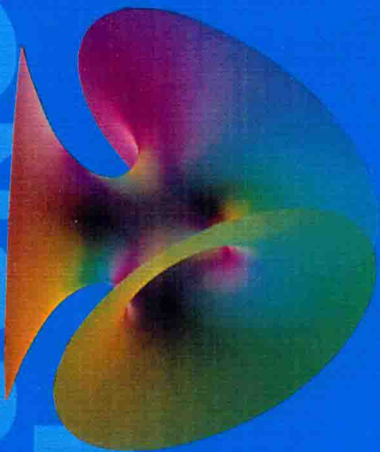
数学奥林匹克小丛书 高中卷 14

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



组合几何

余红兵 著

华东师范大学出版社

Shuxue

Xiao

Congshu

Shuxue

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 14

组合几何

Olinpike Xiao Congshu

余红兵 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．组合几何／余红兵著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4153-7

I.数...　II.余...　III.数学课−高中−教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019486号

数学奥林匹克小丛书·高中卷
组合几何

著　　者　余红兵
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　汪小玉
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部　电话　021-62865537
门市(邮购)　电话　021-62869887
门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
华东　中南地区　021-62458734
华北　东北地区　021-62571961
西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
邮编　200062

印 刷 者　上海华东师范大学印刷厂
开　　本　787x960　16开
印　　张　4.5
字　　数　73千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4153-7/G·2380
定　　价　7.00元

出 版 人　朱杰人

本书导读

数学竞赛中有许多组合几何问题.

组合几何，是一个新兴的数学分支，研究几何元素的组合问题，例如距离、覆盖、染色、整点等等，内容丰富多彩. 这本小册子，通过数学竞赛中的有关问题，介绍组合几何中的一些基本方法. 这些方法，或称“招式”，虽然经常有用，但在许多场合，需要自己针对具体问题，创造“新招”，“以无招胜有招”. 这正是组合几何的一个显著特点：它需要知识，但更需要智慧.

华东师范大学出版社，给你一个智慧的人生.

吴建平　第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编

熊　斌　第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员
华东师范大学副教授

余红兵　中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
苏州大学教授、博士生导师

朱华伟　中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
广州大学软件所常务副所长、研究员

余红兵　中国数学奥林匹克委员会委员，数学奥林匹克国家集训队教练．苏州大学数学科学学院教授、博士生导师，理学博士．主要研究方向是数论，并长期有兴趣于数学普及工作，著作主要有《不定方程》、《数学竞赛中的数论问题》、《奥数教程（高三年级）》、《构造法解题》等．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

目　录

1 凸包

在处理平面上有限点集的某些问题时，经常要用到凸包的概念．本节介绍其定义并举例说明它在解题中的基本用法．

在谈及有限点集的凸包之前，我们先回忆凸多边形的概念．凸多边形有许多等价的定义，下面是两个经常遇到的，解题中也最有用处的定义．

定义一　如果以多边形的顶点为端点的任何线段，完全包含于这个多边形中，则称此多边形为凸多边形．

定义二　如果多边形位于它任意一条边（延长线）的同侧，这样的多边形叫做凸多边形（即如果将多边形的任一边延长，那么延长线不与其他边相交）．

给定平面上 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geqslant 3)$，自然它们未必是一个凸 n 边形的顶点，但是一定存在一个凸 m 边形（$3\leqslant m\leqslant n$）或一条线段（蜕化的凸多边形），完全包含点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，并且凸 m 边形的 m 个顶点（或线段的两个端点）是点集 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 的一个子集．

这样的凸 m 边形（或一条线段）便称为点集 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 的凸包，它由给定的点集惟一确定．

特别地，如果平面上 $n(n\geqslant 3)$ 个点不共线，则其凸包便是一个凸 m 边形（$3\leqslant m\leqslant n$），它的顶点集是所给 n 个点之集的子集．

凸包存在性的严格证明并不容易（本书不作讨论），它有一个直观描述（不是证明！）：设想在给定的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上插上小针（每个小针与平面垂直），然后用一条闭合的细线套住这些点，将线拉紧，细线钩紧在某些针头上形成一个凸多边形（或一条线段），并且盖住了所有的针头．

因此，大致地说，（平面上）有限点集有一个凸包，就是有一个（最小）凸多边形（包括蜕化情形）能包住所给的点．这一事实，是许多问题论证的基础和出发点，我们举些这样的例子．

例 1　给定平面上 n 个点（$n\geqslant 3$），无三点共线．证明：在这 n 个点中可以

挑出三个点,使得从其中一个点引出的通过其他两个点的射线之间的夹角不超过$\frac{\pi}{n}$.

证明 记给定的n个点为A_1, A_2, …, A_n.

(1) 先考虑特殊情形: A_1, A_2, …, A_n 构成凸n边形的顶点. 此时问题较为容易.

由于n个内角之和为$(n-2)\pi$,故必有一个内角$\leqslant\frac{n-2}{n}\pi$,不妨设$\angle A_1\leqslant\frac{n-2}{n}\pi$. 过顶点$A_1$引出所有的对角线(共$n-3$条,由于多边形的凸性,对角线都位于多边形的内部),这$n-3$条对角线将$\angle A_1$分为$n-2$个部分,因此有一个角$\leqslant\frac{1}{n-2}\times\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi=\frac{\pi}{n}$.

(2) 若A_1, A_2, …, A_n 不构成凸n边形的顶点,则考虑其凸包,便可将问题化归为上述特殊情形.

由于凸包是一个凸k边形$(3\leqslant k<n)$, A_1, A_2, …, A_n 中有$n-k$个点在此k边形的内部,凸k边形必有一个内角$\leqslant\frac{k-2}{k}\pi$. 不妨设$\angle A_1\leqslant\frac{k-2}{k}\pi=\left(1-\frac{2}{k}\right)\pi$,这显然$\leqslant\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi=\frac{n-2}{n}\pi$. 过$A_1$引出$k$边形的$k-3$条对角线,并连接$A_1$与$k$边形内部的$n-k$个已知点,与(1)相同,共有

$$(k-3)+(n-k)=n-3$$

条线段. 由于凸性,它们均在凸k边形的内部,从而将$\angle A_1$分为$n-2$个部分,所以有一个角$\leqslant\frac{1}{n-2}\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi=\frac{\pi}{n}$.

注 (1) 解答中的(1)是多余的. 我们的目的在于提供一个比较,以说明(就本题而言)一般情形(借助凸包)与特殊情形的论证并无差异.

(2) 我们应用熟知的结果: 凸n边形内角之和为$(n-2)\pi$,但这并未刻画多边形的凸性. 事实上,对于非凸(即凹的)多边形,同样的结论也成立(证明并不容易). 请读者留意一下,论证中哪些地方用到了多边形的凸性.

例2 在平面上给出有限个点,证明: 在它们之中可以选出这样的点,使得与它最近的已知点

(1) 不超过六个;

(2) 不超过三个.

证明 (1) 考虑每两个已知点决定的距离，这只有有限个值，因此其中必有最小者，记为 d. 将已知点中取得最小距离 d 的点集记为 S，即对 S 中任一点，必有其中另一点使两者之间距离为 d.

易于证明，对 S 中任一点，与它最近的已知点不超过六个. 若设 $A\in S$，且 A_1、A_2 与 A 的距离最近（即都是 d），由 d 的定义知 $A_1A_2\geqslant A_1A$，故 $\angle A_1AA_2\geqslant 60°$. 由于圆周角为 $360°$，从而与点 A 最近的点不超过六个.

(2) 为了证明这个更强的结论，我们需要修改(1)中的论证. 考虑点集 S 的凸包，若凸包为一条线段，则其两个端点均符合要求.

若凸包为一个凸多边形. 我们证明这个多边形的任一顶点都符合要求. 设点 A 是这样的一个顶点，如果点 A_1、A_2 与点 A 距离最近，则$\angle A_1AA_2\geqslant 60°$.

另一方面，按凸包的定义知，点 A_1、A_2 必位于其内部或边界上（不一定是顶点），并且$\angle A<180°$，因此与点 A 最近的点不能超过三个. 上面的证明也表明，符合要求的点至少有两个.

注 (1) 比较(1)、(2)的证明，可以看出凸包在本题论证中的作用. 此外，能够作出一个平面点集，使得对于其中任一点，都恰有三个离它最近的已知点(第 5 节练习题 1)，这表明(2)中的“三”一般不能改为“二”.

(2) “最小距离”在论证中也扮演了一个基本角色. 这种考虑某种极端元素的方法，常称为极端原理，我们在第 2 节将专门讨论.

例 3 平面上任给 n 个不同的点($n\geqslant 2$)，确定并证明：以这些点为端点的线段，至少有多少个不同的中点.

证明 首先注意，若 n 个点以相等的间隔分布在一条直线上时，所说的不同中点恰有 $2n-3$ 个. 下面用归纳法证明，不同的中点个数至少有 $2n-3$ 个. 综合两个方面，即知本题的答案为 $2n-3$.

$n=2, 3$ 时，所说的结论显然成立. 设 $n\geqslant 4$，并设结论对 $n-1$ 个点成立. 现考虑 n 个给定点的凸包.

若凸包为一条线段，设为 A_1A_n，且给定的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 依次排列在线段 A_1A_n 上，除去点 A_1 后，由归纳假设，以点 $A_2, \cdots, A_n$ 这 $n-1$ 个点为端点的线段至少有 $2(n-1)-3=2n-5$ 个中点，加入点 A_1 后，显然线段 A_1A_2 与 A_1A_3 的中点与上述中点均不相同，故至少有

$$2n-5+2=2n-3(个)$$

不同的中点.

若凸包是一个凸 m 边形($3\leqslant m\leqslant n$),不妨设为 $A_1A_2\cdots A_m$. 除去点 A_1 后,由归纳假设,剩下的 $n-1$ 个点至少决定

$$2(n-1)-3=2n-5(\text{个})$$

不同的中点. 设(给定点中)B、C 分别为边 A_1A_2、A_1A_m 上距点 A_1 最近的点(B、C 可能就是点 A_2 及 A_m),则线段 A_1B 与 A_1C 的中点显然不在上述 $2n-5$ 个中点之内,从而 n 个点时至少产生 $2n-5+2=2n-3$(个)不同的中点. 这完成了前述结论的归纳证明.

注 我们看到,凸包的作用在于,当增加一个点时,能够利用它指出两个"极端"的中点与已作出的中点不同.

本题还有其他的证法,无需运用归纳法及凸包,见第 6 节例 1.

下面的例 4,看上去有些棘手,借助凸包却相当地简单.

例 4 平面上有 n 个点,其中任意四点都是一个凸四边形的顶点. 证明:这 n 个点是一个凸 n 边形的顶点.

证明 论证的想法是,考虑 n 个点的凸包,这显然不会是一条线段,故它是一个凸 k 边形,其顶点集为已知点集的子集. 我们将证明凸包的顶点集与已知点集重合(即 $k=n$),从而便证明了本题的结论. 这有些类似于几何中的同一法.

记 n 个点为 A_1, A_2, $\cdots$, A_n. 若 $k\neq n$,则已知点中有一点(不妨设为 A_1)不是凸包的顶点,则点 A_1 位于凸 k 边形的内部或边界上. 从 k 边形的任一个顶点引出全部($k-3$ 条)对角线,由于该多边形是凸的,故这些对角线均落在多边形内部,且将该 k 边形分成若干个三角形. 点 A_1 必属于这些三角形中的某一个(可能在边上),则此三角形的顶点(均是已知点!)与点 A_1 不能是凸四边形的顶点. 矛盾.

例 4 的逆命题显然成立. 另一方面,我们希望确定,平面上任给无三点共线的 n 个点,是否其中必有四点为凸四边形的顶点. 易知点数 n 必须大于 4,下面的例 5 表明,这一条件也是充分的.

例 5 平面上任意给定五个点,其中无三点共线. 证明:这些点中有四个点是凸四边形的顶点.

证明 设五个点为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5. 考虑它们的凸包,如果凸包是凸五边形或凸四边形,则结论显然成立.

若凸包是一个三角形,可设为三角形 $A_1A_2A_3$,则 A_4、A_5 在其内部(由于无三点共线,故不会在三角形的边上). 连结 A_4、A_5 的直线恰与三角形

$A_1A_2A_3$ 的两条边相交，不妨设与 A_1A_2、A_1A_3 相交，则显然 A_2、A_3、A_4、A_5 为凸四边形的顶点.

注 例 5 是几何中一个 Ramsey 型定理的特殊情形，用它可以解决不少问题，值得记住.

所谓 Ramsey 型定理，大意是说，当某一系统的元素足够多时，就具有某种指定的性质或规律. 本书不专门讨论 Ramsey 型定理，但后面还有一些这方面的例子(如下面的例 6 和例 7).

组合几何中，有一个关于凸多边形的著名的 Ramsey 型结果：

任给整数 $n\geqslant 4$，一定有一个正整数 $f(n)$，使得当 $m\geqslant f(n)$ 时，平面上任意无三点共线的 m 个点中，必有 n 个点是一个凸 n 边形的顶点.

人们猜想上述 $f(n)$ 的最小值是 $2^{n-1}+1$，但只对 $n=4$ 和 5 的情形给出了证明. $n=4$ 即是例 5 的结论，而 $n=5$ 时的证明有些复杂，我们不作讨论.

例 6 平面上任给不在一直线上的四个点. 证明：以这些点为顶点的三角形中必有一个不是锐角三角形.

证明 本题等价于下面的命题：在所给的四个点中可选出三个点，使得从一个点引出的通过另两点的射线之间的夹角不小于 90°. 我们现在来证明这一命题.

设所给的四点为 A、B、C、D. 考虑其凸包，由于这四点不共线，故凸包是三角形或凸四边形.

(1) 若凸包是一个凸四边形，由于其内角之和为 360°，故必有一个内角$\geqslant\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$，从而对这种情形命题成立.

(2) 若凸包是三角形，不妨设为三角形 ABC，于是点 D 位于其内部或边界上.

如果点 D 在三角形 ABC 的内部，由于$\angle ADB$、$\angle ADC$、$\angle BDC$ 之和为 360°，故其中有一个$\geqslant\frac{360^\circ}{3}>90^\circ$.

如果点 D 在三角形 ABC 的边界上，例如位于 AB 边上，则$\angle ADC$ 与$\angle BDC$ 中的较大者$\geqslant 90^\circ$.

例 7 设 A、B 是平面上的两个有限点集，无公共元素，并且 $A\cup B$ 中任意三点不共线. 如果 A、B 中有一个点集至少包含五个点，证明：存在一个三角形，它的顶点都在 A 中或都在 B 中，且内部不包含另一个集合中的点.

证明 不妨设 A 中至少含五个点. 我们首先在 A 中取五个点，使得这五个点的凸包中不含 A 的其他点(这一步的重要性在后面的论证中可以看

出来)：

如果 A 中恰含五个点，则无需这个手续. 若 A 中的点数超过 5，考虑 A 的凸包(此时是凸多边形)，设 A_1、A_2 为其一边的两个端点，A 中的其他点均位于直线 A_1A_2 的同一侧，对任意 $A_i \in A$，记 $\angle A_1A_2A_i = \alpha_i$，$\alpha_3 < \alpha_4 < \cdots < 180°$，取点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 即可，此时它们的凸包显然不含 A 中其他的点.

现在考虑点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 的凸包，我们分几种情况讨论(繁者未必难).

(1) 如果凸包为凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$(图 1-1)，考虑三角形 $A_1A_2A_3$、$A_1A_3A_4$、$A_1A_4A_5$. 如果其中有一个中不含集合 B 中的点，则这个三角形符合要求. 若这三个三角形中分别含有 B 中的点 B_1、B_2、B_3，则三角形 $B_1B_2B_3$ 即为所求(由于凸包内不含 A 中的点，故此三角形中不会包含 A 中的点).

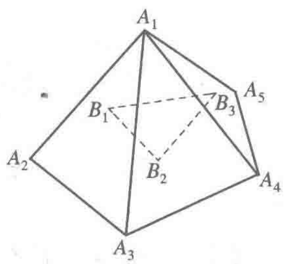


图 1-1

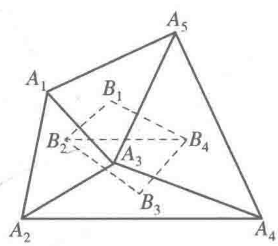


图 1-2

(2) 如果凸包为四边形. 则有一个点(不妨设为 A_3)在凸四边形 $A_1A_2A_4A_5$ 的内部. 连接 A_1A_3、A_2A_3、A_4A_3、A_5A_3，得出四个三角形(图 1-2). 如果其中一个三角形不含集合 B 中的点，则此三角形即为所求. 如果它们分别含有 B 中的点 B_1、B_2、B_3、B_4，那么三角形 $B_1B_2B_4$ 和 $B_2B_3B_4$ 中必有一个不含 A_3(也不会含有 A 中其他点). 这个三角形即为所求.

(3) 如果凸包为三角形，不妨设 A_4、A_5 在三角形 $A_1A_2A_3$ 的内部(图 1-3). 考虑五个三角形 $A_1A_2A_4$、$A_1A_4A_5$、$A_1A_3A_5$、$A_2A_3A_4$、$A_3A_4A_5$. 如果其中一个三角形不含 B 中的点，则此三角形即为所求. 如果每个三角形中都至少包含 B 中一个点，那么必有三个点位于直线 A_4A_5 的同一侧，

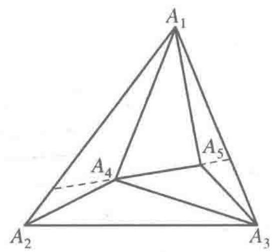


图 1-3

这三点构成的三角形中显然不含 A 中的点.

注 若将条件中"A、B 中有一个点集至少包含五个点"去掉,则结论未必成立. 实际上,不难举出一个例子,使 A、B 各有四个点,且满足问题中的其他条件,但顶点都在 A 中或都在 B 中的任一个三角形内部都包含另一个点集中的点.

本节最后两个例子,涉及有限点集确定的线段长与面积,解决它们,需借助凸包讨论点集中点的分布,区分种种情况逐一加以论证.

例 8 平面上任给五个相异的点,这些点确定的最大距离与最小距离之比记为 λ. 证明:$\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$,并讨论等号成立的充分必要条件.

证明 记给定的五个点为 A、B、C、D、E,考虑它们的凸包.

(1) 设凸包为凸五边形 $ABCDE$. 因五边形的内角和为 540°,故至少有一个内角 $\geqslant 108^\circ$,不妨设 $\angle A \geqslant 108^\circ$. 又设三角形 BAE 中 $\angle BEA \leqslant \angle EBA$,并记 $\angle A$、$\angle ABE$、$\angle AEB$ 的对边长依次为 a、b、c,则

$$\angle BEA \leqslant 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

以及

$$\sin \angle BEA \leqslant \sin\left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right) = \cos\ \frac{1}{2}A.$$

故由正弦定理,得

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin \angle BEA} \geqslant \frac{\sin A}{\cos\ \dfrac{1}{2}A} = 2\sin\ \frac{1}{2}A \geqslant 2\sin 54^\circ.$$

由此及 λ 的定义即知,$\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$.

(2) 设凸包为三角形或凸四边形. 这两种情形可一并处理,此时必有一已知点,设为 E,在三角形 ABC 内部,连 EA、EB、EC,则 $\angle AEB$、$\angle BEC$、$\angle CEA$ 中,至少有一个不小于 120°. 与上述情形(1)类似地可得

$$\lambda \geqslant 2\sin 60^\circ > 2\sin 54^\circ.$$

(3) 设凸包为一条线段,此时显然有 $\lambda \geqslant 2 > 2\sin 54^\circ$.

因此,我们总有 $\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$, 且由上面的证明可见,当且仅当已知五点为凸五边形的顶点,且该五边形每个内角都等于 108°,以及每两条相邻边均相等时,有 $\lambda = 2\sin 54^\circ$,即 $\lambda = 2\sin 54^\circ$的充分必要条件是所给的五点是正五边形的顶点.