奥赛经典

竞赛物理习题解析

宋善炎 纪风霞 黎 双 编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

竞赛物理习题解析

宋善炎　纪风霞　黎　双　编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

竞赛物理习题解析 / 宋善炎，纪风霞，黎双编著．—长沙：湖南师范大学出版社，2013.1

ISBN 978-7-5648-0990-4

Ⅰ.①竞… Ⅱ.①宋…②纪…③黎… Ⅲ.①中学物理课—题解

Ⅳ.①G634.75

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 293887 号

竞赛物理习题解析

宋善炎　纪风霞　黎　双　编著

◇策划组稿：黄道见

◇责任编辑：胡晓军

◇责任校对：黄　莉

◇出版发行：湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山　邮编/410081

电话/0731.88853867　88872751　传真/0731.88872636

网址/http：//press.hunnu.edu.cn

◇经销：湖南省新华书店

◇印刷：长沙市华中印刷厂

◇开本：787 mm×1092 mm　1/16

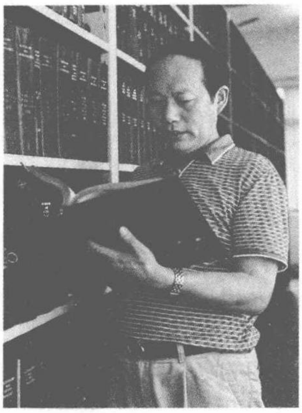
◇印张：18

◇字数：614 千字

◇版次：2013 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

◇书号：ISBN 978-7-5648-0990-4

◇定价：30.00 元

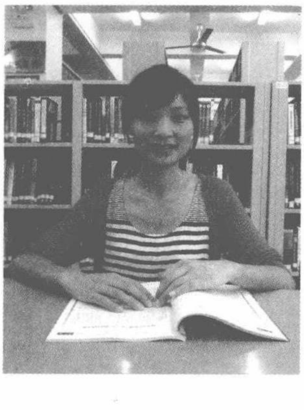


宋善炎

湖南澧县人,1964 年 9 月出生,湖南师范大学教授,现任课程与教学论(物理)研究生学位点学术带头人、《湖南中学物理》杂志社社长,先后出版《物理教学论》、《物理方法论》等 13 部著作,其中《高中物理竞赛热点专题》、《初中物理竞赛热点专题》、《新编物理奥林匹克教程》3 本竞赛书籍成为全国优秀畅销书。发表论文 67 篇。在担任湖南省国际物理奥林匹克竞赛主教练时,所教学生获国际物理奥赛金牌 5 枚、银牌 1 枚。

纪风霞

河北吴桥人,1985 年 6 月出生,硕士,现工作于重庆市黔江中学。先后发表《竞赛专题　机械能》、《竞赛专题　物体的性质》、《竞赛专题　物态变化》、《竞赛专题　磁场》等多个物理竞赛专题和《重视大学物理教学中的图像表征》等多篇论文。



黎　双

湖南浏阳人,1986 年 12 月出生,硕士,现工作于国防科技大学物理系。先后发表《竞赛专题　动量及动量守恒》、《竞赛专题　稳恒电流》、《竞赛专题　分子运动论与热力学定律》等多个物理竞赛专题和《在大学物理中创设有意义的学习经历》等多篇论文。

前　言

物理学是研究自然界中物理现象的科学。这些现象包括力现象、声音现象、热现象、电和磁现象、光现象、原子和原子核的运动变化等现象。学习物理的主要任务就是要研究这些现象，了解产生这些现象的原因，找出其中的规律，并使大家知道和掌握它，以便运用它更好地为工作和生活服务。

学习物理可以使你变得聪明，参加物理竞赛学习可以使你变得更有智慧。自然的力量是强大的，在许多时候是人力不可及的，人需要充分地了解它，正确地认识它，合理地利用它。学习物理就是了解、认识和体验自然规律的过程。通过物理竞赛学习，探索自然规律会成为我们学习的自觉动力，尊重自然规律会成为我们生活的自觉意识，按自然规律办事会成为我们工作的自觉行为。为了进步和发展，在此我们共勉：

信念在磨砺中坚定；
知识在学习中丰富；
信息在交流中扩充；
能力在实践中增强；
智慧在思考中通达。

我们要乐于、勤于、善于去磨砺、学习、交流、实践和思考。

宋善炎

目　　录

专题一　运动学

练习 1　在进行“飞镖”训练时，打飞镖的靶上共有 10 环，且第 10 环的半径为 1 cm，第 9 环的半径为 2 cm，……，依此类推，如图 1 - 1 所示，当人离靶的距离为 5 m，将飞镖对准 10 环中心以水平速度 v 投出，则($g=10\ \mathrm{m/s^2}$)(　　)

A. 当 $v \geqslant 50\ \mathrm{m/s}$ 时，会射中第 8 环线以内

B. 当 $v = 50\ \mathrm{m/s}$ 时，会射中在第 6 环线上

C. 若要击中第 10 环以内，速度 v 至少应为 $50\sqrt{5}\ \mathrm{m/s}$

D. 若要击中靶子，速度 v 至少应为 $25\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$

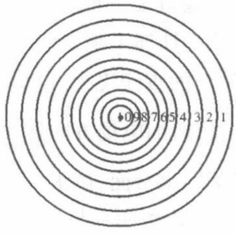


图 1 - 1

解析　BCD

由 $t=\frac{s}{v}=\frac{5}{50}\ \mathrm{s}=0.1\ \mathrm{s}$，有 $h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times10\times0.1^2\ \mathrm{m}=0.05\ \mathrm{m}$，A 错，B 对；当 $h\leqslant0.01\ \mathrm{m}$ 时，由 $h=\frac{1}{2}gt^2$，$t=\frac{s}{v}$ 得 $v=\frac{s}{t}=s\sqrt{\frac{g}{2h}}\geqslant5\times\sqrt{\frac{10}{2\times0.01}}$ $\mathrm{m/s}\geqslant50\sqrt{5}\ \mathrm{m/s}$，C 正确；当 $h\leqslant0.1\ \mathrm{m}$，由前式可分析得出 $v\geqslant25\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$，D 正确，选项 B、C、D 正确.

练习 2　如图 1 - 2 所示，长度为 L 的直杆上端连着一个半径不计的小球 A，下端固定在转轴 O 上，物体 B 与转轴 O 在同一水平面上，球 A 顺时针转动时，A、B 紧密接触，当杆与水平方向的夹角等于 θ 时，物体 B 水平移动的速度等于 v，那么，此时，球 A 转动的角速度是多少？

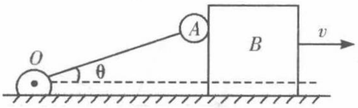


图 1 - 2

图 1 - 3

解析　实际上 A 的速度与杆垂直，其大小为 $v'=\omega L$. 因为球与物体紧密接触，两物体的水平方向速度应该相等，也就是说 v' 的水平分量应该等于 v. 将 v' 如图 1 - 3 分解，则

$v=v'\sin\theta=\omega L\sin\theta$

所以 $\omega=\frac{v}{L\sin\theta}$.

练习 3　如 1 - 4 图所示，细绳长 l，吊一个质量为 m 的铁球，绳受 $2mg$ 拉力就会断裂，绳的上端系一质量不计的环，环套在光滑水平杆上. 起初环带着球一起以速度 $v=\sqrt{gl}$ 向右匀速运动，在 A 处环被挡住而停下的瞬间，绳子所受拉力为多少？在以后的运动过程中，球是先碰墙还是先碰地？(已知 A 处离墙水平距离为 l，球离地高度 $h=2l$)

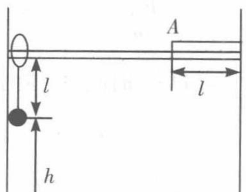


图 1 - 4

解析　环被挡住而停下，球将作圆周运动，

$F-mg=m\frac{v^2}{l}$

将 $v=\sqrt{gl}$ 代入，得

$F = 2mg$

表明细绳断裂，球改为以初速度 $v = \sqrt{gl}$ 作平抛运动.

若球直接落地，所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4l}{g}}$$

球平抛到墙所需时间为

$$t' = \frac{l}{v} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

因为 $t > t'$ 所以球将先与墙相碰.

练习 4 如图 1-5 所示，质量为 m 的带电小球静止在绝缘水平面上，某时刻给小球加上某方向上的范围足够大的匀强电场，小球腾空沿着与水平面成 30° 角的直线飞去. 电场力的大小恒为 $F = \sqrt{3}mg$，小球经过一段时间 t 的飞行后，将所加电场方向逆时针旋转 120°，再经过 $\frac{t}{2}$ 撤去电场. 小球在重力的作用下落回水平面，试求：

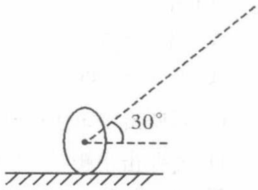


图 1-5

(1) 落回点与出发点相距多远；

(2) 小球的飞行时间？

解析 (1) 电场方向未变之前，以小球为研究对象，受力分析如图 1-6. 设电场力与飞行方向的夹角为 α，小球飞行的加速度为 a.

x 方向：$\sqrt{3}mg\cos\alpha - mg\sin30° = ma$

y 方向：$\sqrt{3}mg\sin\alpha - mg\cos30° = 0$

解得：$\alpha = 30°$，$a = g$

小球沿着直线飞行的距离：$s = \frac{1}{2}gt^2$

速度：$v = at = gt$

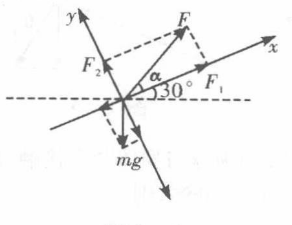


图 1-6

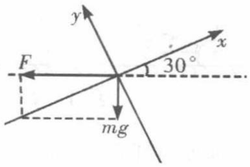


图 1-7

电场方向改变之后，以小球为研究对象，受力分析如图 1-7，因合力方向与飞行方向在一条直线上，只是方向相反，所以，小球仍然沿原直线飞行，速度越来越小，此时加速度：

$$a' = \frac{F_合}{m} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (\sqrt{3}mg)^2}}{m} = 2g$$

经过 $\frac{t}{2}$ 时间，物体的速度为

$$v' = v - a' \cdot \frac{t}{2} = gt - 2g \cdot \frac{t}{2} = 0$$

在 $\frac{t}{2}$ 时间内，小球飞行的距离为

$$s' = \frac{v^2}{2a'} = \frac{(gt)^2}{4g} = \frac{gt^2}{4}$$

当速度等于零之后，撤去电场，小球做自由落体运动，所以落回点与出发点相距为

$L=(s+s')\cos 30^{\circ}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}gt^2$

(2) 设再经过 T 时间落回地面，则

$h=(s+s')\sin 30^{\circ}=\dfrac{1}{2}gT^2$，解得 $T=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$，小球总的飞行时间为

$t_{总}=t+\dfrac{t}{2}+T=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}t$

练习 5　春节期间，城乡许多家庭为了增添节日的热闹气氛，燃放了不少组合“春雷”花炮，组合“春雷”花炮一般由炮筒、炮体和引线等部分组成. 组合“春雷”花炮有 16 响、25 响、36 响……不同的组合方式，如图 1-8 所示为 16 响“春雷”的示意图. 燃放“春雷”的过程一般是先点火，炮体在炮筒中经过一段匀加速运动的过程后，从炮筒口以较大的速度冲向天空，在最高点炸裂，然后落地. 已知炮筒的高度 $h=50$ cm，炮体在炮筒中的加速度为 $400\ \mathrm{m/s^2}$，炮体与炮体间的水平距离为 $l=8$ cm，导入炮体的引线长度与炮筒高度相同，如图所示，引线的燃烧速度为 $v=2$ cm/s，不计空气阻力，试求：

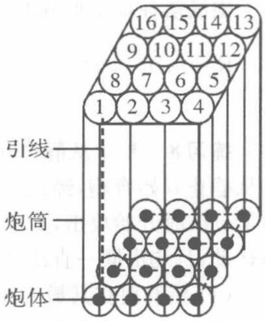


图 1-8

(1) 从点火到最后一个炮体离开炮筒的时间；

(2) 炮体能达到的最大高度.

解析　(1) 花炮引线的总长度 $L=h+15l=(0.5+15\times 0.08)$ m $=1.7$ m，

$t_1=\dfrac{L}{v}=\dfrac{1.7}{0.02}\ \mathrm{s}=85\ \mathrm{s}$，

最后一个炮体从点火到离开炮筒的时间 $t_2=\sqrt{\dfrac{2h}{a}}=\sqrt{\dfrac{2\times 0.5}{400}}\ \mathrm{s}=0.05\ \mathrm{s}$，

所以 $t=t_1+t_2=85.05$ s.

(2) 设炮体离开炮筒时的速度为 v，

有 $v^2=2ah$，$v^2=2gh'$，

$h'=\dfrac{a}{g}h=\dfrac{400}{10}\times 0.5\ \mathrm{m}=20\ \mathrm{m}$，

所以达到的最大高度为 $H=h+h'=20.5$ m .

练习 6　为了测量一高楼的高度，某人设计了如下实验，在一根长为 l 的绳两端各拴一重球，一人站在楼顶上，手执绳的上端无初速度释放使其自由落下，另一个人在楼下测量两球落地的时间差 Δt，即可根据 l、Δt、g 得出楼的高度(不计空气阻力). 请问：

(1) 从原理上讲，这个方案是否正确？

(2) 从实际测量来看，你估计最大困难是什么？

(3) 若测得 $l=10$ m，$\Delta t=0.4$ s，g 取 $10\ \mathrm{m/s^2}$，估算楼高多少？

解析　(1) 从原理上讲，这个方案正确.

$$h-l=\frac{1}{2}gt^2 \quad ①$$

$$h=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 \quad ②$$

两个方程，两个未知数 h 和 t，方程可解，故方案可行.

(2) 从实际测量看，最大困难是 Δt 太小，难以测量.

(3) 由 $h-l=\dfrac{1}{2}gt^2$，$h=\dfrac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$，得

$h=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{l}{g\Delta t}+\dfrac{\Delta t}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\times 10\times\left(\dfrac{10}{10\times 0.4}+\dfrac{0.4}{2}\right)^2\ \mathrm{m}=36.45\ \mathrm{m}.$

练习7　一把雨伞边缘的半径为r，且高出水平地面h. 当雨伞以角速度ω旋转时，雨滴自边缘甩出落在地面上成一个大圆周. 这个大圆的半径为________.

解析　雨滴离开雨伞的速度为$v_0=\omega r$

雨滴做平抛运动的时间为$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

雨滴的水平位移为$x=v_0t=\omega r\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

雨滴落在地上形成的大圆的半径为

$$R=\sqrt{r^2+x^2}=\sqrt{r^2+\omega^2r^2\frac{2h}{g}}=r\sqrt{1+\frac{2h\omega^2}{g}}$$

练习8　羚羊从静止开始奔跑，经过50 m距离能加速到最大速度25 m/s，并能维持一段较长的时间；猎豹从静止开始奔跑，经过60 m的距离能加速到最大速度30 m/s，以后只能维持这个速度4.0 s. 设猎豹距离羚羊x m时开始攻击，羚羊则在猎豹开始攻击后1.0 s才开始奔跑，假定羚羊和猎豹在加速阶段分别做匀加速运动，且均沿同一直线奔跑. 问：

(1) 猎豹要在其最大速度减速前追到羚羊，x值应在什么范围?

(2) 猎豹要在其加速阶段追上羚羊，x值应在什么范围?

解析　(1) 设猎豹在最大速度将要减速时恰追上羚羊，则猎豹运动的位移和时间分别为

$$s_1=s_{10}+v_{1m}t_1''=60\text{ m}+30\times4.0\text{ m}=180\text{ m}$$

$$t_1=\frac{s_{10}}{\frac{1}{2}v_{1\text{m}}}+t_1''=\frac{60}{\frac{1}{2}\times30}\text{ s}+4.0\text{ s}=8.0\text{ s}$$

则羚羊运动的时间为$t_2=t_1-1=7.0$ s

羚羊加速的时间为$t'_2=\dfrac{s_{20}}{\frac{1}{2}v_{2\text{m}}}=\dfrac{50}{\frac{1}{2}\times25}\text{ s}=4.0\text{ s}$

故羚羊匀速运动的时间为$t''_2=t_2-t'_2=3.0$ s

羚羊的位移为$s_2=s_{20}+v_{2\text{m}}t''_2=50\text{ m}+25\times3.0\text{ m}=125\text{ m}$

则为使猎豹能在从最大速度减速前追上羚羊，应有$x\leqslant s_1-s_2=55$ m.

(2) 猎豹加速的时间和位移分别为

$$t'_1=\frac{s_{10}}{\frac{1}{2}v_{1\text{m}}}=4.0\text{ s}$$

$$s'_1=60\text{ m}$$

羚羊加速运动的加速度和位移分别为

$$a_2=\frac{v_{2\text{m}}^2}{2s_{20}}=\frac{25^2}{2\times50}\text{ m/s}^2=6.25\text{ m/s}^2$$

$$s'_2=\frac{1}{2}a_2(t'_1-1)^2=\frac{1}{2}\times6.25\times3.0^2\text{ m}=28.1\text{ m}$$

为使猎豹能在加速阶段追上羚羊，应有$x\leqslant s'_1-s'_2=31.9$ m.

练习9　我们在电影或电视中经常可以看到这样的惊险场面：一辆汽车从山顶落入山谷. 为了拍摄重为15000 N的汽车从山崖上坠落的情景，电影导演通常用一辆模型汽车代替实际汽车. 设模型汽车与实际汽车的大小比例为$\dfrac{1}{25}$，那么山崖也必须用$\dfrac{1}{25}$的比例来代替真实的山崖. 设电影每1 min放映的胶片张数是一定的，为了能把模型汽车坠落的情景放映得恰似拍摄实景一样，以达到以假乱真的视觉效果. 问：在实际拍摄的过程中，电影摄影机每1 s拍摄的胶片数应是实景拍摄的几倍?

解析 可将汽车坠落山崖的运动看作自由落体运动，即模型汽车坠落和实际汽车坠落的加速度相同，根据 $h=\frac{1}{2}gt^2$

由 $h_{模}=\frac{1}{25}h_{实}$ 得 $t_{模}=\frac{1}{5}t_{实}$.

为了使模型汽车的坠落效果逼真，拍摄模型下落的胶片张数应与拍摄实际汽车下落的胶片张数相同，故拍摄模型时每 1 s 拍摄的胶片张数是实景拍摄时每 1 s 拍摄胶片张数的 5 倍.

练习 10 飞机以恒定的速度 v_0 沿水平方向飞行，飞行高度为 2000 m，在飞行过程中释放一炸弹，在 30 s 后飞行员听见炸弹落地的爆炸声. 假设此爆炸声向空间各个方向的传播速度都为 320 m/s，炸弹受到的空气阻力可以忽略，取 $g=10\ \text{m/s}^2$. 则炸弹经________ s 时间落地，该飞机的飞行速度 $v_0=$ ________ m/s.（结果保留两位有效数字）

解析 炸弹飞行时间由平抛运动规律可求.

竖直方向为自由落体运动，则由 $h=\frac{1}{2}gt^2$，可求得 $t_1=20$ s.

则声音传播时间 $t_2=30\text{ s}-20\text{ s}=10\text{ s}$

由此可求飞行速度.

炸弹落地时，飞机在其正上方，在声音传播到飞机的 10 s 内飞机的位移为 $x=v_0t_2$，

如图 1-9 所示，则

$h^2+x^2=v^2{t_2}^2$，

即 $h^2+{v_0}^2{t_2}^2=v^2{t_2}^2$

解得 $v_0=\sqrt{v^2-\frac{h^2}{t_2^2}}=\sqrt{320^2-\frac{2000^2}{10^2}}\ \text{m/s}\approx 250\ \text{m/s}$.

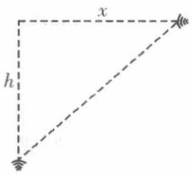


图 1-9

练习 11 如图 1-10 所示，有一质量为 m 的小球 P 与穿过光滑水平板上小孔 O 的轻绳相连，用手拉着绳子另一端，使小球在水平板上绕 O 点做半径为 a、角速度为 ω 的匀速圆周运动. 问：

(1) 此时绳上的拉力有多大？

(2) 若将绳子从此状态迅速放松，后又拉直，使小球绕 O 做半径为 b 的匀速圆周运动. 从放松到拉直这段过程经历了多长时间？

(3) 小球做半径为 b 的匀速圆周运动时，绳子上的拉力又是多少？

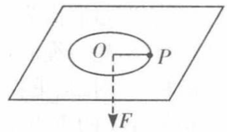


图 1-10

解析 (1) 绳子上的拉力提供小球做匀速圆周运动的向心力，故有

$F=m\omega^2a$

(2) 松手后绳子上的拉力消失，小球将从松手时的位置沿圆周的切线方向，在光滑的水平面上做匀速直线运动. 当绳在水平板上长为 b 时，绳又被拉紧. 在这段匀速直线运动的过程中小球运动的距离为 $s=\sqrt{b^2-a^2}$，如图 1-11 所示. 故

$t=s/v=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\omega a}$

(3) 将刚拉紧绳时的速度分解为沿绳子的分量和垂直于绳子的分量. 在绳被拉紧的短暂过程中，球损失了沿绳的分速度，保留着垂直于绳的分速度做匀速圆周运动. 被保留的速度的大小为

$v_1=va/b=\omega a^2/b$

所以绳子后来的拉力为

$F'=mv_1^2/b=m\omega^2a^4/b^3$

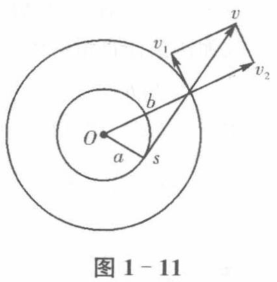


图 1-11

练习 12 如图 1-12 所示，a 为一固定放置的半径为 R 的均匀带电球体，O 为其球心. 已知取无限远处

的电势为零时，球表面处的电势为$U=1000$ V. 在离球心O很远的O'点附近有一质子b，它以$E_k=2000$ eV的动能沿与$O'O$平行的方向射向a. 以l表示b与$O'O$线之间的垂直距离，要使质子b能够与带电球体a的表面相碰，试求l的最大值. 把质子换成电子，再求l的最大值.（第20届全国中学生物理竞赛复赛试题）

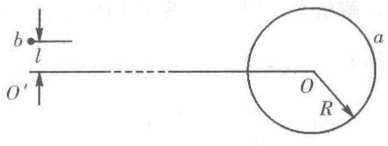


图 1-12

解析　质子在运动过程中受到a球对它的库仑力作用，且库仑力总是通过a球的球心. 类似这样的力我们称之为有心力. 如取球心O为参考点，则其作用力对O的力矩始终为零，即质子在运动过程中对参考点O的角动量守恒. 即在有心力作用下角动量守恒.

如图1-13所示，令m表示质子的质量，v_0和v分别表示质子的初速度和到达a球球面处的速度，e表示元电荷. 质子在b处的角动量为$L_b=mv_0l_{\max}$，到达球a表面时的角动量为$L_a=mv\cdot R$，

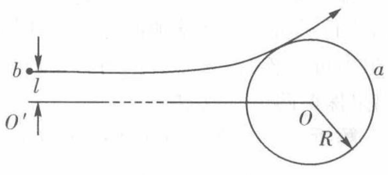


图 1-13

所以得

$$mv_0l_{\max}=mvR \qquad ①$$

质子从b运动到a，能量守恒，由于无穷远处电势能为零，故得

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+eU \qquad ②$$

由式①、②可得

$$l_{\max}=R\sqrt{1-\frac{2eU}{mv_o^2}}$$

代入数据，可得$l_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$

若把质子换成电子，此时式②中e改为$-e$，同理可求得$l_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{2}R$.

练习13　如图1-14所示，滑轮两边悬挂的重物与盘的质量相同，均为M，处于静止. 现有距盘底高为h、质量为m的胶泥自由下落，求胶泥粘在盘上时盘获得的初速度. 不计滑轮与绳质量，及轴承摩擦和绳的伸长.

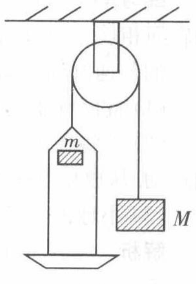


图 1-14

解析　对盘、重物、胶泥组成的质点系，在胶泥下落过程中，质点系对轴心O的外力矩为胶泥的重力矩. 当胶泥与盘碰撞时，碰撞内力对O的内力矩远大于胶泥的重力矩，从而得质点系对O的角动量近似守恒. 设v_0为m碰前的速度，r为滑轮的半径，则

质点系碰撞前对O的角动量为

$$L_1=mv_0r \qquad ①$$

质点系碰撞后瞬间对O的角动量为

$$L_2=(m+M)vr+Mrv \qquad ②$$

胶泥碰前作自由落体运动，所以

$$v_0=\sqrt{2gh} \qquad ③$$

由①、②、③式可得

$$v=\frac{m}{2M+m}\sqrt{2gh}$$

练习14　如图1-15所示，一摩托车运动员跳跃一壕沟，他以$v_0=10$ m/s且与水平面成$\alpha=30°$角的初速度从沟的西边缘起跳，刚好在沟的东边缘落地. 已知东边缘比西边缘低$H=10$ m，重力加速度g取10 m/s²，设空气阻力忽略. 试求：在空中飞行的时间及沟宽L.

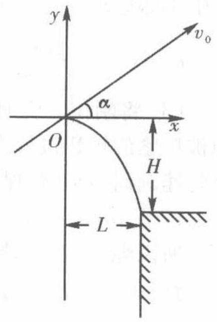


图 1-15

解析　对于运动学问题，我们要充分利用图像所具有的形象、直观的特点，借

助图像帮助我们审视清楚运动物体的具体位置与运动过程，然后应用相关规律或恰当的公式分析讨论. 利用图像法，依据已有的图像，设摩托车起跳点与着地点的水平距离是 L，竖直距离是 H，从起跳到着地的时间是 T，v_0 与水平方向的夹角为 α，则摩托车飞行过程的运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha \cdot t \\ y = v_0\sin\alpha \cdot t - \dfrac{1}{2}gT^2 \end{cases}$$

由于刚好在沟的东边缘落地，故有

$$\begin{cases} L = v_0\cos30^\circ \cdot T \\ -H = v_0\sin30^\circ \cdot T - \dfrac{1}{2}gT^2 \end{cases}$$

由上可得

$T = 2\ \mathrm{s}, L = 17.3\ \mathrm{m}$

练习 15　如图 1－16 所示，杆 OA 长为 R，可绕过 O 点的水平轴在竖直平面内转动，其端点 A 系着一跨过定滑轮 B、C 的不可伸长的轻绳，绳的另一端系一物块 M，滑轮的半径可忽略，B 在 O 的正上方，OB 之间的距离为 H. 某一时刻，当绳的 BA 段与 OB 之间的夹角为 α 时，杆的角速度为 ω，求此时物块 M 的速率 v_M.

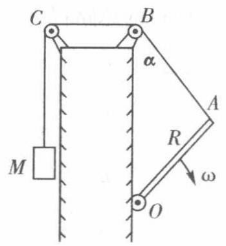


图 1－16

解析　杆的端点 A 点绕 O 点作圆周运动，其速度 v_A 的方向与杆 OA 垂直，在所考察时其大小为

$v_A = \omega R$

对速度 v_A 作如图 1－17 所示的正交分解，沿绳 BA 的分量就是物块 M 的速率 v_M，则

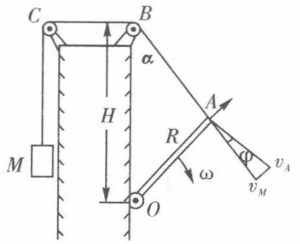


图 1－17

$v_M = v_A\cos\varphi$

由正弦定理知 $\dfrac{\sin\angle OAB}{H} = \dfrac{\sin\alpha}{R}$

由图看 $\angle OAB = \dfrac{\pi}{2} + \varphi$

由以上各式得 $v_M = \omega H\sin\alpha$.

练习 16　质点以加速度 a 从静止出发做直线运动，在某时刻 t，加速度变为 $2a$；在时刻 $2t$，加速度变为 $3a$；…；在 nt 时刻，加速度变为 $(n+1)a$，求：

(1) nt 时刻质点的速度；

(2) nt 时间内通过的总路程.

解析　根据递推法的思想，从特殊到一般找到规律，然后求解.

(1) 质点在某时刻 t 末的速度为 $v_t = at$

$2t$ 末的速度为 $v_{2t} = v_t + 2at = at + 2at$

$3t$ 末的速度为 $v_{3t} = v_{2t} + 3at = at + 2at + 3at$

……

则 nt 末的速度为

$$v_{nt} = v_{(n-1)t} + nat$$
$$= at + 2at + 3at + \cdots + (n-1)at + nat = at(1+2+3+\cdots+n)$$
$$= at \cdot \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{2}n(n+1)at$$

(2) 同理，可推得 nt 内通过的总路程为

$$s = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)at^2$$

练习 17　小球从高 $h_0 = 180$ m 处自由下落，着地后跳起又下落，每与地面相碰一次，速度减小$\frac{1}{n}$($n = 2$)，求小球从下落到停止经过的总时间和通过的总路程.(g 取 10 m/s^2)

解析　小球从 h_0 高处落地时，速率 $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 60$ m/s

第一次跳起时和又落地时的速率 $v_1 = v_0/2$

第二次跳起时和又落地时的速率 $v_2 = v_0/2^2$

……

第 m 次跳起时和又落地时的速率 $v_m = v_0/2^m$

每次跳起的高度依次为 $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{h_0}{n^2}$，$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{h_0}{n^4}$，…

通过的总路程为

$$\begin{aligned}\sum s &= h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \cdots + 2h_m + \cdots \\ &= h_0 + \frac{2h_0}{n^2}(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \cdots + \frac{1}{n^{2m-2}}) + \cdots \\ &= h_0 + \frac{2h_0}{n^2 - 1} = h_0 \cdot \frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{5}{3}h_0 \\ &= 300 \text{ m}\end{aligned}$$

经过的总时间为

$$\begin{aligned}\sum t &= t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_m + \cdots \\ &= \frac{v_0}{g} + \frac{2v_1}{g} + \cdots + \frac{2v_m}{g} + \cdots \\ &= \frac{v_0}{g}[1 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + 2 \cdot (\frac{1}{n})^m + \cdots] \\ &= \frac{v_0}{g}(\frac{n+1}{n-1}) \\ &= \frac{3v_0}{g} = 18 \text{ s}\end{aligned}$$

练习 18　如图 1-18 所示，一个身高为 h 的人在灯下以速度 v 沿水平直线行走. 设灯距地面高为 H，求证人影的顶端 C 点是做匀速直线运动.

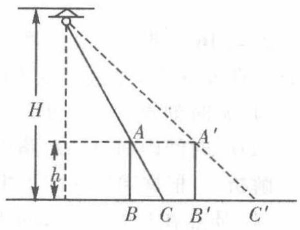


图 1-18

解析　该题不能用速度分解求解，考虑采用“微元法”. 设某一时间人经过 AB 处，再经过一微小过程 $\Delta t(\Delta t \to 0)$，则人由 AB 到达 $A'B'$，人影顶端 C 点到达 C' 点，由于 $\Delta S_{AA'} = v\Delta t$，则人影顶端的移动速度为

$$v_c = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S_{CC'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\frac{H}{H-h}\Delta S_{AA'}}{\Delta t} = \frac{Hv}{H-h}$$

可见 v_c 与所取时间 Δt 的长短无关，所以人影的顶端 C 点做匀速直线运动.

练习 19　某行星围绕太阳 C 沿圆弧轨道运行，它的近日点 A 离太阳的距离为 a，行星经过近日点 A 时的速度为 v_A，行星的远日点 B 离开太阳的距离为 b，如图 1-19 所示，求它经过远日点 B 时的速度 v_B 的大小.

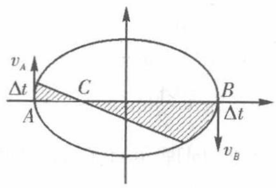


图 1-19

解析　此题可根据万有引力提供行星的向心力求解. 也可根据开普勒第二定律，用微元法求解. 设行星在近日点 A 时又向前运动了极短的时间 Δt，由于时间极短可以认为行星在 Δt 时间内做匀速圆周运动，线速度为 v_A，半径为 a，可以得到行星在 Δt 时间内扫过的面积 $S_a = \frac{1}{2}v_A\Delta t \cdot a$. 同理，设行星在

经过远日点 B 时也运动了相同的极短时间 Δt，则也有 $S_b = \frac{1}{2}v_B\Delta t \cdot b$. 由开普勒第二定律可知

$S_a = S_b$

即得 $v_B = \frac{a}{b}v_A$.

此题也可用对称法求解.

练习 20　如图 1-20 所示，小环 O 和 O' 分别套在不动的竖直杆 AB 和 $A'B'$ 上，一根不可伸长的绳子穿过环 O'，绳的两端分别系在 A' 点和 O 环上，设环 O' 以恒定速度 v 向下运动，求当 $\angle AOO' = \alpha$ 时，环 O 的速度.

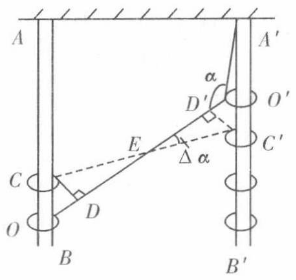


图 1-20

解析　O、O' 之间的速度关系与 O、O' 的位置有关，即与 α 角有关，因此要用微元法找它们之间的速度关系.

设经历一段极短时间 Δt，O' 环移到 C'，O 环移到 C，自 C' 与 C 分别作 $O'O$ 的垂线 $C'D'$ 和 CD，从图中看出：

$OC = \frac{OD}{\cos\alpha}, O'C' = \frac{O'D'}{\cos\alpha}$

因此，$OC + O'C' = \frac{OD + O'D'}{\cos\alpha}$　①

因 $\Delta\alpha$ 极小，所以 $EC' \approx ED'$，$EC \approx ED$，

从而 $OD + O'D' \approx OO' - CC'$　②

由于绳子总长度不变，故 $OO' - CC' = O'C'$　③

由 ①、②、③ 式可得

$OC + O'C' = \frac{O'C'}{\cos\alpha}$，即 $OC = O'C'(\frac{1}{\cos\alpha} - 1)$

等式两边同除以 Δt 得环 O 的速度为

$v_0 = v(\frac{1}{\cos\alpha} - 1)$

练习 21　图 1-21 中 AOB 是一内表面光滑的楔形槽，固定在水平桌面(图中纸面)上，夹角 $\alpha = 1°$(为了能看清楚，图中画的是夸大了的). 现将一质点在 BOA 面内从 A 处以速度 $v = 5$ m/s 射出，其方向与 AO 间的夹角 $\theta = 60°$，$OA = 10$ m. 设质点与桌面间的摩擦可忽略不计，质点与 OB 面及 OA 面的碰撞都是弹性碰撞，且每次碰撞时间极短，可忽略不计，问：

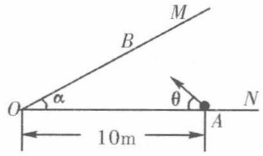


图 1-21

(1) 经过几次碰撞质点又回到 A 处与 OA 相碰?(计算次数时包括在 A 处的碰撞)

(2) 共用多少时间?

(3) 在这过程中，质点离 O 点的最短距离是多少?

解析　(1) 第一次，第二次碰撞如图 1-22 所示，由三角形的外角等于不相邻的两个内角和可知 $\angle MBO = 60° + 1° = 61°$，故第一次碰撞的入射角为 $90° - 61° = 29°$.

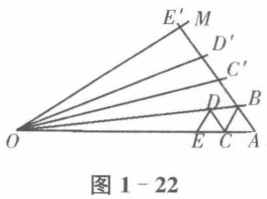


图 1-22

第二次碰撞，$\angle BCA = 61° + 1° = 62°$，故第二次碰撞的入射角为 $90° - 62° = 28°$.

因此每碰一次，入射角要减少 $1°$，即入射角为 $29°$、$28°$、…、$0°$，当入射角为 $0°$ 时，质点碰后沿原路返回. 包括最后在 A 处的碰撞在内，往返总共 60 次碰撞.

(2) 如图 1-22 所示，从 O 依次作出与 OB 边成 $1°$、$2°$、$3°$… 的射线，从对称规律可推知，在 AB 的延长线上，BC'、$C'D'$、$D'E'$… 分别和 BC、CD、DE… 相等，它们和各射线的交角即为各次碰撞的入射角与直角之和. 碰撞入射角为 $0°$ 时，即交角为 $90°$ 时开始返回.

故质点运动的总路程为一锐角为 $60°$ 的 Rt$\triangle AMO$ 的较小直角边 AM 的 2 倍.

即 $s = 2AM = 2AO \cdot \cos 60° = 10\ \mathrm{m}$

所用总时间 $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{10}{5} = 2\ \mathrm{s}$.

(3) 碰撞过程中离 O 的最近距离为另一直角边 $OM = AO \cdot \sin 60° = 5\sqrt{3}\ \mathrm{m}$.

练习 22 一只蚂蚁从洞中沿直线爬出，已知爬出速度 v 的大小与距蚂蚁洞中心的距离 L 成反比，当蚂蚁爬到距蚂蚁洞中心距离 $L_1 = 1\ \mathrm{m}$ 的 A 点时，速度大小为 $v_1 = 20\ \mathrm{cm/s}$，问当蚂蚁爬到距蚂蚁洞中心 $L_2 = 2\ \mathrm{m}$ 的 B 点时，其速度大小 $v_2 = ?$ 蚂蚁从 A 点到达 B 点所用的时间 $t = ?$

解析 虽然蚂蚁的运动我们不能直接用已学过的运动学公式求解，但只要能找到描述蚂蚁运动的公式和学过的公式的形式相同，便可借助学过的公式形式使问题得以解决.

由已知得：蚂蚁在距离巢中心 L 处的速度为 $v = k\dfrac{1}{L}$，代入已知得

$k = vL = 0.2 \times 1 = 0.2\ \mathrm{m^2/s}$

所以当 $L_2 = 2\ \mathrm{m}$ 时，其速度 $v_2 = \dfrac{k}{L_2} = 0.1\ \mathrm{m/s}$.

由速度的定义得蚂蚁从 L 到 $L + \Delta L$ 所需时间为 Δt

所以 $\Delta t = \dfrac{\Delta L}{v} = \dfrac{1}{k} \cdot \Delta L \cdot L$ ①

类比初速度 $v_0 = 0$ 的匀加速直线运动的两个基本公式 $\begin{cases} \Delta s = v\Delta t \\ v = at \end{cases}$

在 t 到 Δt 时刻所经位移 Δs 为 $\Delta s = a \cdot \Delta t \cdot t$ ②

比较 ①、② 两式可以看出两式的表述形式相同.

据此，可得蚂蚁问题中的参量 t 和 L 分别类比为初速为零的匀加速直线运动中的 s 和 t. 而 $\dfrac{1}{k}$ 相当于加速度 a，于是可得在此蚂蚁问题中，

$t = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{k} \cdot L^2$

令 t_1 对应 L_1，t_2 对应 L_2，则所求时间为 $\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2k}L_1^2 \\ t_2 = \dfrac{1}{2k}L_2^2 \end{cases}$

代入已知量可得从 A 到 B 所用的时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{2k}L_2^2 - \frac{1}{2k}L_1^2$$

$$= \frac{2^2}{2 \times 0.2} - \frac{1}{2 \times 0.2} = 7.5\ \mathrm{s}$$

练习 23 质点由 A 向 B 做直线运动，A、B 间的距离为 L，已知质点在 A 点的速度为 v_0，加速度为 a，如果将 L 分成相等的 n 段，质点每通过 L/n 的距离加速度均增加 a/n，求质点到达 B 时的速度.

解析 从 A 到 B 的整个运动过程中，由于加速度均匀增加，故此运动是非匀变速直线运动，而非匀变速直线运动，不能用匀变速直线运动公式求解，但若能将此运动用匀变速直线运动等效代替，则此运动就可以求解.

因加速度随通过的距离均匀增加，则此运动中的平均加速度为

$$a_{平} = \frac{a_{初} + a_{末}}{2} = \frac{a + a + \dfrac{(n-1)a}{n}}{2} = \frac{3an - a}{2n} = \frac{(3n-1)a}{2n}$$

由匀变速运动的导出公式得

$2a_{平} L = v_B^2 - v_0^2$

解得 $v_B = \sqrt{v_0^2 + \frac{(3n-1)aL}{n}}$.

*** **练习 24** 长均为 l 的两杆用铰链 P 相连,如图 1-23 所示,其中一根杆的自由端用铰链 O 固定,而另一根自由端 Q 以大小和方向恒定的速度 v_0 开始运动,并且在开始时刻速度 v_0 平行于此时两杆夹角 2α 的角平分线. 求开始运动后经过非常短的时间,连接两杆的铰链 P 的加速度大小和方向.

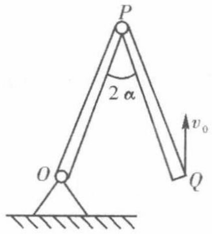


图 1-23

解析 设 P 点速度为 v_P,方向垂直于 OP 杆,如图 1-24 所示,对 PQ 杆,由速度相关关系可知

$v_P \cos(90° - 2\alpha) = v_0 \cos\alpha$

可得 $v_P = \frac{v_0}{2\sin\alpha}$

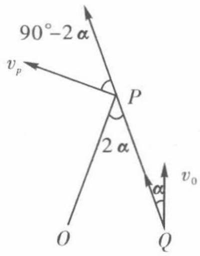


图 1-24

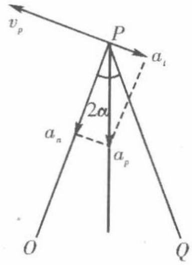


图 1-25

对应的向心加速度(沿 PO 方向)

列出加速度的矢量关系式:

$a_n = \frac{v_P^2}{l} = \frac{v_0^2}{4l\sin^2\alpha}$

$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t$

其中,a_t 为 P 点切向加速度矢量,因为 Q 点的速度大小和方向均恒定,设想一个 Q 点不动的惯性参考系,O 点以恒定速度 $-v_0$ 运动,P 点运动情况应该与之前对称相同,所以它必沿 2α 角平分线方向. 作出如图 1-25 所示的矢量图解,由图可知

$a_P = \frac{a_n}{\cos\alpha} = \frac{v_0^2}{4l\sin^2\alpha\cos\alpha}$

方向沿角 2α 的角平分线,与 v_0 方向相反.

*** **练习 25** 两辆汽艇拖一艘驳船,汽艇速度分别为$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$,其夹角为 α,在该时刻矢量$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$ 各沿汽艇方向,如图 1-26 所示,求驳船行驶速度.

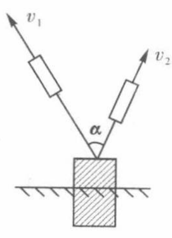


图 1-26

解析 驳船速度在两汽艇方向上的分量与驳船速度相等,可以把驳船速度 v 分解为 v_1 和垂直 v_1 方向上的分量 v'_1,或分解成 v_2 和垂直 v_2 方向上的分量 v'_2,如图 1-27 所示.

由图中几何关系得

$v_1 \cos\alpha + v'_1 \sin\alpha = v_2$

即 $v'_1 = \frac{v_2 - v_1\cos\alpha}{\sin\alpha}$

由此,驳船速度大小为

$v = \sqrt{v_1^2 + v_1'^2} = \sqrt{v_1^2 + (\frac{v_2 - v_1\cos\alpha}{\sin\alpha})^2}$