之后还有比之更大的‘更、更大素数’。如以求得‘集合’之外的‘更大素数’的证明方法来证明素数没有穷尽问题,其证明方法不仅仅在于求得‘集合’之外的‘更大素数’,同时还有一个续接证明下去的问题,即以第一次假设求得的‘更大素数’为依据提出再假设时,使再假设的证明进行下去。但是,由于欧氏公式所求得的素数只是‘更大素数’,而不是续接‘P_n 素数’之后的下一个素数,违背了其自身设置的‘从小到大依次排列’这一条件,因此,欧氏证明在求得‘集合’之外的‘更大素数’之后,不能对以第一次假设求得的‘更大素数’为依据而提出的再假设的证明进行下去。可见,欧几里得的证明,对素数没有穷尽问题并没做出科学证明。其二,事实告诉我们,在没有穷尽的素数中,偶素数于 3 起已穷尽,而没有穷尽的是奇素数;在没有穷尽的奇素数中,个位数为 5 的奇素数于 6 起已穷尽,而没有穷尽的是个位数为 1、3、7、9 的奇素数。据此,可以说对素数没有穷尽问题的证明,应当包括对‘为什么偶素数于 3 起可穷尽’‘为什么个位数为

5 的奇素数于6 起可穷尽’‘为什么个位数为1、3、7、9 的奇素数不可穷尽’诸问题的证明。不是单一的‘没有穷尽’问题的证明。其正确的证明方法,不仅可用于‘不可穷尽’问题的证明,而且也可用于‘可穷尽’问题的证明。然而,欧氏的证明方法除了可求得‘集合’之外的‘更大素数’外,不能对素数中‘可穷尽’和‘不可穷尽’问题做出科学的、正确的解答。仅凭此两点质疑就可得出结论:欧氏证明只能是求得‘集合’之外的‘更大素数’的一种证明方法,对素数没有穷尽问题并没做出科学证明。”最后,钝夫十分自信而自豪地说:“鄙人之所以敢于对欧几里得的证明提出质疑,是因为我找到了素数中‘可穷尽’和‘不可穷尽’现象的根本原因,发现了其破解的证明方法。”

2. 素数没有穷尽问题的内涵及其证明点

不隐瞒说,“引子”中的钝夫就是笔者。

笔者之所以以素数没有穷尽问题开篇,是因为素数没有穷尽问题是素数若干问题中最重要、最久远的话题。

笔者知道,在对素数没有穷尽问题的诸多证明中,欧几里得的证明是被数学界公认为无懈可击、最为完美的证明。笔者之所以敢于提出质疑,是在于发现了欧几里得没有真正读懂素数没有穷尽问题的内涵,弄错了素数没有穷尽问题的证明点。

在数学研究中,笔者一直坚持这样一个观点:要破解数学命题,首先必须读懂命题,只有读懂命题,才能谈得上破解命题。要破解素数没有穷尽问题,同样离不开这个“理”。笔者认为,要对素数没有穷尽问题做出正确的证明,首先要弄清楚素数没有穷尽问题的完整内涵和单一内涵,在此基础上,找准其证明点,即:对素数没有穷尽问题要做出证明的,是求证素数“集合”之外的“更大素数”,还是对素数中“可穷尽”“不可穷尽”现象做出科学解答?

2.1 素数没有穷尽问题的完整内涵和单一内涵

笔者认为，素数没有穷尽问题有着“完整内涵”和“单一内涵”之分。

所谓“素数没有穷尽问题的完整内涵”，是指素数中各种“可穷尽”“不可穷尽”现象所反映出来的若干问题。

所谓“素数没有穷尽问题的单一内涵”，是指“完整内涵”中具体的、与之最直接的某个问题。

在此，笔者应指出的，本文说的“完整内涵”和“单一内涵”，与我们通常所说的“广义”“狭义”是有本质区别的。

事实告诉我们，在没有穷尽的素数中，偶素数于3起已穷尽，而没有穷尽的是奇素数；在没有穷尽的奇素数中，个位数为5的奇素数于6起已穷尽，而没有穷尽的是个位数为1、3、7、9的奇素数。据此，笔者认为，素数没有穷尽问题的完整内涵应包括如下五个问题：

问题1 素数为什么不可穷尽？

问题2 偶素数为什么于3起已穷尽？

问题3 奇素数为什么不可穷尽？

问题4 个位数为5的奇素数为什么于6起已穷尽？

问题5 个位数为1、3、7、9的奇素数为什么不可穷尽？

根据上述的素数没有穷尽问题的完整内涵，笔者认为，素数没有穷尽问题的单一内涵，具体是指“个位数为1、3、7、9的奇素数为什么不可穷尽”之问题。

2.2 素数没有穷尽问题的证明点

事实告诉我们，任何数学命题都是来自于对数学中若干现象的发现。要破解来自于对数学中若干现象的数学命题，就是对这些数学现象进行科学分析，然后做出科学解答。笔者认为，不论是从素数没有穷尽问题的完整内涵来看，还是从素数没有穷尽问题的单一内涵来看，素数没有穷尽问题的

证明点都不应是求证素数“集合”之外的“更大素数”。而事实也证明这一点。

事实1 “没有穷尽”外延的证明

为使人们真正读懂素数没有穷尽问题的证明点不是求证素数“集合”之外的“更大素数”,笔者将欧氏证明原理的应用延伸到对其他数没有穷尽的证明。我们知道,在自然数这个家族中,自然数是没有穷尽的,偶数是没有穷尽的,奇数是没有穷尽的。如果说,素数没有穷尽的证明,就是求得“集合”之外的“更大素数”,那么,对自然数、偶数、奇数没有穷尽的证明,同样是求得“集合”之外的该类“更大数”。现依照欧氏证明原理做出证明。

例1 对自然数没有穷尽的证明。

设有限个自然数为 n,那么,依照欧氏公式得:

$K = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_n$

式中“$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$”为自然数从小到大依次排列。多个自然数相乘之积必定是自然数。因此,K 必定是“集合”之外的更大自然数。所以,自然数没有穷尽。此证。

例2 对偶数没有穷尽的证明。

设有限个偶数为 n,那么,依照欧氏公式得:

$K = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_n$

式中“$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_4$”为偶数从小到大依次排列。多个偶数相乘之积必定是偶数。因此,K 必定是“集合”之外的更大偶数。所以,偶数没有穷尽。此证。

例3 对奇数没有穷尽的证明。

设有限个奇数为 n,那么,依照欧氏公式得:

$K = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_n$

式中“$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$”为奇数从小到大依次排列。多个奇数相乘之积必定是奇数。因此,K 必定是“集合”之外的更大奇数。所以,奇数没有穷尽。此证。

显然,以上诸例证明苍白无力,难以令人信服。

本来,事实已清楚地告诉我们,自然数没有穷尽是在于更大自然数之后还有比之更大的自然数,永远只有更大自然数,没有最后的最大自然数;偶数没有穷尽是在于更大偶数之后还有比之更大的偶数,永远只有更大偶数,没有最后的最大偶数;奇数没有穷尽是在于更大奇数之后还有比之更大的奇数,永远只有更大奇数,没有最后的最大奇数;素数没有穷尽是在于更大素数之后还有比之更大的素数,永远只有更大素数,没有最后的最大素数。既然事实已告诉我们这样一个结果,那么,以求得“集合”之外的该类“更大数”来证明该类数没有穷尽问题,这是不是显得没有多大实际意义呢?!

事实2　素数没有穷尽现象的证明

我们知道,在没有穷尽的素数中,奇素数是没有穷尽的;又,没有穷尽的奇素数实际是指个位数为1、3、7、9的奇素数没有穷尽。如果依照欧氏证明原理分别对奇素数以及个位数为1、3、7、9的四支个位数不同的奇素数没有穷尽问题予以证明,其结果将会如何呢。

例1　对奇素数没有穷尽的证明,

设有限个奇素数为n,那么,依照欧氏公式得:

$K = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_n + 2$

式中“$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$”为奇素数从小到大依次排列。设$N = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_n$,那么$N+2$(即$K$)是奇素数或是多个奇素数相乘之积。$K$或$K$的素因数必定是“集合”之外的更大奇素数。

如:$3 \times 5 + 2 = 17$(是素数)

$3 \times 5 \times 7 + 2 = 107$(是素数)

$3 \times 5 \times 7 \times 11 + 2 = 1157$　1157是合数,但其两个因数13、89是“集合”之外的素数。

因此,奇素数没有穷尽。此证。

尽管在提法上“奇素数没有穷尽”比“素数没有穷尽”更为精准,我想,恐怕数学界的同仁们不会认同笔者的证明吧。

例 2　对四支个位数不同的奇素数没有穷尽问题的证明。

a. 个位数为 1 的素数没有穷尽问题的证明结果。

如将 n 个个位数为 1 的素数“从小到大依次排列”集于“合”子相乘再加 1 个其他正整数,可推知,n 个个位数为 1 的素数相乘,其积的个位数必定是 1,唯有加上大于 1、个位数为 0 的正整数,其 K 的个位数方为 1,但 K 的素因数的个位数就未必是 1。现予以验证。

设有限个个位数为 1 的奇素数为 n,那么,依照欧氏公式得:

$K = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots\cdots \times P_n + 10$　(式中“$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$”为个位数为 1 的奇素数从小到大依次排列)

$11 \times 31 + 10 = 351$　351 是合数,为 13×27 之积,而 27 是合数。因此,不成立。现改换为“$+60$”:

$11 \times 31 + 60 = 401$　401 是素数。

$11 \times 31 \times 41 + 60 = 14041$　14041 是合数,为 19×739 之积,14041 的两个素因数的个位数为 9,不是 1。因此,不成立。

从以上证明可见,欧氏证明方法不能找到正确答案。

b. 个位数为 3、7、9 的素数没有穷尽问题的证明结果。

可推知,n 个个位数为 3 的素数相乘,其积的个位数是循着“9、7、1、3”次序变化的;n 个个位数为 7 的素数相乘,其积的个位数是循着“9、3、1、7”次序变化的;n 个个位数为 9 的素数相乘,其积的个位数是循着“1、9、1、9”次序变化的。由此可知,n 个个位数为 3、7、9 的奇素数相乘,其积加任何 1 个正整数,其 K 的个位数都是有变化的,其 K 的素因数的个位数同样是有变化的。

可见,依照欧氏证明原理分别对个位数为 1、3、7、9 的奇素数没有穷尽问题予以证明,不可能找到正确答案。从而证明欧几里得对素数没有穷尽问题不能做出科学证明。

事实 3　对素数中“可穷尽”现象分析的答案

近年科学研究表明,一些动物走向灭绝,不是这些动物繁衍能力出现了问题,而是人类大量捕杀所致,亦即人类对这些动物的捕杀量大于这些动物

的繁衍生存量。笔者由此联想到素数没有穷尽问题。我们知道,除1之外,自然数是由素数、合数两大部分组成。据此,可以说,素数就是将合数这部分自然数排除出去后剩留的自然数。自然数的不断扩延好比动物繁衍,被排除出去的自然数(即是合数的自然数)的量好比人类对动物的捕杀量。很显然,假如被排除出去的自然数(即是合数的自然数)的量大于或等于自然数的扩延量,那么,素数必定穷尽,唯有在被排除出去的自然数(即是合数的自然数)的量小于自然数的扩延量的条件下,素数才有可能没有穷尽。而事实也正是如此。

经分析,偶素数之所以于3起已穷尽,是因为所有大于2的偶数均为合数而全部被排除出素数之外;同理,个位数为5的奇素数之所以于6起已穷尽,是因为所有大于6的个位数为5的奇数均为合数而全部被排除出素数之外。这也就是说,两者的被排除的量等于扩延的量。

由此可推知,素数没有穷尽与一种排除力有着密切联系。由此可见,素数没有穷尽问题的证明点,并不是寻求"素数集合"之外的"更大素数"的证明,而是寻求对素数中"可穷尽""不可穷尽"现象做出正确解答的证明,也就是求证将合数排除出素数之外的这种排除力的证明。笔者正是以此作为破解素数没有穷尽问题的关键点,以素数中三种不可理解现象为切入点,从中发现素数中"可穷尽"和"不可穷尽"现象的根本原因,找到正确的证明方法的。

3. 素数中"可穷尽"和"不可穷尽"现象的原因分析

3.1 破题的切入点——素数中三个不可理解现象

对素数的结构进行分析研究,就会发现三个有趣而又不可理解的现象。

不可理解1　如将可被素数排除的自然数的量记为$\frac{n}{P}$,那么,按照"$\frac{n}{P_1}+\frac{n}{P_2}+\frac{n}{P_3}+\cdots\cdots+\frac{n}{P_m}$"等式计算,素数于自然数30起就应穷尽。因为,$\frac{30}{2}+\frac{30}{3}$

$+\frac{30}{5}>30$。可事实告诉我们,素数不但没能于30起穷尽,甚至于30000^{30000}之后都不可能穷尽。这是为什么?

不可理解2　1个偶素数2可做到将大于2的偶数全部有效排除出素数之外,使偶素数于3起已穷尽,而无数多个奇素数却没能做到将某个高位奇数起的奇数全部有效排除出素数之外,使奇素数于此穷尽,进而使素数也随之穷尽。这是为什么?

不可理解3　3和5两奇素数可做到将大于5、个位数为5的奇数全部有效排除出素数之外,使个位数为5的奇素数于6起已穷尽,而7起的奇素数不仅不能做到将个位数为1、3、7、9的奇数于某高位数起全部有效排除出素数之外,使之穷尽,甚至不能做到将个位数为1、3、7、9其中之一的奇数于某高位数起全部有效排除出素数之外,使之穷尽。这是为什么?

笔者认为,上述三个现象表明"可穷尽"和"不可穷尽"这对对立的矛盾同存在于素数这个整体中,反映了素数中"可穷尽"和"不可穷尽"现象的不可理解性,分析它的不可理解性,从中找出其根本原因,这正是破题的切入点。

3.2　关于除数的分类

笔者研究结果表明,上述三种不可理解现象,与除数的有效排除作用有着密切联系。因此,只有正确认识除数及其在将合数排除出素数之外中所起到的作用,才能找到三种不可理解现象的根本原因。

这里说的除数,是指自然数中合数的约数(也叫因子)。从数学除法算式来说,合数的约数即是除数。合数之所以是非素数,是因为可被它的约数(即除数)整除而排除出素数之外。而这"除数"既有合数,也有素数。但应看到,这些除数在将合数排除出素数之外的过程中所起到的作用是不同的。那么,真正起到排除作用的究竟是合数还是素数呢(换言之,谁才是"第一刀"将合数"捅死毙命"的"真正凶手"呢),这是必须弄清楚的问题。现举例分析。

以合数60为例,除1和60外,其可被2、3、4、5、6、10、12、15、20、30共10

个数整除。在此10个除数中,2是将60排除出素数之外的第一位除数,才是起到有效排除作用的除数,3与5是于2之后将60重复排除出素数之外的除数,为重复排除的除数,而4、6、10、12、15、20、30此7个除数,虽对60可以整除,由于其本身也是可被2、3、5整除的合数,因此,就将60排除出素数之外这点来说,实际上它们起到的是"零作用",故为无关排除的除数。

再以合数135为例,除1和135外,其可被3、5、9、15、27、45共6个数整除。在此6个除数中,3是将135排除出素数之外的第一位除数,才是起到有效排除作用的除数,5是于3之后将135重复排除出素数之外的除数,为重复排除的除数,而9、15、27、45此4个除数,虽对135可以整除,由于其本身也是可被3、5整除的合数,因此,就将135排除出素数之外这点来说,实际上它们起到的是"零作用",故为无关排除的除数。

笔者根据除数所起到的作用之不同,将除数分为三类:

之一,"有效排除的除数",是指将某个自然数排除出素数之外的除数中依序排在首位的非合数除数。

之二,"重复排除的除数",是依序排在首位除数之后的非合数除数。

之三,"无关排除的除数",是指除数中的合数。

可见,在将合数排除出素数之外中真正起到有效排除作用的是素数,而且是排在前面的第一个素数。笔者将此称之为"素数的有效排除作用"。事实证明,素数之所以不可穷尽,其原因是在于素数将合数排除出素数之外的过程中,并非是全部为真正意义上的有效排除,这当中还存在重复排除。正是重复排除的存在,使得素数有着不可穷尽的空间。

笔者研究结果表明,为什么素数不但没能于30起穷尽,甚至于30000^{30000}之后都不可能穷尽?其原因就在于,素数在将可被其整除的自然数排除出素数之外的过程中,除了首位素数2全部为有效排除之外,所有奇素数都存在重复排除,所有奇素数的排除量"$\frac{n}{P}$"均包含重复排除量,并非是真正的有效排除量。因此,这使得整体奇素数的有效排除力大打折扣,使得