数学奥林匹克小丛书

初中卷 3

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

一元二次方程

葛军 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 3

一元二次方程

olinpike Xiao Congshu

葛军 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．一元二次方程／葛军编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4167-7

I.数... II.葛... III.数学课-初中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019477号

数学奥林匹克小丛书·初中卷

一元二次方程

编　　著　葛　军
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　严小敏
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　商务印书馆上海印刷股份有限公司
开　　本　787x960 16开
印　　张　5.5
字　　数　94千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001—16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4167-7/G·2392
定　　价　8.00元

出 版 人　朱杰人

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

目 录

1 看a与1

> 我们更生了.
> 我们更生了.
> 一切的一,更生了.
> 一的一切,更生了.
> 我们便是他,他们便是我.
> 我中也有你,你中也有我.
> 我便是你.
> 你便是我.
> ……
>
> ——郭沫若《凤凰涅槃》——凤凰更生歌

大多数人总会认为如下的问题:

字母a表示什么?

数字1是什么?

都是极为平凡的问题.

可是,你再仔细瞧端详,用脑想一想,感觉不那么简单,而且想来很有趣,难道不是吗?!

字母a表示什么呢?转换你看问题的角度,用a"丈量"你学习的足迹,发现a真的很丰富很生动.

你会说:a是26个英文字母表中排第一的字母;a可以代表正整数,可以代表分数,代表无理数、实数……a还可以代表一个算术算式,一个多项式如$x-2$,x^2+3x-2,代表分式如$\frac{1}{x-3}$,代表无理式如$\sqrt{x^2-2}$……a还可以代表一个几何图形及其周长与面积……

你想 a 是什么，它就是什么.

由此可以明白，a 若表示单数“一”，但确是包含着“all”. 因此，你看 a，不能仅仅看成是一个“一”，而是要看到“一切”.

其实，我们每个人都容易拥有一切，只需用你的眼光. 但是，我们常常把自己框限于一个小小天地里，则就会感觉到学得不够灵活，不够大气，不够轻松.

让我们从现在开始，转换观念，由“一”想及“一切”，则你必胜于“千里之外”，不战而胜，且“胜于无形”之中.

说到数 1，同以上的认识一样，它也预示着“看我 1，不起眼，我却可以代表一切”.

读者在阅读这本小册子时，首先要做的，就是要在你的眼中“看 a 不是 a”，“看 1 不是 1”. 看“a”应认为是你曾经的所有拥有. 能做到吗？亲爱的读者们.

习 题 1

试举几个具体例子，运用上述理念来进一步认识这些例子，并谈谈你自己的感受.

我思，故我在.

——笛卡儿

2 学会配方

一切的一，光明呀！
一的一切，光明呀！
光明便是你，光明便是我！
光明便是“他”，光明便是火！

——郭沫若《凤凰涅槃》——凤凰更生歌

在小学里，我们就学过“一个数加 2 等于 6，求这个数”这样的问题，如果用方程表示就是

$$x+2=6. \qquad ①$$

这里的 x 表示所求的数. 解这个方程，对大家来说，是一件轻松而又容易的事，在①中移项就可以得到

$$x=4.$$

但是，如果是“一个数的平方加 2，等于 6，求这个数”，那么又如何求呢？同样地，我们可以设所求的数为 x，则有

$$x^2+2=6, \qquad ②$$

即
$$x^2=4.$$

我们知道，2 的平方等于 4，-2 的平方也等于 4，所以 $x=2$ 或 $x=-2$. 因此，对于 $x^2=4$，用根式表示就是 $x=\pm\sqrt{4}$，即 $x=\pm 2$.

一般地，对于 $x^2=a$，就有 $x=\pm\sqrt{a}$.

让我们转换角度来认识①与②的关系，我们发现②式可以看作是①式中 x“生长”为 x^2 得到的，即

$$x \to x^2.$$

现在，对“x^2”中的 x 来玩“生长”，那么，我们能得到什么样的结果呢？看着 $x^2=4$，想着 x 生长为 $x-3$，这个等式又变成怎样的形式呢？

我们用流程图表示就是

$$x^2=4$$

$$\downarrow \text{用}(x-3)\text{替换}\ x$$

$$(x-3)^2=4$$

$$\downarrow \text{完全平方式展开}$$

即
$$x^2-6x+9=4$$

$$\downarrow \text{移项、合并同类项}$$

得
$$x^2-6x+5=0. \tag{③}$$

这个③式即方程 $x^2-6x+5=0$ 将如何求解呢？

回头看刚才的“生长过程”，认识“来而不往非理也”。

我们发现：可以先利用完全平方公式配成平方，然后用根式的定义（$x^2=a$，得 $x=\pm\sqrt{a}$）求得方程的解，也就是：

由 $x^2-6x+5=0$，得

$$(x^2-2\times 3x+3^2)+5-3^2=0,$$

即
$$(x-3)^2=4,$$

得
$$x-3=2 \text{ 或 } x-3=-2,$$

即
$$x=5 \text{ 或 } x=1.$$

上述求解方程的关键就是“配方”。

运用前面所说的观念，学会看数 6、5 不仅是数，它们可以变成字母 b、c，即看“$x^2-6x+5=0$”是“$x^2+bx+c=0$”。那么，解这个方程 $x^2+bx+c=0$ 的关键就是配方。

如何熟练地对二次三项式进行配方呢？

关键在于熟练地运用 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，即看到 a^2+b^2 想到找 $2ab$，或者看到 a^2+2ab 想到找 b^2。

试举几例，努力形成良好的配方感觉。

例 1 分解因式 $(a^2-1)(b^2-1)+4ab$.

分析 先展开试试，即 $(a^2-1)(b^2-1)=a^2b^2-a^2-b^2+1$，得原式是

$$a^2b^2-(a^2+b^2)+1+4ab.$$

试着：看 a^2b^2+1 找 $2ab$，看 a^2+b^2 也找 $2ab$，是否可以分解了.

解

$$\begin{aligned}&(a^2-1)(b^2-1)+4ab\\=&a^2b^2-(a^2+b^2)+1+4ab\\=&a^2b^2+2ab+1-[a^2+b^2-2ab]\\=&(ab+1)^2-(a-b)^2\\=&(ab+1+a-b)(ab+1-a+b).\end{aligned}$$

思考 尝试看 a^2b^2+4ab 想到找 4，你能顺利地分解因式吗？你得到怎样的体会？

例 2 已知 a、b 都是大于 1 的正整数，证明：a^4+4b^4 是合数.

解 由 a^4+4b^4 想到 $4a^2b^2$，则有

$$\begin{aligned}a^4+4b^4&=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2\\&=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2\\&=(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)\\&=[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2].\end{aligned}$$

由于 $a>1$，$b>1$，所以 $(a-b)^2+b^2>1$，$(a+b)^2+b^2>1$.

因而 a^4+4b^4 是合数.

此题虽然做完了，但不要轻易放在一边，留足时间，再回首，品其韵味.

其一，问自己，什么样的整数 a 与 b，使得 a^4+4b^4 是质数(除 1 及自身外无其他约数)？

其二，问自己，a^4+4b^4 可以写成四个数的平方和吗？如果能，这四个数可以不同吗？

例 3 在实数范围内解方程

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

分析 乍一看，怎生了得，从未见过. 但冷静一想，三个未知数一个方程，必有窍门；再仔细一瞧，x 与 $\sqrt{x}$，$y-1$ 与 $\sqrt{y-1}$，$z-2$ 与 $\sqrt{z-2}$ 之间的关系，想到配方. 试试看！

解 原式整理为 $x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0$，

看 $x-2\sqrt{x}$，$(y-1)-2\sqrt{y-1}$，$(z-2)-2\sqrt{z-2}$ 得

$$(x-2\sqrt{x}+1)+[(y-1)-2\sqrt{y-1}+1]$$
$$+[(z-2)-2\sqrt{z-2}+1]=0,$$

即 $$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0.$$

由平方数是非负的，得

$$\sqrt{x}-1=0, \sqrt{y-1}-1=0, \sqrt{z-2}-1=0,$$

即 $$x=1,\ y=2,\ z=3.$$

思考 你能运用第1讲中的"观念"，得到类似于例3的问题，并努力尝试解决它们吗？

例4 说明 n^2+n+1（n 是正整数）不是完全平方数.

分析 按题意，考虑 n^2+n+1 介于两个连续数的平方之间，则努力寻找这样的两个平方数.

解 由于 $n^2<n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$，
所以 n^2+n+1 不是完全平方数.

思考 试判别 n^2+n+1（n 是整数）是否一定是完全平方数.

例5 已知一个四边形的四条边长分别为 a、b、c、d，它们满足等式

$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd,$$

试判断这个四边形的形状.

解 努力得到一些完全平方式，看到 a^4+b^4 想到 $-2a^2b^2$，看到 c^4+d^4 想到 $-2c^2d^2$.

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd\\ =&(a^4+b^4-2a^2b^2)+(c^4+d^4-2c^2d^2)\\ &+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd,\end{aligned}$$

恰好有 $a^2b^2+2abcd+c^2d^2$ 是完全平方式，所以由

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0,$$

得

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)+(c^4-2c^2d^2+d^4)+2(a^2b^2-2abcd+c^2d^2)=0,$$

即 $$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0,$$

得 $$a^2-b^2=0,\ c^2-d^2=0,\ ab-cd=0.$$

由于 a、b、c、d 都是正数,所以 $a=b=c=d$.

因此,这个四边形是菱形.

习　题　2

1 已知 $x^2+y^2+4x-6y+13=0$,其中 x、y 均是实数,求 $x+2y$ 的值.

2 已知 a、b、c 为三角形的三边长,且满足

$$a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c,$$

试判断这个三角形的形状.

3 试确定方程 $(a^2+1)x^2-2ax+(a^2+4)=0$ 的实根的个数.

4 实数 a、b 满足关系 $a^2b^2+a^2+b^2+1=4ab$,试求 $a+b$ 的值.

5 已知 a、b、c、x、y、z 都是非零实数,且

$$a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=ax+by+cz,$$

求证:$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

6 求证:对于任意实数 x、y,不等式

$$x^2-xy+y^2-2x+y+\frac{5}{2}\geqslant 0$$

都成立.

7 已知 a、b、c 是三角形 ABC 的三边长,且满足

$$\frac{2a^2}{1+a^2}=b,\ \frac{2b^2}{1+b^2}=c,\ \frac{2c^2}{1+c^2}=a,$$

试求三角形 ABC 的面积.

心智体操

只需要10分钟

一个故事:

有一个小男孩每天坚持练钢琴 4 个小时. 他的老师知道后对他说:“你不

能这样练，马上停止. 因为你长大以后根本没有这么多的时间来练琴，你应该养成一有空闲就练的习惯，即使几分钟也行.”小男孩听从了老师的劝告，把练钢琴的时间分解到各个时间段. 其他时间他用来写日记、培植标本、到草地上踢足球，而这一切，并没影响他的琴艺.

这个美国小男孩后来成为著名的诗人、小说家和极其出色的钢琴家，他之所以在各个领域取得辉煌的成就，原因在于他能分解自己的爱好到每天的时间中，他即使只有 5 分钟的空闲也会利用起来，或写几句诗，或弹一首曲子.

几分钟的时间并不长，但如果能利用它并能成为一种习惯，这些短短的时间就有可能成就一个人，因为再大的事业和成就所需要的数年和数十年的时间都是由短短的几分钟累加起来的. 当然这些应该是毫不拖延并加以充分利用的几分钟.

3 认识一元二次方程

横看成岭侧成峰，
远近高低各不同.
不识庐山真面目，
只缘身在此山中.

——苏轼《题西林壁》

在第 2 讲中，我们已经认识了一元二次方程 $x^2+bx+c=0$，自然地，我们也认识了(看二次项系数 1，非“1”是 a)一元二次方程的一般形式

$$ax^2+bx+c=0,$$

不仅如此，想必你也知道如何求这个方程的解了.

那就是配方.

因为

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right]+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 转化为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0,$$

即
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \quad ①$$

则当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，由平方根的意义就可以得到方程 $ax^2+bx+c=0$