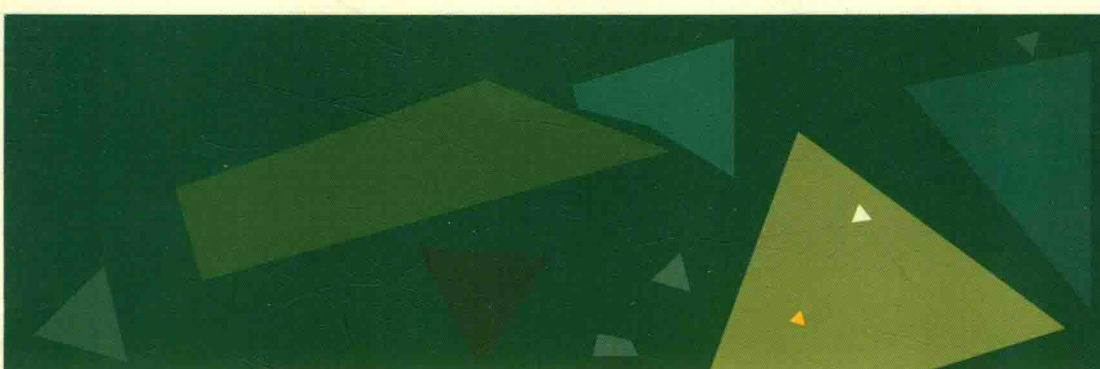


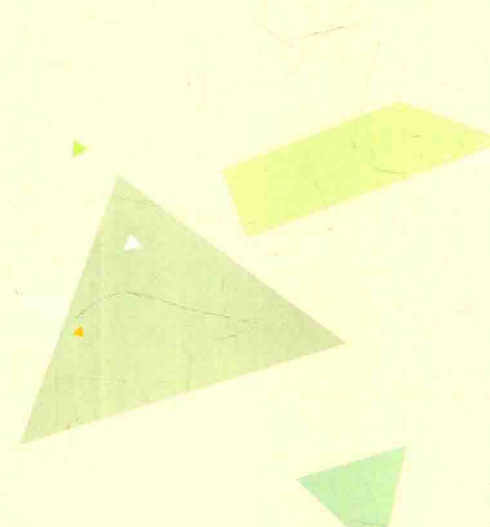


数学

——应用与思考



甘良仕◎著



一个民族没有较好的文化素养是不行的，因为没有文化的民族，不可能成为一个先进的民族，没有数学应用素养的民族，不可能成为一个聪明的民族，对每个人来说也是这样的。提高人的数学应用素质是必需的，应从青少年儿童开始进行普及教育。



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

数学

——应用与思考



甘良仕◎著



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

数学:应用与思考/甘良仕著. —武汉:华中科技大学出版社,2016.10
ISBN 978-7-5680-2017-6

I. ①数… II. ①甘… III. ①数学-青少年读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 155680 号

数学——应用与思考

Shuxue——Yingyong yu Sikao

甘良仕 著

策划编辑:王汉江

责任编辑:王汉江

封面设计:范翠璇

责任校对:张会军

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

电话:(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园

邮编:430223

录 排:武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷:武汉鑫昶文化有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:13 插页:1

字 数:255 千字

版 次:2016 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定 价:32.80 元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

名人名言

数学由于实际的需要,在古代便已经产生了,现在发展成为一个分支众多的庞大系统。数学与其他科学一样,反映了客观世界的规律,并成为理解自然和征服自然的有力武器。

——A. D. 亚历山大洛夫

任何一门学科只有充分利用了数学才能够达到完美的境界。

——马克思

宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学。

——华罗庚

序言

数学是随人类文明的开始就有了的一门学问。

在生活、生产中发生的“多”和“少”、“有”与“无”等现象中，产生了数的概念，如自然数。随着社会实践的不断深入和扩大，对涉及温度的“热”和“冷”、生产成本的“盈”与“亏”等现象，产生“正数”和“负数”的概念。从整数到分数，从有理数到无理数，都是这样的。

随着人类生产发展和科学技术的进步，数学的内容越来越丰富，数学理论也越来越深，但它的抽象性和精确性使它的应用越来越广泛，也就是说，在人类社会实践中，数学的地位与应用越来越显得重要，且不可缺少。所以，人们把数学称为“科学中的皇后和仆人”。

今天，在电子信息时代里，没有人对数学的重要地位表示怀疑，数学被看作人们步入科学殿堂的总钥匙。无论是自然科学、社会科学，还是经济学等，无一例外。

大家知道，每个人开始学语言时，父母就对小孩进行数数启蒙教育，学说一、二、三、四、五，再学六、七、八、九、十，往下学“一而十”“十而百”“百而千”“千而万”。学习人类长期积累下来的数学成果，使他们成为一个“识数”的孩子。

数学应用教育的学习，对每个人来说是十分重要的，它不仅是人对生活、生存、学习和工作的需求，而且对培养学生的思维能力、解决问题能力、自学阅读能力等，也是非常重要的。因此，有人称“数学是锻炼思维的体操”。

选读一本好的数学应用启蒙书，对青少年来说是十分重要的，我记得上小学四年级时，父亲从城里给我买回了一本厚书——《小学升学指导》，含语文、算术、自然、历史、地理等内容。当时，我是一个从未走出过大山的孩子，读了两年私塾，插班到小学四年级学习，拿到这本书时，我感到特别高兴。

《小学升学指导》是我当时唯一的一本课外读物，怀着好奇的心情，我认真地阅读算术部分的内容，从中我学到了许多课本上没有的知识，获益很多，萌发了对数学学习的兴趣，数学成绩渐渐地提高了许多。深深记得：一次算术考试以后，数学老师十分生气。上课时，老师把不及格的同学，一个一个地叫到教室后面跪在地上，最后只有我一个人没被叫，我忐忑不安地坐在位子上，老师问：“为什么要你们下跪呢？”大家跪下都低头不语，只是摇头。老师说：“你们都考得不及格，所以要你们跪下想想。”我暗暗地想：“以后要更努力地学习算术。”这本书对我影响十分深远，终生难忘。



当我读了两年小学快毕业时,家乡解放了,我在家里继续自学《小学升学指导》中的算术、自然等内容,第二年春天考入县级中学读初一下学期.我喜欢数学,成绩一直较好,毕业时被保送到地区师范学校学习,后来考入师范大学数学系学习.大学毕业后,成为一名大学数学教师,执教40余年.回忆人生路,感慨万千:其一,我的童年年代,父亲给我买了第一本好的启蒙书,引导我走出了大山;其二,我从学习、教书育人中,有时探索前进,有时误入迷宫,受启发和感慨的地方不少.这些经历使我萌发写一本数学科普书,献给广大青少年读者,特别是贫困地区的青少年读者,也借此缅怀我敬爱的父亲!

写什么,怎样写呢?我查阅了国内20世纪六七十年代老一辈数学家们写的中学生数学课外读物和当今的中小学生学习数学辅导书,也翻阅了国外的中小学数学教材和课外读物,感受颇深,启发较大:应较早地向青少年读者介绍较多的数学基础知识,将传授、启迪、培养数学应用素质和能力于一体,培养他们自学、阅读、动手、动脑、独立思考、灵活应用于实践等能力.所以,我写了《数学——应用与思考》一书.

该书以生活应用为主线,具有启蒙入门的特点.

第一,将现实生活中应用到的、可接受的较广泛的数学基础知识予以介绍.如数系、数列、集合、同余、数轴、十进制、二进制、八进制、方程、行列式、网络图、统筹方法和优选法等,使青少年读者能较早地接触较多的数学内容,明白数学不仅是算术、代数、几何……还有更多的内容,让他们在青少年时受到良好的数学内容的熏陶,为进一步学习数学奠定基础.

第二,学用结合,应用为先.巴斯德说:“实验室和发明是两个密切相关的名字,没有实验,自然科学就会枯萎.”为此,该书把培养学生动手、动脑、观察、应用等能力和良好的学习习惯贯穿于全书,力争使理论知识与应用相结合,动手与动脑相结合,观察与抽象概括相结合.如在流水问题中要求学生动手、动脑测试河流水速;介绍十进制时,引入二进制和八进制;在统筹方法中,要求用运筹思想方法于实践中,等等.

第三,在应用能力方面,加强培养学生不拘一格灵活运用能力.1853年马克思信告恩格斯:我在编写《经济学原理》时,由于计算错误大大地阻碍了我的工作,我对算术总是生疏的,不过间接地用代数方法,我很快计算正确了.这告诉我们,灵活应用能力是十分重要的.在该书中,使用了解方程去求解许多算术应用题,如行程问题、流水问题、化循环小数为分数等.又如,在数列中介绍用等比数列化循环小数为分数,以拓宽学生应用的视野.

第四,该书叙述力求通俗易懂,方便自学.通过自学,培养学生独立思考和独立判断的能力.如介绍抽象概念时,从具体实例导入,让学生观察,进行思考比较,进

行判断、推理和应用.

第五,该书注重介绍数学历史事迹,特别是介绍我国在数学中的辉煌成就和杰出数学家的功绩,以激励学生的学习和爱国热情.如讲无理数 π 时,介绍刘徽割圆术和祖冲之的圆周率的计算;讲二进制时,介绍八卦;等等.

第六,思考问题是该书的重要组成部分之一,有实验型、应用型、发散探讨型和创新型等,旨在引导读者在学习中善于应用,在应用中勤于思考.为此,全书配置了大量思考题,希望起到抛砖引玉的作用.

该书从提笔到落笔已数年了,在这漫长的写作过程中,得到了全家人的关心、支持和帮助,特别是从教40余年的夫人.教书育人、重能力培养等观念,都浸染在该书内容构筑和思考题的配置之中.两个上中、小学的孙子,给我许多难得的鲜活的资料和例题解法,使该书在可读性和可接受性等方面增色很多.

回首成书出版之时,万分感谢给予我帮助的所有人,衷心地向他们致谢!

由于作者精力、时间和水平有限,书中不足和错误之处在所难免,诚望读者批评指正,以便进一步修改完善!

甘良仕

2016年9月于湖北工业大学

前言

该书涵盖对数学知识的认知和感受,从少儿对数学的自学启蒙到数学专业的学习,从数学教学、科研到生活中数学的应用,促使我写了本书.

一个民族没有较好的文化素养是不行的,因为没有文化的民族,不可能成为一个先进的民族,没有数学应用素养的民族,不可能成为一个聪明的民族,对每个人来说也是这样的.提高人的数学应用素质是必需的,应从青少年儿童开始进行普及教育.

数学的应用范围是十分广阔的,数学的基本算律、性质、方法等,除了在数学方面应用外,还广泛地应用到人们的生活及社会实践活动中.这里仅介绍学习及生活中常见、易学的一些算律、数制、集合、数列、方程等方面的应用,以及网络方法的应用,运筹思想及统筹方法的应用,择优思想及 0.618 法的应用,等等.

“师傅引进门,修行在个人.”引导入门是重要的第一步,因此该书仅归纳“数系与数列”、“方程及应用”和“数学与生活”三篇作为启蒙学习内容.

第 1 篇 数系与数列

一、数制问题

在生活中我们学过的数制很多,有二进制、八进制、十进制、十六进制等等,学生学习十进制数后,就很少学习别的数制了,在计算机普及的今天,二进制数与十进制数一样常见.随着科技的发展,新的数制将会出现,为学生能获得更多的进位制记数方法,以适应新时代的需要,此书在引导学生概括十进制数规律的基础上,介绍二进制数的记数法,以及两种记数间的转换关系,然后进一步介绍八进制的记数法,以达到举一反三的目的.

在二进制数方法中,还介绍两种趣味性应用:猜年龄和用数记图.以此来开阔学生的思路.

二、数系问题

在生活中负数并不陌生,例如:气温记数有正数和负数,楼层记数有正数和负数,经营利润记数有正数和负数,等等.所以学生学完正有理数后引入负数是很自然的,也是可行的,这样可以让学生顺理成章地知道完整的有理数概念.

在有理数系(有理数域)中,介绍运算(加法、乘法)及算律,为进一步学习代数运算奠定启蒙基础.

在正有理数运算中,加法运算和减法运算是两种不同的运算,当数系扩大到有理数系时,数可以是正数,也可以是负数,所以加、减两种运算就变为一种运算了,统称为加法运算.如 $5-7$ 可以写成 $5+(-7)$,其和称为代数和.为了培养学生实用的习惯和能力,在有理数运算及算律的讲解中,多用实例引入,从而进一步提高学生的思维能力和实际应用能力.

在有理数系扩大到实数系(实数域)时,告诉学生无理数是一类无限不循环的小数,是一些实实在在的数,而且有无穷多个,特别指出两个重要的无理数 π 和 e .人们对 π 的认识是漫长的.我国早在公元 100 年前,就有“周三径一”,再到刘徽(公元 263 年)用“割圆术”求 π 值以及祖冲之(公元 429—500 年)算出 $\pi=3.1415926$ 等所取得的辉煌成就.1000 多年后英国数学家里尚克斯算出 π 值小数后的 707 位,今天用超级计算机可以计算出 π 值小数后的 5 万亿位.

三、集合与同余

集合是数学的重要概念之一,也是生活中常见的群体,如一个班的学生、一群大雁、一群羊、一堆食物等群体,都是集合.中国古语有“物以类聚”的说法,集合是一个普通的概念,在数系中,有自然数集、奇数集、偶数集,一个月的天数集合等等,都是集合,所以在数系中介绍集合概念是自然的.这样可以培养学生用集合的观点和方法去思考问题和解决问题.

此外,还介绍一种常见的数集——同余数集,及应用,即余数相同的数所组成的集合.如一月中凡是周日的天数集合,周二的天数集合,如周一天数为 1,8,15,22,29 日,周二的天数为 2,9,16,23,30 日,等等.

四、数列概念及应用

在数学学习中,遇到少数列,如自然数列、奇数列、偶数列、质数列等等.在生活中也常见一些数列的例子,如一年的 12 个月 $(1,2,3,\cdots,12)$,一个月的天数 $(1,2,3,\cdots,30,31)$,一周的 7 天 $(1,2,\cdots,7)$,家族繁衍的每代人数数列,细菌繁衍的细菌数数列;等等.古代人也早知“尺竿折半,永不绝”,即数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$. 所以让青少年早认识数列概念是社会生活和学习的需求,从而培养他们善于从整体中探究

事物发展变化的能力.

16 世纪德国乡村小学有一个 6 岁的儿童计算 $1+2+\cdots+100$ 时,就是利用数列的特性很快算出了结果.今天一些国家小学数学教材,已引入了数列概念,如已知一列数为 2,6,30,210,2310,3030, $\cdots$,要求学生写出数列后的两个数来,等等.

从现实和客观上来看,早日让青少年略知最简单数列概念,是必要的、有益的,也是水到渠成的.

在学生学习简单数列的基本知识,知晓等差数列和等比数列的特性后,掌握两种数列求有限和的计算方法,培养学生在运动变化中全面观察,细心分析思考,发现数列规律的能力,是很有必要的.

此外,还介绍等比数列无限和公式的应用——化循环小数为分数.

第 2 篇 方程及应用

公元 100 年左右中国人已把方程应用在实践中生活中,它是一种较好的求解数学应用问题的方法.方程内容丰富,应用广泛,有代数方程、微分方程、数学物理方程,等等.

今天有的国家已把方程的简单知识引入小学数学教材中.因为小学数学教材中的应用题的内容很重要,应用广泛,但题型多,公式多,加之学生实践经历少,感到难学,在学习时花费时间较多,最后遗忘快,效果不好.正如马克思在回忆时说:“应用时全忘了.”我曾感慨地说:“小学时,应用题我囫圇吞枣地学过,真正掌握的内容不多,上初中时,应用方程知识后认为应用题并不难学了.”所以用解方程的方法求解应用题,是破解学习小学应用题困难的一种较好的途径.一方面有助于对方程知识的了解,另一方面为进一步学习方程的新知识奠定基础.

本篇用直观方法引入等式概念,过渡到一元一次方程概念,用方程和方程组来解应用题,如行程问题、行船问题、盈亏问题、年龄问题等.

此外,用解方程的方法可以化循环小数为分数.

第 3 篇 数学与生活

应用数学的思想方法是人类有史以来长期的聪明智慧的结晶,每个人应知晓它,学习它,再把它用于实践生活中,使自己成为一个聪明人.因此,本篇向青少年介绍一些应用数学的思想方法,使其早日接受启蒙熏陶,培养用应用数学的思想方法去思考和处理发生在自己周围的一些事件,使自己成为实践中的智者.

一、网络问题

生活在网络、信息时代里,无论事物千变万化,基本规律总是孕育其中的,我们要善于发现它,利用它.

人们从一地出发,游走七座桥回到原处,到欧拉回路和通路的发现;从邮递员走街串巷送邮件,到中国邮路问题的提出和证明;乃至在公园景点图上寻找一条从出发处回到原地不走重复路或少走重复路的最短路;或在某工厂把产品送到销售地,寻找一条最短的运输路线,即运费便宜,或时间最短,等等,都是一个在网络图上寻找一条最优路线问题,这些都是网络思想方法在实践中的一种应用.

二、运筹帷幄

在实践活动乃至生活中,善于运筹帷幄,达成“多”“快”“好”“省”的效果,较好地完成任务,应用统筹方法是十分常见的事,我们常说“统筹安排”“纲举目张”“抓主要矛盾”“见缝插针”等都是统筹思想方法在实践中的一些通俗描述.

古代北宋真宗时期皇宫失火受毁,有人运用统筹思想方法,在较快的时间内把皇宫修复好了,省时省钱.现在一项大工程都是由许许多多的事件组成的,利用统筹方法进行科学安排,就能保证工程任务在最短时间内完成好.餐馆厨师在顾客点菜后,若用统筹思想方法进行安排,可使客人在最短的时间内用餐.由此可见,统筹思想方法在我们工作和生活中到处都可应用.

三、择优问题

“选择优好”是人的本性,如何从众多之中选优,达到最佳结果,省时、省力、省钱,这是人们所追求的.

从古至今,人们不断探求,获得了一些优选的方法,如黄金分割法是其中一种,早于中世纪,欧洲人用黄金分割法做窗户,认为做出来的窗户最好、最美,古希腊学者柏拉图将黄金分割法用于作曲中,成就传世之作.今天有人将黄金分割比用于营养配比中,认为是健康食品,等等.

20世纪40年代人们将黄金分割法用于军事、工业方面,称为0.618法,70年代我国将它用于工业、农业、科学实验等方面,用较少实验次数取得了最优结果.

此外,人们还将0.618法用于近似计算中,求出最佳近似值.

甘良仕

2016年9月

目录

第 1 篇 数系与数列

第 1 章 实数	(3)
1.1 自然数	(3)
1.1.1 十进制	(3)
1.1.2 自然数列	(4)
1.1.3 奇数与偶数	(5)
1.1.4 质数与合数	(5)
1.1.5 约数与倍数	(6)
1.2 整数	(7)
1.2.1 负数概念的引入	(7)
1.2.2 整数大小的比较	(8)
1.2.3 整数运算	(9)
1.3 有理数	(25)
1.3.1 分数	(25)
1.3.2 有理数	(29)
1.4 实数	(32)
1.4.1 无理数	(32)
1.4.2 实数与数轴	(34)
第 2 章 集合和同余	(36)
2.1 集合及应用	(36)
2.1.1 集合概念	(36)
2.1.2 集合的运算	(37)
2.1.3 并集中元素个数的计算	(41)

2.1.4 集合应用举例	(42)
2.2 同余及应用	(45)
2.2.1 余数与同余	(46)
2.2.2 同余性质	(47)
2.2.3 应用举例	(49)
第3章 二进制数及应用	(52)
3.1 二进制	(52)
3.1.1 什么数叫做二进制	(52)
3.1.2 二进制数的奇偶性	(54)
3.1.3 二进制数与十进制数互化	(55)
3.1.4 二进制数的运算	(57)
3.2 二进制应用举例	(58)
3.2.1 猜年龄	(58)
3.2.2 圆形与数互换	(60)
3.3 八进制数简介	(61)
第4章 数列	(66)
4.1 等差数列及应用	(67)
4.1.1 等差数列通项公式	(67)
4.1.2 前 n 项和	(69)
4.1.3 等差数列应用举例	(70)
4.2 等比数列及应用	(73)
4.2.1 等比数列通项公式	(73)
4.2.2 等比数列前 n 项和公式及无穷项和	(75)
4.2.3 等比数列应用举例	(76)

第2篇 方程及应用

第5章 简易方程	(81)
5.1 等式及性质	(81)
5.1.1 等式	(81)
5.1.2 等式性质	(82)
5.2 简易方程	(83)
5.2.1 什么是方程	(83)
5.2.2 列方程	(83)
5.3 解一元一次方程	(86)

5.4 解二元一次方程组	(88)
5.4.1 消元法	(88)
5.4.2 行列式解法	(90)
第6章 方程应用	(94)
6.1 用解方程的方法化循环小数为分数	(94)
6.2 行程问题	(96)
6.2.1 距离公式	(97)
6.2.2 线性行程问题	(100)
6.2.3 环道相遇与追及	(107)
6.3 行船问题	(109)
6.3.1 水速和船速	(109)
6.3.2 公式应用	(111)
6.3.3 相遇问题	(115)
6.4 其他问题	(117)
6.4.1 年龄问题	(117)
6.4.2 盈亏问题	(119)
6.4.3 和、差、倍及其他	(121)

第3篇 数学与生活

第7章 图与网络	(125)
7.1 图论起源	(125)
7.1.1 七桥问题	(125)
7.1.2 周游世界问题	(127)
7.2 图的基本概念	(127)
7.2.1 什么叫图	(128)
7.2.2 携手定理	(133)
7.3 欧拉图和哈密顿图	(135)
7.3.1 通路、回路和连通	(135)
7.3.2 欧拉图的特点	(138)
7.3.3 欧拉图的应用与中国邮路问题	(140)
7.3.4 哈密顿图	(143)
7.4 最短路问题	(146)
7.4.1 短程	(146)
7.4.2 距离	(146)

7.4.3 求短程和距离	(149)
7.5 最大流问题	(153)
7.5.1 最大流问题由来	(153)
7.5.2 容量网络流图和可行流	(154)
7.5.3 求最大流方法介绍	(156)
第8章 运筹帷幄	(166)
8.1 运筹的产生及发展	(166)
8.2 运筹学应用实例	(167)
8.3 统筹方法简介	(170)
8.3.1 统筹图	(170)
8.3.2 统筹图的特征	(173)
8.3.3 统筹图的顶点正规编号法	(175)
8.4 统筹方法应用	(176)
8.4.1 什么通路叫关键路线	(176)
8.4.2 用标号法求关键路线	(177)
第9章 万众择优	(181)
9.1 优选问题处处可见	(181)
9.2 优选方法来自需求和实践	(182)
9.3 黄金分割法	(182)
9.3.1 什么叫黄金分割法	(183)
9.3.2 求黄金分割点	(184)
9.3.3 性质	(184)
9.3.4 黄金分割点位值	(185)
9.4 0.618 法	(188)
9.4.1 0.618 法的应用原理及步骤	(189)
9.4.2 用 0.618 法求最优值	(189)
9.4.3 求近似值	(191)

数系与数列

要辩证而又唯物地了解自然,就必须熟悉数学。

——恩格斯

为了使成熟的科学更成熟些,为了使还没有成熟的科学变为成熟,我们必须重视数学,并且促使它更快地发展起来。

——华罗庚

数的概念的形成是非常漫长的,是时代的产物,是世界上许多民族实践的结果.相互传播,相互学习,不断地改进,形成了今天的数的知识、记数符号、记数方法和运算.

人们在实践中,根据需要产生数的文字和记数符号,同时相伴产生记数方法、计数工具和运算.我国于殷代时期用甲骨文字一、二、三、三、 $\times$ 、八(∩)、十、)(、 $\frac{1}{2}$ 表示数一、二、三、四、五、六、七、八、九、十,“二”表示“一”上加“一”,“三”表示“一”上加“一”,“三”表示“三”上加“一”.在数的记法上采用十进制来记数,它和现在的十进制一样,不同之处是记数符号.记数符号有:

纵式						⊥	⊥	⊥	⊥	□
横式	—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥	□
现代	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

记数时,个位用纵式,十位用横式,百位用纵式,千位用横式,万位用纵式,以此类推.如264记为“||⊥||||”,6708记为“⊥⊥□⊥⊥”等.后来印度数字、阿拉伯数字传入中国后,人们渐渐用阿拉伯数字0,1,2,3,4,5,6,7,8,9来记数.

在计算方面,中国古代人的成就十分卓越,公元前500年就用九九表进行乘法运算,九九表与今天的九九表相同,计算工具采用算筹,除用它进行四则运算外,还用它进行开平方、开立方、求比例、求级数等较复杂的运算,故计算工具改用珠算,用算盘进行运算.算盘是当时世界上独有的一种较好的计算工具.

数列也同数一样,很早就被人认识,它广泛地应用于生活实践中.

公元前三世纪,希腊人就认识到数列是可以无限地延续下去的一列数,可运用任何给定的一些数去讨论一般的数;从单个给定的数到任何可能的数.如希腊数学家阿基米德(公元前287—212年)发表了《论数砂》的论文,指出数砂粒的方法,这在当时是十分不易的事情.

我国古代人对数列也早有见识,约公元前二世纪,庄子说过:“惠施多方,其书五车”,惠施说:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”即每日取下的长为数列:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

公元前100年左右,在《九章算术》中记载:“今有女子,善织日自倍,五日织五尺,问日织几何?”即等比数列 $a_1, 2a_1, 4a_1, 8a_1, 16a_1$,求每天各织多少?在《周髀算经》一书中,还讲到等差数列的问题.

此外,三国时期数学家刘徽利用正多边形数列:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$$

计算圆周率.

因此,本篇向读者介绍数系与数列两个内容.