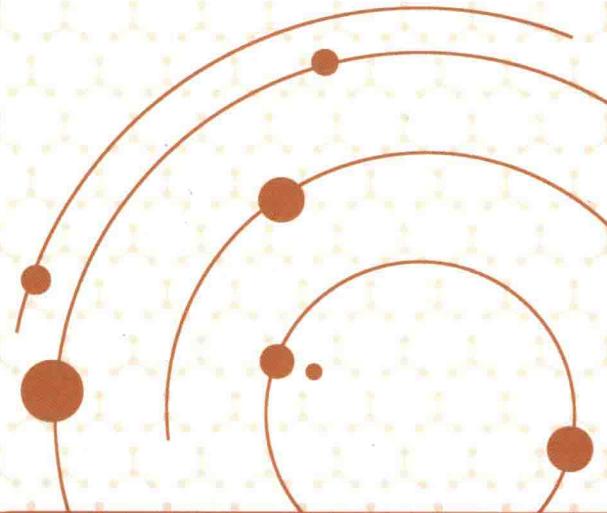




“十二五”国家重点图书出版规划项目
中国科学技术大学  教材



李永池 / 编著

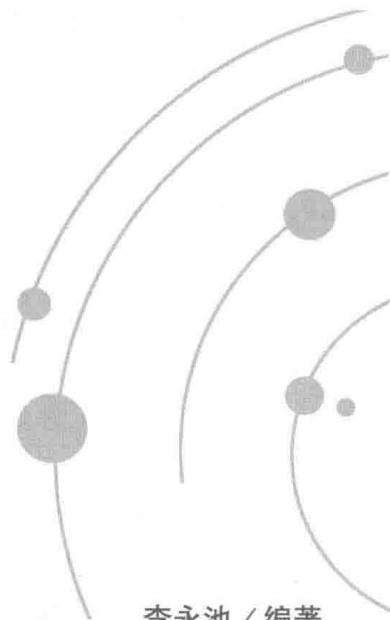
张量初步和近代 连续介质力学概论 第2版

Introduction to Tensor Analysis and
Modern Continuum Mechanics

中国科学技术大学出版社



“十二五”国家重点图书出版规划项目
中国科学技术大学  教材



李永池 / 编著

Introduction to Tensor Analysis and
Modern Continuum Mechanics

张量初步和近代 连续介质力学概论

第2版

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者自 1984 年以来为中国科学技术大学近代力学系研究生所开必修课“高等连续介质力学”教学内容的结晶，力图以流体和固体相统一、静态和动态相结合的思想较系统地介绍近代连续介质力学的基本知识，并希望可为读者将这些知识与本构理论和波动力学等的研究相结合提供帮助。

本书共有 10 章，内容主要包括笛卡儿张量基础知识、一般张量基础知识、连续介质的运动和变形、应力原理、变形热力学、本构方程的一般理论、热弹性材料、弹塑性材料、黏性流体和黏弹性材料、黏塑性材料等。本书在内容叙述上注重基本概念的准确性和理论体系的严密性，注意将严谨的数学推导和清晰的物理内涵阐述相结合，同时书中还包括了作者本人及其所在课题组近些年来在动态本构理论和波动力学方面的一些研究成果。书中的习题，大部分是围绕力学基本概念、基本原理和基本方法给出的。

本书可作为力学、工程热物理、材料科学、工程科学和应用数学等专业的研究生教材，也可作为与力学有关的相关专业师生和科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

张量初步和近代连续介质力学概论/李永池编著.—2 版.—合肥：中国科学技术大学出版社，2016.5

(中国科学技术大学精品教材)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-03927-0

I. 张… II. 李… III. ①张量—概论 ②连续介质力学—概论 IV. ①O183.2
②O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 037683 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：<http://press.ustc.edu.cn>

安徽省瑞隆印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本：710×960 1/16 印张：29.75 插页：2 字数：554 千
2012 年 8 月第 1 版 2016 年 5 月第 2 版 2016 年 5 月第 3 次印刷
定价：58.00 元



编审委员会

主任 侯建国

副主任 窦贤康 陈初升
张淑林 朱长飞

委员 (按姓氏笔画排序)

方兆本	史济怀	古继宝	伍小平
刘斌	刘万东	朱长飞	孙立广
汤书昆	向守平	李曙光	苏淳
陆夕云	杨金龙	张淑林	陈发来
陈华平	陈初升	陈国良	陈晓非
周学海	胡化凯	胡友秋	俞书勤
侯建国	施蕴渝	郭光灿	郭庆祥
奚宏生	钱逸泰	徐善驾	盛六四
龚兴龙	程福臻	蒋一	窦贤康
褚家如	滕脉坤	霍剑青	

总序

2008年,为庆祝中国科学技术大学建校五十周年,反映建校以来的办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列。

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版,共出书50种,在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响,并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划。为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设,结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材,学校决定,将精品教材出版作为常规工作,以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版,并设立专项基金给予支持。国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划。

1958年学校成立之时,教员大部分来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统。同时,根据“全院办校,所系结合”的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中。虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才。

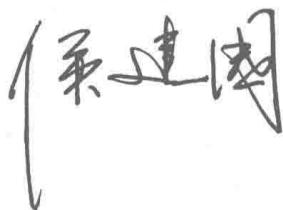
学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一。当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养

了一届又一届优秀学生。入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校。在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材。进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术。

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献。



中国科学院院士
第三世界科学院院士

序

《张量初步和近代连续介质力学概论》一书是李永池教授自 1984 年以来为中国科学技术大学近代力学系研究生所开设的必修课“高等连续介质力学”教学内容的结晶。近 30 年来,该课程也一直受到中国科学院力学研究所、岩土力学研究所,中国工程物理研究院流体物理研究所,西北核技术研究所等国内多家研究院所代培研究生的欢迎。其间李永池教授始终注意学习国内外同行的长处,特别是学习优秀教材的成功经验。现本书已入选“中国科学技术大学精品教材”系列,并列入“‘十二五’国家重点图书出版规划项目”。本书具有以下特色:

(1) 注重基本概念的准确性和理论体系的严密性,注重将严格的数学推导和清晰的物理概念相结合,力图使读者既不停留在繁琐的数学公式推导之中,也不停留在粗浅的物理现象描述上,而是能清晰认识数学公式所包含的深刻物理实质。这在力学守恒定律的表述及场方程组的推导、热力学势概念的引入和阐述等方面都有所体现。

(2) 除了注意系统介绍近代连续介质力学的基础理论以外,还对发展这些理论所基于的思维方法和研究方法也给予较多注意,以期启发学生提出新模型和新概念的理论创新能力。如广义开口体系概念的提出及对波阵面守恒条件的应用,胀缩导数和等容导数概念的提出和对力学守恒定律的应用,对 Drucker 公设的讨论和普适增量型塑性本构关系的提出等等,都是启发学生创新思维的例子。

(3) 加强本构理论与典型本构关系内容的介绍,推动力学和材料科学的结合。除对本构方程一般理论进行较严格又较易接受的介绍以外,把现已广泛应用的和正在发展着的几类典型本构关系纳入本构理论的一般框架之内,并说明其物理实质。在基础知识和科学研究之间搭起了一座桥梁。

第 2 版前言

本书第 1 版在 2012 年 9 月出版后,受到广大读者的厚爱和欢迎,也收到不少读者和同行专家的反馈意见和建议。对此,作者深表谢意。这些意见和建议,除了书中某些印刷排版错误之外,最重要的一条意见就是:直接从张量的一般理论讲起比较抽象,不太符合知识的台阶式渐近积累规律,这对大多数读者的学习是不利的。为此,本书第 2 版除了对已发现的文字错误进行改正之外,特意增加了第 0 章“笛卡儿张量基础知识”。读者可根据教学和科研工作的需要,只学习第 0 章,然后跳过第 1 章而直接进入第 2 至第 9 各章;也可直接从第 1 章开始学起,然后倒过来对照第 0 章的内容,将第 0 章和第 1 章结合起来进行学习,从而加深张量知识的理论功底,然后学习第 2 至第 9 各章。

为了既保持新增加的第 0 章内容和第 1 章内容有一定的联系,又使其具有一定的独立性,第 0 章的某些局部内容与第 1 章中的相应内容有一定重复。

李永池
2016 年 1 月

前　　言

从传统意义上讲，“连续介质力学”主要是研究连续介质(主要是流体和固体)在外部(主要是力的和热的)作用下的变形、损伤和破坏的宏观规律的。在连续介质力学中，人们把物质看做是一系列微观上足够大而宏观上足够小的“粒子”或“微团”的连续集合，从而可以认为每一“粒子”在每一时刻占有一个几何上的点并具有相应的各种物理量的统计平均宏观值，因此可以应用场论和张量分析的工具来研究介质的运动规律。尽管细观力学作为一门学科已经兴起，连续介质力学在其发展中也在逐渐吸收其中的一些成果，并引入一些物质运动的细观描述，但从总体上讲连续介质力学所应用的研究方法仍然是宏观描述的方法。尽管与包括气态、液态的流体和固态的固体一样，等离子体同时也是物质的单独一态；尽管外部作用除了力的和热的作用之外，还包括电磁的、光的、化学的、生物的等等的作用，但传统的连续介质力学以及本书将基本上不涉及这些复杂的内容。这一课程之所以重要，主要是因为该课程的基本理论框架涉及变形体力学的最重要的基本知识，如张量分析的基本知识，介质运动、变形和受力的描述方法，连续介质的守恒定律和场方程组，材料本构关系的基本理论等，这些知识对力学以及相关的工程学科都是很重要和不可或缺的。现代科学技术的发展不仅没有降低该课程的地位和重要性，而且随着新的科技成果的不断出现，该课程的理论框架和主要内容也在不断完善、充实和提高中得到发展，并在解决新的科学问题方面发挥了越来越重要的作用。在很长的时期内特别是近几十年来，随着科学技术的发展和进步，“连续介质力学”与其他各类重要学科不断交叉和渗透，因此“连续介质力学”课程不但一直是理论和应用力学专业的必修专业基础课，而且成为工程热物理、机械工程、航天工程、生物医学工程、材料科学等很多相关学科和专业的重要专业基础课。在国内外几乎所

有著名大学的这些相关专业的课程表上都有“连续介质力学”课程或以该课主要知识为内容的类似课程。“连续介质力学”课程的基本内容是与时俱进的,随着近现代科学技术的发展而不断完善和发展着,在近些年来的研究生教材中较多地采用了“非线性连续介质力学”的名称(见书后的参考文献目录),以强调其区别于经典线弹性力学和流体力学的特点。本书的基本内容框架是与这些著作大体一致的,但希望在课程内容的组织上、在基本原理的准确语言表达上、在力学公式的数学表述及其和物理内容的紧密结合上、在最新研究成果的介绍和应用上等方面能有自己的特点,并使读者可以获得新的感受和裨益。

本书取名为“张量初步和近代连续介质力学概论”,一方面是因为张量工具在力学乃至在整个自然科学中具有基石的作用,希望读者可以用较少的时间很自然、很顺利地获得张量一般理论的主要知识并加深对张量工具本身及对力学知识的理解,而不必花很多时间吃力地去读很多张量分析方面的浩瀚书籍,反而冲淡了对力学知识的理解,故在书中对张量知识做了深入浅出的、对力学工作者来讲足够用的较系统的初步介绍,故曰“张量初步”;另一方面,总体说来本书基本上不涉及对某些力学实际问题的具体求解,而是偏重于以作者本人多年来在科研和教学实践中与学生及同行讨论时所获得的新感受新认识为基础,对近几十年来连续介质力学和本构关系的基本原理和基本方法做一概述性的介绍,并加入了本人及所在课题组多年来的一些新的研究成果,希望能对读者的科学研究有所助益,故曰“近代连续介质力学概论”。

我们认为,“连续介质力学”课程之所以重要,主要是因为它的主要内容顺应了当代力学研究的发展趋势,其特点可以简单地概括为如下几个方面:

(1) 流体力学和固体力学的结合。在通常的力学系的教学中,一般将流体力学和固体的弹塑性力学分开来讲解的,这样虽然在使读者获得流体和固体的专业知识方面存在其优点,但在使学生获得全面的连续介质力学基础知识和研究方法并使之融会贯通方面却存在着缺陷,这不利于读者辩证地认识流体和固体的统一、特异和转化,也不利于提高读者综合利用力学知识解决复杂科学问题的能力。一个最典型的例子就是核爆炸的问题,即使是在岩石中的地下核爆炸问题中,人们也将同时遇到近区的流体动力学波、中区的塑性或黏塑性波以及远区的纯弹性波传播的问题,这就同时需

要流体力学和固体力学的知识。另外，人们日常生活中以肉眼观察介质是否能够流动来区分流体和固体的方法也是不够科学的，其中一个最典型的例子就是，当常规概念中是“固体”的穿甲弹以接近 2 km/s 或更高的速度撞击常规概念中也是“固体”的钢甲坦克等目标时，由于撞击压力很高，而对材料塑性变形起重要作用的应力偏量却受到材料屈服准则的制约，其值与极高的压力之比则很小，故在撞击初期将看上去很“硬”的弹、靶都作为流体来处理并不会产生很大的误差，这说明我们不能以简单的、常识的和僵死的观点来看待流体和固体，而应该根据介质在一定具体环境下的行为特点即其本构形式来判断此时它们是流体还是固体。基于这些原因，我们将以流体和固体相结合的观点和方法来系统介绍其基本理论和方法，这也是本书内容组织上的一个特点。

(2) 对大变形和非线性行为的特别关注。在经典弹性理论所处理的问题中，以普通金属材料为例，其变形在约 0.2% 的屈服应变的小变形范围内，线性工程应变的描述方法和线性胡克定律的本构描述可以足够精确地满足工程的需要。但随着工程和现代高科技的发展，在爆炸冲击力学的很多问题中，材料可产生接近 10% 甚至更高的应变，在塑性加工成型等特殊问题中材料可产生更高乃至 1000% 的超塑性应变，此时不但需要引入对材料大变形行为进行精确描述的所谓几何非线性效应，而且需要引入对材料本构行为非线性特性进行精确描述的所谓本构非线性(或物理非线性)效应。此外，当介质粒子的迁移十分明显，而人们又采用 Euler 描述方法时，还需要引入对材料运动迁移中非线性特性进行描述的所谓运动学非线性效应(这一点即使在经典的流体动力学中也已经广泛采用)。对本构非线性行为的引入需要通过本构理论、实验和计算相结合的研究工作来解决；对运动和变形中非线性行为的引入可以采用有限变形的理论，也可以采用增量变形的理论，在工程实践和计算中当前应用更多的还是后者，这可能是因为增量理论更容易与计算力学的研究相结合。

(3) 对复杂环境、极端条件以及与此相关联的多重因素的耦合作用的关注。现代高科技常涉及一系列新的复杂环境和极端条件，这主要包括高(低)温条件、高压条件、高速条件等等，如在化学爆炸、核爆炸以及武器高速撞击、天体撞击等问题中，可以出现几千乃至几万摄氏度的高温或零下几十摄氏度乃至更低的温度，达到几十万乃至上千万大气压的高压或者每秒几

百米乃至几公里的高速度。大的温度跨度的出现将引起材料的热效应以及与此相关联的热-力耦合效应的问题,所以热力学理论本身以及热力耦合本构关系的研究将变得十分重要。高压的问题,则涉及材料高压状态方程的研究以及材料在不同压力范围内的不同形式本构关系的研究。与高速(甚至低速)问题相关联的就有时间因素和时率效应的问题,所谓时间因素是指连续介质力学中的大多数问题在本质上不是与时间无关的静力学问题,而是与时间有关的动力学问题,这些动力学问题又可大致分为材料和结构前期响应和局部响应的波动问题以及结构后期响应和总体响应的振动问题,而不论对哪一种问题,反映材料和结构响应的各种物理量都是与作为自变量的时间 t 明显有关的;所谓时率效应是指材料和结构的响应一般是依赖于其本身的变形速率或外载的加载速率的,这也就是所谓应变率效应和应变率历史效应的问题。除了前述的温度效应和应变率效应以外,材料和结构的响应还与其变形中的应变硬(软)化效应、损伤软化效应等复杂因素有关。因此,与极端条件和复杂环境相关联,材料的本构关系必须能够反映材料的热-力耦合效应、应变硬(软)化效应、应变率效应、损伤软化效应等等多种因素的影响以及它们之间的相互耦合效应,对这些多耦合因素本构关系的研究将是连续介质力学的一个重要发展趋势。本书在介绍这些多耦合因素本构理论的同时,还希望能通过对本课题组近年来研究成果的简要介绍而顺应这一发展趋势。

(4) 结构型力学和本构型力学的结合。经典的连续介质力学如弹性力学和流体力学主要是针对给定简单本构关系(如胡克弹性固体、理想弹性流体、牛顿黏性流体等)的材料,研究其在一定外部因素(主要是力)的作用下材料和结构的响应,即所谓的正问题,可简称为“结构型力学”。随着科技和工业的进步,有大量新材料出现,材料本身的多样性以及其在不同环境下的多样性表现,使得对材料本身的行为即对其本构关系进行系统的研究和分类就成为一个新的迫切任务,而要得到材料的本构关系,我们常常又是以材料或结构在外部作用下的某种已知响应作为出发点的,这就是所谓的反问题,也可以称之为“本构型力学”。结构型力学和本构型力学二者是紧密相关和互为因果的,二者的研究成果需要相互印证。近代连续介质力学正是适应这一要求,才把对本构关系的基本理论和几大类重要的本构关系内涵的介绍作为其重要内容的。

(5) 宏观力学和细观力学的结合。连续介质力学的基本理论框架是从宏观的观点研究材料和结构的性质及其响应规律的,但其宏观的性质是与构成材料的细(微)观单元如晶格位错直至分子等的构成特征紧密相关的,因此对材料本构关系的研究需要与对材料本身的组织结构的研究相结合。物理力学试图从微观(分子、原子等)角度研究材料的宏观力学性质,但是材料内部缺陷的存在使得其预测结果与工程实际常有较大差别,这促成了细观力学和损伤力学的发展,即从细观(晶粒、粒子团、位错等)角度研究材料的行为。纳米材料等精细材料的出现以及金相显微镜和扫描电镜技术的发展更促成了细观力学和损伤力学的发展,乃至分子动力学计算方法的发展。可以说近代连续介质力学已发展到引入细观力学的成果并与之相结合的新阶段。但是受篇幅的限制和作者学识方面的限制,本书只是在介绍内变量理论以及含损伤本构关系的时候,说明了内变量和损伤等的细观背景,而并未介绍其细观结构的细节,从总体上讲本书的内容基本上仍然是在宏观连续介质力学的框架之内,但是作为一个发展趋势,我们仍然指出这一点,有兴趣的读者可以参考细观力学或材料动力学方面的书籍。

本书内容共分为 10 章。第 0 章为“笛卡儿张量基础知识”。第 1 章为“一般张量知识基础”,是从力学和物理学的需要出发,用尽可能少的篇幅介绍在一般曲线坐标中张量理论的基础知识,并说明其和笛卡儿张量理论的关系,为此,本书没有再重复介绍矢量空间的一般理论,而是假设读者已具有矢量分析的基本知识,直接从现实的三维欧几里德空间出发,首先从一点讲起,再推广到整个空间,最后再简单地提及非欧几里德空间的概念。由于其在应用上的重要性,这里我们也讲述了若干数学方面的补充知识。第 2 章为“连续介质的运动和变形”,主要从描述介质复杂运动和大变形非线性特征的需要出发,以两点张量场的一般张量理论体系进行了较系统的介绍。第 3 章为“应力原理”,从精确描述大变形介质的内部受力情况的角度出发,介绍了 Cauchy 应力张量、第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量、应力张量本构导数以及运动方程和动量矩守恒方程。第 4 章为“变形热力学”,系统介绍了热力学第一和第二定律的含义以及在连续介质场中的表现形式,即场的能量方程和熵不等式。第 5 章为“本构方程的一般理论”,主要是在简要介绍本构理论公理体系八大原理的基础之上,重点介绍了最重要的构架无关原理、局部作用原理、许可性原理和材料对称性原理,根据叙述的

方便在不同的地方分别采用了泛函表述和内变量表述。第6章至第9章分别介绍了几大类具体的常用材料的本构关系形式,即“热弹性材料”、“弹塑性材料”、“黏性流体和黏弹性材料”、“黏塑性材料”。其中“热弹性材料”一章中除了深化热力学势的概念以外,还特别介绍了几类在爆炸与冲击中应用较多的状态方程。第8章则在简单介绍黏弹性行为一般表述的基础上,重点介绍了常用的线性黏弹性体的微分型和积分型本构关系。在第7章和第9章中除了以内变量理论体系为基础对弹塑性和黏塑性本构理论进行了一般的介绍以外,还对本人及所在课题组近些年来的研究结果进行了介绍,这些知识读者是可以直接应用到科研中去的。各章的最后是习题,习题的编入原则是:不求多、不求难,而重在希望通过习题加深读者对基本概念、基本理论和基本方法的理解,以及有利于实际应用。

本书在章节体系和内容组织等方面曾得到朱兆祥教授的指点和帮助,特此致谢,并以此书作为对朱先生在天之灵的慰藉。本书在定稿过程中曾进行了多次修改和完善,期间,我的不少学生如高光发、邓世春、段世伟、李煦阳、王光勇、孙晓旺、叶中豹等,为书稿的打印、作图和修改付出了辛勤的劳动,他们也对本书的内容提出了不少有益的建议,在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,书中存在错误和不当之处在所难免,欢迎读者和专家指正。

编 者

凡例

本书所用主要符号如下：

一般用白斜体希腊或英文字母表示标量，例如 φ, Φ, u, U 等。

一般用黑斜体小写英文字母表示矢量，例如 v, a, b 等。

一般用黑斜体大写英文字母表示 2 阶及高阶张量，例如 A, B 等。

A^T :2 阶张量 A 的转置(transpose)。

$[a] = a$:矢量 a 的列阵。本书将矢量 a 与列阵相对应，故也以 a 本身表示其列阵。

$\{a\}$:矢量 a 的行阵， $\{a\}^T = [a] = a$ 。

$A \cdot a$:矢量 a 对 2 阶张量 A 的右点积，其矩阵记法为： $A \circ a$ 或 $[A][a]$ 。

$a \cdot A$:矢量 a 对 2 阶张量 A 的左点积，其矩阵记法为： $(a^T \circ A)^T = A^T \circ a$ 或 $(\{a\}[A])^T = [A]^T[a]$ 。

$A : B$:2 阶张量 A 和 2 阶张量 B 的第一种二次点积。

$A \cdot \cdot B$:2 阶张量 A 和 2 阶张量 B 的第二种二次点积。

$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$:量 Φ 的局部导数(local time derivative)。

$\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi}$:量 Φ 的随体导数(material time derivative)。

$\frac{D\Phi}{Dt}$:量 Φ 对时间的全导数(time derivative)。

∇ :E 氏梯度算子(Euler gradient operator)。

∇_i :E 氏协变算子(Euler covariant operator)。

∇^i :E 氏逆变算子(Euler contravariant operator)。

∇ :L 氏梯度算子(Lagrange gradient operator)。

∇_l :L 氏协变算子(Lagrange covariant operator)。

∇' :L 氏逆变算子(Lagrange contravariant operator)。

F: 变形梯度张量(deformation gradient tensor)。

B: 左柯西-格林张量(left Cauchy-Green tensor)或左变形张量(left deformation tensor)。

C: 右柯西-格林张量(right Cauchy-Green tensor)或右变形张量(right deformation tensor)。

V: 左伸缩张量(left stretch tensor)。

U: 右伸缩张量(right stretch tensor)。

R: 旋转张量(rotational tensor)。

E: 拉格朗日应变张量(Lagrange strain tensor)或格林应变张量(Green strain tensor)。

e: 欧拉应变张量(Euler strain tensor)或阿尔曼西应变张量(Almansi strain tensor)。

L: 质点速度空间梯度张量, 或简称质点速度的 E 氏梯度张量(Euler gradient tensor)。

D: 伸缩率张量(stretching rate tensor)或变形率张量(deformation rate tensor)。

W: 旋转率张量(spinning rate tensor 或 rotational rate tensor)。

F_t(τ): τ 时刻相对于 t 时刻的相对变形梯度张量(relative deformation gradient tensor)。

ρ: 瞬时质量密度(current mass density)。

ρ₀: 初始质量密度(original mass density)。

b: 比体积力(specific body force)。

σ 或 **T**(**σ** = **T**^T): 柯西应力张量(Cauchy stress tensor)。

S: 第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量, 简称第一类 P-K 应力张量。

Σ: 第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量, 简称第二类 P-K 应力张量。

T: 绝对温度。

g: 温度的空间梯度或 E 氏梯度。

G: 温度的物质梯度或 L 氏梯度。

h: E 氏热流矢量。

H: L 氏热流矢量。

K: 体系的动能(kinetic energy)。

k: 比动能(specific kinetic energy)。

U: 体系的内能(internal energy)。