普通高等教育“十二五”规划教材

◎曾金平　张忠志　主编

Advanced Mathematics
Learning guidance

高等数学学习指导

（经管类）

长江出版传媒　湖北科学技术出版社

普通高等教育"十

曾金平　张忠志　主编

Advanced Mathematics

高等数学学习指导

（经管类）

长江出版传媒　湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导:经管类 / 曾金平,张忠志主编.
—武汉 :湖北科学技术出版社,2015.9
ISBN 978-7-5352-7593-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曾… ②张… Ⅲ.①高等数学—
高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 210049 号

责任编辑:杨瑰玉
封面设计:喻 杨

出版发行:湖北科学技术出版社
电话:027-87679468
地 址:武汉市雄楚大街 268 号
(湖北出版文化城 B 座 13—14 层)
邮编:430070
网 址:http://www.hbstp.com.cn

印 刷:武汉兴和彩色印务有限公司
邮编:430072

700×1000 1/16
24.25 印张
416 千字
2015 年 9 月第 1 版
2015 年 9 月第 1 次印刷
定价:56.00 元

内 容 简 介

《高等数学学习指导(经管类)》是与曾金平、张忠志主编的《高等数学(经管类)》(湖北科学技术出版社出版)配套的学习指导书.全书共8章,内容与教材相呼应,包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分、定积分及其应用,多元函数微积分,常微分方程,无穷级数等内容.每章均由主要内容与基本要求、知识结构框图、知识点概述与疑难解析、典型例题以及习题解答五部分组成.

本书可作为普通高等院校经管类各专业的学习指导书或参考书.

前　言

高等数学是大学数学中一门重要的基础课程，它对学生综合素质的培养与训练以及后续课程的学习起着极其重要的作用.

随着科学与技术的迅速发展，高等学校各个专业对数学的要求不断提高，数学已经成为各个专业学习和研究其专业知识的重要基础工具，并不断渗透到各个学科领域.掌握好高等数学的基本知识、基础理论及基本分析与推理方法，对学生后续课程的学习有很大帮助.然而，由于高等数学内容繁多，学习方法和中学时期有很大差异，对于刚入大学校门的本科生，学习起来会有一定的难度.为了克服这种困难，我们组织了具有丰富教学经验的教师，以国家教育部数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》为依据，结合目前一般高等院校高等数学教学的实际情况，与湖北科学技术出版社出版的，曾金平、张忠志主编的《高等数学(经管类)》教材同步，编写了《高等数学学习指导(经管类)》，可作为经管类相应专业的学习指导书或参考书.

全书以基本题为主，侧重基本概念、基础知识点和基本技能的掌握和训练，突出重点，答疑解惑，既可帮助学生解决教材中的一些难点内容，又能使学生举一反三，提高分析问题和解决问题的能力.

全书各章均由主要内容与基本要求、知识结构框图、知识点概述与疑难解析、典型例题与习题解答五部分组成.

第一，主要内容与基本要求：根据教育部数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》，明确指出各章的教学内容和基本要求，同时给出重点和难点，使学生了解教学目标，明确各章的重点与难点，学习起来有的放矢.

第二，知识结构框图：便于学生将各章的知识点串起来，对各章的内容有一个全局的认知，更好地理解各个知识点之间的相互关系.

第三，知识点概述与疑难解析：根据大纲所要求的知识点进行全面的综合性概述，包括基本概念、基本公式和基本定理等内容.通过疑难解析，指出学生在学习和解题过程中普遍存在的问题及常见错误，同时给出了相应的注意事项，使学生对基本概念、基本公式、基本定理等重要内容能够正确理解和使用.

第四，典型例题：针对各章的基本内容、基本公式和基本定理，给出一些典型的例题及其解答.每章注意吸收了一些在往届考研中常见的题型，同时注重一题多解，以便开拓学生的解题思路，使学生能将所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题.

第五，习题解答：针对与本指导书配套的《高等数学(经管类)》教材中的习题，给出习题解答，供学生参考.

本书由曾金平、张忠志担任主编.参加编写的人员有：关力、贾继红、余晋昌、程万友.全书由曾金平教授负责统稿，张忠志教授负责审阅.

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

2015年5月

目　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1

一、主要内容与基本要求 …… 1

（一）内容提要 …… 1

（二）基本要求 …… 1

二、知识结构框图 …… 2

三、知识点概述与疑难解析 …… 2

（一）知识点概述 …… 2

（二）疑难解析 …… 10

四、典型例题 …… 12

五、习题解答 …… 17

第二章　导数与微分 …… 43

一、主要内容与基本要求 …… 43

（一）内容提要 …… 43

（二）基本要求 …… 43

二、知识结构框图 …… 44

三、知识点概述与疑难解析 …… 44

（一）知识点概述 …… 44

（二）疑难解析 …… 50

四、典型例题 …… 51

五、习题解答 …… 58

第三章　中值定理与导数的应用 …… 83

一、主要内容与基本要求 …… 83

（一）内容提要 …… 83

（二）基本要求 …… 83

二、知识结构框图 …… 84

三、知识点概述与疑难解析 …… 84

（一）知识点概述 …… 84

(二) 疑难解析 …… 90
四、典型例题 …… 92
五、习题解答 …… 96

第四章 函数的积分 …… 130

一、主要内容与基本要求 …… 130
(一) 内容提要 …… 130
(二) 基本要求 …… 130
二、知识结构框图 …… 131
三、知识点概述与疑难解析 …… 132
(一) 知识点概述 …… 132
(二) 疑难解析 …… 138
四、典型例题 …… 141
五、习题解答 …… 150

第五章 定积分的应用 …… 170

一、主要内容与基本要求 …… 170
(一) 内容提要 …… 170
(二) 基本要求 …… 170
二、知识结构框图 …… 170
三、知识点概述与疑难解析 …… 171
(一) 知识点概述 …… 171
(二) 疑难解析 …… 174
四、典型例题 …… 175
五、习题解答 …… 178

第六章 多元函数微分学 …… 192

一、主要内容与基本要求 …… 192
(一) 内容提要 …… 192
(二) 基本要求 …… 192
二、知识结构框图 …… 193
三、知识点概述与疑难解析 …… 194
(一) 知识点概述 …… 194
(二) 疑难解析 …… 200
四、典型例题 …… 203

五、习题解答 …… 209

第七章 常微分方程 …… 284

一、主要内容与基本要求 …… 284
(一) 内容提要 …… 284
(二) 基本要求 …… 284
二、知识结构框图 …… 285
三、知识点概述与疑难解析 …… 285
(一) 知识点概述 …… 285
(二) 疑难解析 …… 289
四、典型例题 …… 291
五、习题解答 …… 300

第八章 级数 …… 330

一、主要内容与基本要求 …… 330
(一) 内容提要 …… 330
(二) 基本要求 …… 330
二、知识结构框图 …… 331
三、知识点概述与疑难解析 …… 332
(一) 知识点概述 …… 332
(二) 疑难解析 …… 338
四、典型例题 …… 341
五、习题解答 …… 350

第一章　函数、极限与连续

一、主要内容与基本要求

（一）内容提要

1. 函数的定义、定义域、值域及函数图形.

2. 函数的有界性、单调性和奇偶性和周期性.

3. 分段函数、反函数和复合函数.

4. 基本初等函数及其图形、初等函数的概念.

5. 常用的经济函数.

6. 函数极限的定义及其性质.

7. 函数极限计算方法：分别求左右极限的方法、四则运算法则、复合函数的极限、夹逼定理、等价无穷小代换的方法和求初等函数极限的代入法.

8. 无穷小的比较及等价无穷小的性质.

9. 函数的连续性的定义，间断点的类型以及闭区间上连续函数的性质.

（二）基本要求

1. 在中学已有的基础上，加深对函数概念的理解和对函数基本性态（有界性、单调性、奇偶性和周期性）的了解，了解反函数的概念，理解复合函数的概念，熟练掌握基本初等函数的定义域、值域、性质和图形，理解初等函数的概念.

2. 了解常用的经济函数，如需求函数、供给函数、成本函数、收入函数和利润函数等.

3. 熟练掌握函数极限的概念及其性质.

4. 熟练掌握极限的四则运算法则、了解夹逼准则及极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，会用它们求极限.

5. 了解无穷大、无穷小的概念，掌握无穷小的比较，会用等价无穷小的代换求极限.

6. 理解函数连续的概念；掌握函数间断点的概念，会判断间断点的类型.

7. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值与最小值定

理、介值定理和零点定理).

重点:极限的定义与计算,函数在一点连续的概念.

难点:函数在一点连续与间断点类型的判别.

二、知识结构框图

- 函数、极限与连续性
  - 函数
    - 函数的定义、定义域、值域及函数图形
    - 函数的几种特性(有界性、单调性、奇偶性和周期性)
    - 分段函数、反函数、复合函数、初等函数的概念
    - 基本初等函数的性质与图形
    - 常见的经济函数
  - 极限
    - 函数极限的定义
      - 极限、单侧极限和在无穷大处的极限
      - 无穷小
        - 无穷小的性质
        - 无穷小的比较
      - 无穷极限、无穷大与无穷小的关系
    - 极限的性质
      - 局部有界性
      - 极限的唯一性
    - 函数极限的初等计算方法
      - 四则运算法则与复合函数的极限
      - 分别求左右极限
      - 初等函数的极限(代入法)
      - 夹逼定理与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - 等价无穷小的代换
  - 连续
    - 函数连续性的定义
    - 间断点的类型
      - 第一类间断点(可去间断点、跳跃间断点)
      - 第二类间断点(无穷间断点、振荡间断点)
    - 初等函数的连续性
    - 有界闭区间上连续函数的性质
      - 最大值与最小值定理
      - 介值定理
      - 零点定理

三、知识点概述与疑难解析

(一) 知识点概述

本章复习和深化了初等数学中有关函数的内容,通过观察函数的图像,引进函数极限的概念以及相关性质的讨论,建立了一些函数的极限的计算方法,然后给出了连续函数的定义,并描述了不连续点的几种基本特征.

➡ 函数、反函数与复合函数

a. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于任意 $x \in D$，变量 x 按照一定法则 f 总有唯一确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x), x \in D$.

✧ 使得函数 $f(x)$ 有意义的所有 x 构成的集合称为函数 $f(x)$ 的定义域，通常记为 D_f.

✧ 当 x 取遍 D_f 中所有的元素时，$f(x)$ 的所有值构成的集合称为函数 $f(x)$ 的值域，记为 R_f.

✧ 分段函数：函数对于其定义域内的不同自变量的取值，具有不同的解析表达式，称这样的函数为分段函数.

b. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 在其定义域 D 上是一对一的，其值域为 R_f. 则对于任意 $y \in R_f$，在 D 上可以唯一确定一个 x 与 y 对应，且满足关系式 $f(x) = y$. 如果把 y 作为自变量，x 作为函数，则由上述关系所确定的函数 f^{-1} 称为 $f(x)$ 在 D 上的反函数. 通常习惯记为 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

✧ 在同一平面直角坐标系内，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

c. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u = g(x)$ 在 D_g 上有定义，且其值域 $R_g \subset D_f$. 则称函数 $f(g(x))$ 为函数 f 与 g 的复合函数.

➡ 函数的几种特性

a. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在一个正数 M，使得对于所有的 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数.

b. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 任取两点 $x_1 \in I, x_2 \in I$. 若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递增；若当 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递减.

c. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$ 关于原点对称. 若对于任何 $x \in I$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的偶函数；若对于任何 $x \in I$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的奇函数.

✧ 奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

d. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T>0$,使得对一切 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 f 为周期函数,T 为函数 f 的周期.

基本初等函数、初等函数

a. 基本初等函数

(1) 幂函数:$y=x^{\mu}$(μ 为任意实常数),其定义域依赖于 μ 的取值.

(2) 指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$),其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=(0,+\infty)$,且经过点$(0,1)$. 当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 单调递增;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 单调递减.

(3) 对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$),其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,且都过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 单调递增;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 单调递减.

对数函数的性质:

✧ $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$;

✧ $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;

✧ $\log_a x^b=b\log_a x$.

(4) 三角函数:

(a) 正弦函数 $y=\sin x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$. 它是一个奇函数,且是以 2π 为周期的周期函数.

(b) 余弦函数 $y=\cos x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$. 它是一个偶函数,且是以 2π 为周期的周期函数.

(c) 正切函数 $y=\tan x$,其定义域为$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 它是一个奇函数,且是以 π 为周期的周期函数.

(d) 余切函数 $y=\cot x$. 其定义域为$\{x \mid x\neq k\pi,k\in Z\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 它是一个奇函数,且是以 π 为周期的周期函数.

(5) 反三角函数:

(a) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(b) 反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$.

(c) 反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(d) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$.

b. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算而得到的并可用

一个式子表示的函数称为初等函数.

常见的经济函数

a. 需求函数

一种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 p 密切相关.通常,降低商品的价格会使需求量增加,而提高商品的价格会使需求量减少.如果不考虑其他因素的影响,需求量 Q 可以看成是价格 p 的函数,称为**需求函数**,记为

$$Q=Q(p).$$

b. 供给函数

一种商品的市场供给量 S 与该商品的价格 p 密切相关.通常,降低商品的价格会使供给量减少,而提高商品的价格会使供给量增加.如果不考虑其他因素的影响,供给量 S 可以看成是价格 p 的函数,称为**供给函数**,记为

$$S=S(p).$$

c. 成本函数

总成本由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成,固定成本与产量 q 无关,如设备维修费、企业管理费等;可变成本随产量 q 的增加而增加,如原料费、动力费等.即

$$C(q)=C_1+C_2(q).$$

单位产品成本平均值,记为 $\overline{C}$,则

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q},$$

其中 $\frac{C_2(q)}{q}$ 称为**平均可变成本**.

函数极限的定义

a. 函数的极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义.如果当 x 充分接近 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值任意地接近常数 A,则称当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

b. 函数的单侧极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右(或左)邻域内有定义.如果当 x 从 x_0 的右侧(或左侧)充分接近 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值任意地接近 A,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右(或左)极限为 A,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$),有时也记为 $f(x_0^+)=A$(或 $f(x_0^-)=A$).

c. 函数在无穷大的极限

设函数 $f(x)$ 对绝对值大于某个正数的 x 都有定义. 如果当 $|x|$ 无限趋向 $+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的值任意地接近 A,则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限为 A,也称函数 $f(x)$ 在无穷大的极限为 A,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

✧ 设函数 $f(x)$ 对大于(或小于)某个数的 x 都有定义. 如果当 x 无限地趋向 $+\infty$(或 $-\infty$)时,函数 $f(x)$ 的值任意地接近 A,则称当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限为 A,也称函数 $f(x)$ 在正(或负)无穷大的极限为 A,记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$).

d. 无穷小

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小**,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$).

e. 无穷极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果当 x 充分接近 x_0 时,函数值 $f(x)$(或 $-f(x)$)变得任意的大(可大于任何给定的正实数),则称当 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 趋向于正无穷大(或负无穷大),记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$(或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$). 如果在上面定义中,将 $f(x)$(或 $-f(x)$)叙述成 $|f(x)|$,则称当 x 趋近 x_0 时函数 $f(x)$ 趋向于无穷大,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

✧ 如果函数在某极限过程中取无穷极限,则称函数在此极限过程中为正(负)无穷大或无穷大.

极限的性质

a. 函数极限与其单侧极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

✧ 利用上面性质,可通过分析函数的两个单侧极限来判断函数极限的存在性.

✧ 同理,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

b. 局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在 x_0 的一个去心邻域,使得函数 $f(x)$ 在该邻域内有界.

c. 唯一性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则极限唯一.

d. 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一极限变化过程中,如果函数 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷

小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

函数极限的计算

a. 四则运算法则

设极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 存在，则

✧ 和与差法则 $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

✧ 积法则 $\lim(f(x)g(x))=\lim f(x)\lim g(x)$；

✧ 商法则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$，其中 $\lim g(x)\neq 0$；

✧ 常数倍法则 $\lim(cf(x))=c\lim f(x)$，其中 c 为常数；

✧ 幂法则 $\lim(f(x))^n=(\lim f(x))^n$，其中 n 为正整数.

b. 无穷小与有界函数的乘积的极限

任何无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

c. 复合函数的极限

设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=A$.

d. 多项式和有理分式的极限

✧ 设 $P(x)$ 为多项式，则 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

✧ 若$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理分式，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为多项式并满足 $Q(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

✧ 设 $a_m\neq 0$，$b_n\neq 0$，且 m 和 n 为非负整数，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\infty, & m>n,\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n,\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

e. 夹逼定理

设下面条件成立：

(a) 存在 x_0 的一个去心邻域，使得在该邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(b) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

✧ 由夹逼定理可得重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

无穷小的比较

a. 无穷小的比较

设 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\beta \neq 0$，则

✧ 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记为 $\alpha = o(\beta)$；

✧ 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c \neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小；

✧ 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$；

✧ 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta^k} = c \neq 0, (k > 0)$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

b. 常用的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$.

c. 无穷小的性质

性质 1：在自变量的变化过程，函数极限 $\lim f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\alpha = \alpha(x) = f(x) - A$ 是无穷小.

性质 2：设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

✧ 上面等价无穷小的代换经常用来计算极限，即在计算极限时，积和商中的无穷小可用其等价无穷小代替.

函数的连续性

a. 函数在点 x_0 处的连续性

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，并称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的连续点.

✧ 等价定义：设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，且称 x_0 为函数 $f(x)$ 的连续点.

✧ 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

✧ 如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

✧ 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件为该函数在点 x_0 处同时左右连续.