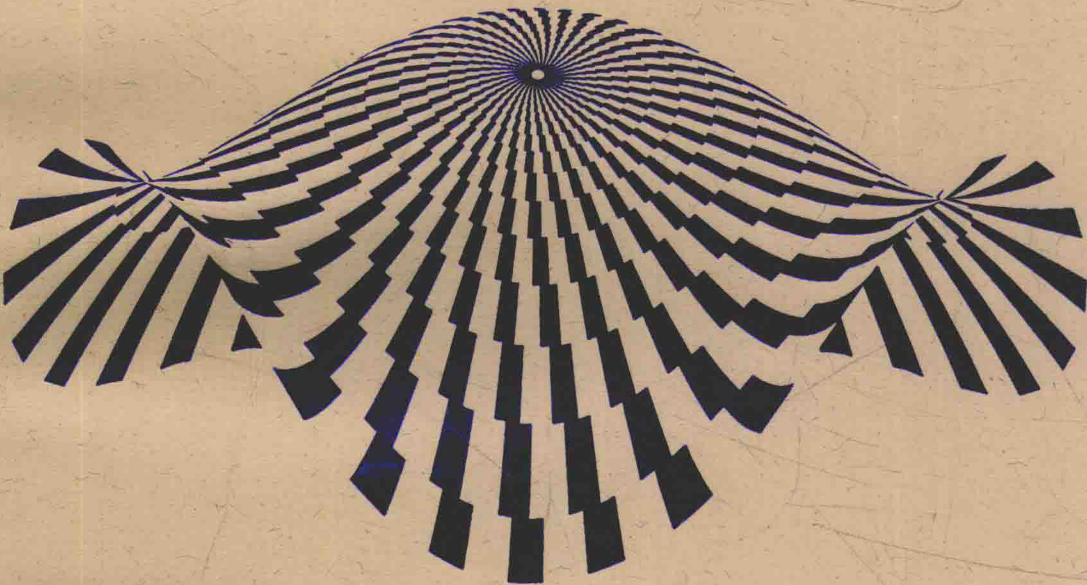
微分几何（修订版）

Differential Geometry

苏步青　胡和生　沈纯理
潘养廉　张国樑



高等教育出版社

微分几何（修订版）

Differential Geometry

苏步青　胡和生　沈纯理

潘养廉　张国樑

高等教育出版社·北京

微分几何

Differential Geometry

(修订版)

策划编辑　田　玲
责任编辑　田　玲
书籍设计　张申申
插图绘制　尹文军
责任校对　刘　莉
责任印制　尤　静

图书在版编目(CIP)数据

微分几何 / 苏步青等编. -- 2版(修订版)
. -- 北京：高等教育出版社，2016.11
ISBN 978-7-04-044722-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①苏… Ⅲ. ①微分几何－高等学校－教材 Ⅳ. ①O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第020704号

出版发行　高等教育出版社
社址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
购书热线　010－58581118
咨询电话　400－810－0598
网址　http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
印刷　北京鑫丰华彩印有限公司
开本　787mm×1092mm 1/16

印张　14.75
字数　240千字
版次　1979年6月第1版
　　　2016年11月第2版
印次　2016年11月第1次印刷
定价　26.50元

[物　料　号　44722－00]

内容提要

本书以经典微分几何为主,同时也适当地介绍一些整体微分几何的概念。经典微分几何主要是三维欧氏空间的曲线和曲面的局部性质的基本内容;整体微分几何内容包括平面和空间曲线的一些整体性质,以及曲面的一些整体性质,同时简单地介绍了微分流形和黎曼流形的一些概念。

全书共有三章和三个附录:第一章三维欧氏空间的曲线论(包括平面和空间曲线的一些整体性质),第二章曲面论讲三维欧氏空间中曲面的局部几何性质,第三章曲面的整体性质初步,这三章是本书的主要内容;附录1向量函数及其运算,附录2欧氏空间的点集拓扑,附录3微分几何的发展简史,这三个附录供学习本书时参考。

本书可供综合性大学数学类专业作为教材。

修订版前言

编　者　　　二零一六年六月

初版至今已过了三十多年了。回想在1978年左右，大学已恢复招生，各门课程都需要教材，高等教育出版社（当时称人民教育出版社）就约我们编写微分几何的教材，上世纪五六十年代国内出版的微分几何教材一般只介绍三维欧氏空间中曲线、曲面的局部几何性质，并不涉及它们的整体性质。因当时整体微分几何学的研究进展神速，人们对几何对象的整体性质的研究有着浓厚的兴趣。我们在1963—1964年左右就试图将曲线、曲面的整体性质引入到教材中去，但是1965年后这个设想就被中断了。

我们在1978年接受了编写教材的任务后就自然地计划将曲线和曲面的整体性质纳入到教材的内容中去。于是在第一章的曲线论中，除了曲线的局部几何性质外，我们加入了曲线论的一些有趣的、经典的整体结果。在第二章讲授了曲面的局部几何理论后，我们在第三章中就介绍了整体曲面理论中的一些基础性的结果，同时也结合拓扑学的基础知识，对微分流形的基本概念作了一些初步的介绍。

编写量较多的部分是第二章，按什么方式去阐述曲面的局部理论成为我们首先面临的问题。我们参考了当时能找到的一些国外微分几何教材，曲面论的阐述方式大致有三种：用向量方式、用张量方式或用外微分形式（简称外形式）来叙述曲面论。

五六十年代国内的微分几何教材一般是用向量表述

的方式来阐述曲面论的局部几何性质的,这种表述方法的优点是直观易懂,但缺点是涉及的几何公式比较繁复,不宜于记忆。而用外形式来阐述的话,虽然理论推导简洁,所得到的几何结果与坐标系的选取无关,但对初学者来说,外微分形式过于抽象,较难理解其几何本质。而用张量方式去阐述就可使理论的表述比较清晰,也便于记忆,而且读者今后在学习力学、理论物理学等后继学科时也会用到张量分析。具体的张量计算当然与坐标系选取有关,但由于张量的协变性,所得出的几何性质本质上是与坐标系的选取无关的。所以我们最终采用的阐述方法是从向量表述出发,逐步过渡到张量表述,而不涉及外形式。多年来的教学实践表明,这是一种有效可行的选择。

这次修订主要是对原书中的一些印刷错误和个别文字表述作了修正,对数学内容基本上没有更动。唯一有较大改动的地方是将第二章2.4节共形对应中的定理(即等温坐标系存在性定理)的证明部分(即原书从第83页倒数第4行起至第84页倒数第2行止)予以重写,使得大学生在已有知识范围内能更好地接受和理解。

原先的证明用到了下列结果:

对任何一次微分形式,总存在一个积分因子,即一次微分形式乘这个积分因子后所得到的微分形式必为某个函数的全微分。

这个结果的证明在一般的常微分方程的教科书中都能找到,但是要注意,这时要求微分形式是实的,积分因子也要求是实的函数。但原书中等温坐标系存在性定理的证明中所出现的微分形式及积分因子都不是实值的,而是复值的。当微分形式和积分因子都是复的情形,积分因子存在性的结论虽然还是正确的,但证明就不是那么简单了。这是因为复数是由实部和虚部两个部分组成的,所以积分因子存在性证明中涉及的方程就不再是常微分方程,而是偏微分方程组。因此等温坐标系存在性的严格证明是一个长时期内受到数学大师们关注的难题,直至20世纪50年代才得以解决,并用到了偏微分方程的一整套理论。

因为微分几何课程一般总是开设在偏微分方程课程的前面,所以在微分几何课程中不可能对等温坐标系存在性给出详细完整的论证。但是等温坐标系存在性定理又是局部微分几何学中不能不提到的一个重要的定理。所以解决的办法是把证明的关键点归纳到去套用一个在偏微分方程理论中起点较低的、而且在偏微分方程的书籍中容易查到的结果,而不去涉及偏微分方程的整套理论。在学过了偏微分方程课程后,有兴趣的读者可自行补全证明的全过程。

编者热忱地欢迎读者对本书提出宝贵意见。

第一版前言

微分几何是以数学分析为工具来研究空间形式的一门数学分科，主要讨论光滑曲线与曲面的性质。经典微分几何主要讨论曲线与曲面的局部性质，随着对物质运动认识的深入，19 世纪开始开展了高维空间微分几何的研究。20 世纪以来，整体微分几何的研究逐渐发展起来，近二三十年来发展非常迅速，并且与微分方程、代数、拓扑相互渗透成为数学的一个重要分科。微分几何在机械工程、力学、引力理论及理论物理等其他领域都有广泛应用。

本课程以经典微分几何为主，但同时也适当地介绍一些整体微分几何的概念。教材中除必须讲授的内容外，还添加一些加“ * ”的材料，它们可作为讲授内容也可作为课外阅读参考材料，各校可根据不同情况灵活掌握。这些加“ * ”的材料，也是整体微分几何中难度较高的基本内容，可在有了欧氏空间的点集拓扑的初步知识（本书附录 2）后再学习。

在学习微分几何时，要力求了解与掌握几何概念与方法，注意培养几何直观和图形想象的能力，从具体到抽象的能力。由于学习微分几何需要在数学上已有了一定的素养，因而本课程以三年级开设为宜。但如果除去了加“ * ”内容，也可以安排在二年级下学期，而把加“ * ”内容作为讲座或选修课形式开设。

本教材共分三章：

编　者　　一九七九年四月

第一章　三维欧氏空间的曲线论；

第二章　三维欧氏空间中曲面的局部几何性质；

第三章　曲面的整体性质初步。

本教材与过去的微分几何教材的区别主要是添加了一些整体的几何性质。例如，在曲线论中增加切线的旋转指标定理、计算曲线长度的Crofton公式以及凸曲线的整体性质等；对曲面的整体性质作了一定的讨论，首先讨论了曲面片与整块曲面的区别及联系，接着介绍了向量场奇点的指标定理、球面的刚性定理、整体曲面的Gauss-Bonnet公式、Hopf-Rinow定理等；最后引进了微分流形及黎曼流形的概念。此外，在第二章处理曲面的局部性质时，我们引用了活动标架法，同时充分利用和式约定，使叙述较简洁，几何概念更为清晰。

为使读者便于阅读起见，我们写了三个附录，其一是向量的微分与积分，其二是欧氏空间的点集拓扑，另一是微分几何的发展简史。

在本教材的编写过程中，得到南开大学、杭州大学、南京大学、郑州大学、北京师范大学及人民教育出版社的支持与帮助，提出了宝贵意见，特此谢意。

目　录

第一章　三维欧氏空间的曲线论

第二章　三维欧氏空间中曲面的局部几何性质

第三章 曲面的整体性质初步

第一章 三维欧氏空间的曲线论

§1 曲线 曲线的切向量 弧长

物理学中,曲线常被看作质点运动的轨迹,时间 t 是描述质点运动的参数.在微分几何中,也常常采用参数方程来表示曲线.

设$\{O;xyz\}$是 E^3 中的笛卡儿直角坐标系,

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1-1}$$

都是 t 的连续可微函数(今后我们总假定它们有三阶连续导数),设这些函数的定义域是直线 $\mathbf{R}^1$ 中的一个区间(a,b)(区间的端点 a 可以是 $-\infty$,b 可以是 $+\infty$),(1-1)式给出了从(a,b)到 E^3 中的一个连续可微映射

$$t \longrightarrow (x(t),y(t),z(t))$$

在这个映射下,t 被映到点 $P(x(t),y(t),z(t))$,(a,b)的像集就构成了 E^3 中的一条**连续可微曲线** C,简称**曲线**(见图 1).我们把 t 称为曲线 C 的**参数**.(1-1)式就是曲线 C 的参数方程.今后常把(1-1)式写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \tag{1-2}$$

而把曲线上参数为 t 的点 P 称为点 $\boldsymbol{r}(t)$,简称为 t 点或 $P(t)$点.

按照参数增加的方向可以确定出曲线的正向(见图 1).称向量

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

为曲线在 t 处的**切向量**.如果在 $t=t_0$ 处$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t_0)}{\mathrm{d}t}\neq\mathbf{0}$,则称参数为 t_0 的点是曲线 $\boldsymbol{r}(t)$的**正则点**,否则就称为**奇点**.曲线 C 上所有点都是正则点时,则称 C 为**正则曲线**.

例 1 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$的轨迹是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上间距为 $2\pi b$ 的一条**圆柱螺线**(见图 2),它是一条正则曲线.

例 2 曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(t^3,t^2,0)$,$t\in E^1$,在 $t=0$ 处,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(0)}{\mathrm{d}t}=(0,0,0)$$

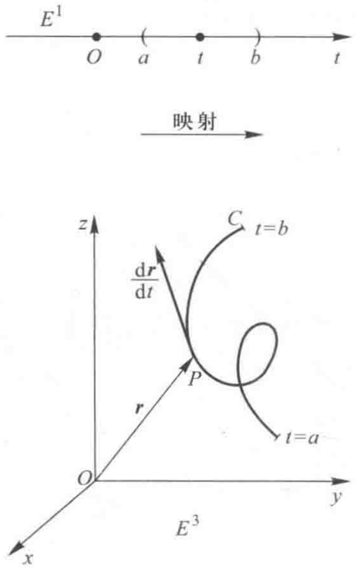


图1

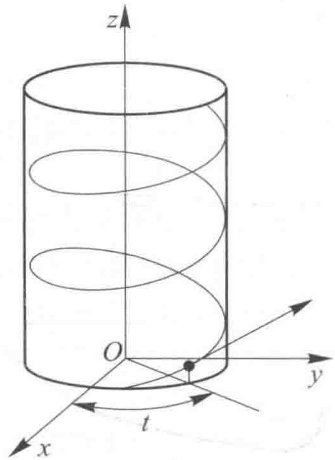


图2

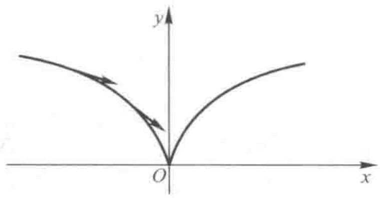


图3

所以 $t=0$ 点不是正则点(见图3).

如果采用另一个参数 $\bar{t}$,则曲线 C 的方程为 $\boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{t})$.为了保证 t 和 $\bar{t}$ 一一对应,参数变换式 $\bar{t}=\bar{t}(t)$ 必须满足

$$\frac{d\bar{t}}{dt}\neq 0$$

为了使 $t,\bar{t}$ 的增加方向都相应于曲线的正向,则要求

$$\frac{d\bar{t}}{dt}>0 \tag{1-3}$$

于是由$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\bar{t}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}$知道,曲线 C 上一点如在取参数 t 时为正则点,则在取参数 $\bar{t}$ 时也必为正则点.

对于正则曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,称

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

为曲线从参数 t_0 到 t 处的**弧长**,其中

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left[\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2+\left[\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2}$$

是切向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$的长度.

设曲线 C 上两点 P_0,P 在曲线的不同参数 t,$\bar{t}$ 的选取下,P_0 点的参数分别为 t_0,$\bar{t}_0$,点 P 的参数分别为 t,$\bar{t}$.令 $s(t)$ 是曲线从 t_0 到 t 的弧长,$\bar{s}(\bar{t})$ 为曲线从 $\bar{t}_0$ 到 $\bar{t}$ 的弧长.设在参数变换下,$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}>0$,则有

$$\begin{aligned}s(t)&=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}}\left|\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\bar{t}}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}\right|\cdot\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}}\right|\mathrm{d}\bar{t}\\&=\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}}\left|\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right|\mathrm{d}\bar{t}=\bar{s}(\bar{t})\end{aligned}$$

因此弧长只依赖于曲线上的点 P_0、P,而与参数的选取无关.

显然,弧长 s 是 t 的可微函数,且

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1-5}$$

对正则曲线,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$,于是可取弧长 s 作为新的参数.这时由

$$1=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}\right|$$

知道,以弧长为参数时曲线的切向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(s)}{\mathrm{d}s}$为单位向量.反之,当切向量为单位向量时$\left(\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=1\right)$,从(1-4)式积出

$$s=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=t-t_0$$

当式中 t_0 取 0 时,可看出 t 就是从 $t=0$ 处起算的弧长(见图4).

今后如无特别说明,曲线总是指正则曲线,而且 $\boldsymbol{r}(s)$ 中的 s 为**弧长参**

数,并用"撇"表示关于 s 的导数,如

$$\boldsymbol{r}'(s)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\quad \boldsymbol{r}''(s)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

等等.

下面我们证明一个定理.

定理 设曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$($s$ 是弧长参数)的每点有一个单位向量 $\boldsymbol{a}(s)$(见图 5(a)),则有

$$|\boldsymbol{a}'(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

其中 $\Delta\theta$ 表示 $\boldsymbol{a}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{a}(s)$ 的夹角(见图 5(b)).

证明

$$|\boldsymbol{a}'(s)|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(s+\Delta s)-\boldsymbol{a}(s)}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}(s+\Delta s)-\boldsymbol{a}(s)|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\left|\frac{\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\right)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

定理证毕.

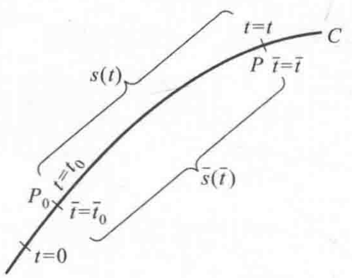


图4

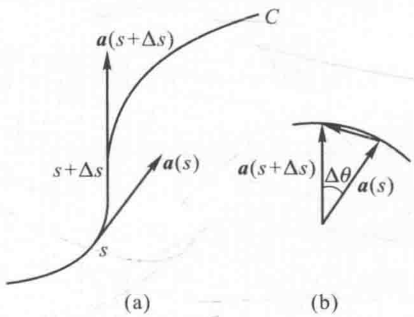


图5

习题

1. 计算下列曲线从 $t=0$ 起的弧长：

(1) 双曲螺线 $\boldsymbol{r}=(a\operatorname{ch} t, a\operatorname{sh} t, bt)$；

(2) 悬链线 $\boldsymbol{r}=\left(t, a\operatorname{ch}\dfrac{t}{a}, 0\right)$；

(3) 曳物线 $\boldsymbol{r}=(a\cos t, a\ln(\sec t+\tan t)-a\sin t, 0)$.

2. 求平面曲线的极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 下的弧长公式，其中 ρ 为极径，θ 为极角.

3. 用弧长参数表示圆柱螺线与双曲螺线.

4. 设曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 不通过原点，$\boldsymbol{r}(t_0)$ 是 C 距原点最近的点.且 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq\boldsymbol{0}$.证明 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 正交于 $\boldsymbol{r}'(t_0)$.

5. 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是参数曲线，$\boldsymbol{m}$ 是固定向量.若对任何 t，$\boldsymbol{r}'(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$，且 $\boldsymbol{r}(0)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$.证明对任何 t，$\boldsymbol{r}(t)$ 正交于 $\boldsymbol{m}$.

6. 设平面曲线 C 在同一平面内直线 l 的同侧，且与 l 只交于曲线 C 的正则点 P.证明：直线 l 是曲线 C 在点 P 处的切线.

§2 主法向量与从法向量　曲率与挠率

对曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，用 $\boldsymbol{T}(s)$ 表示单位切向量，即

$$\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{r}'(s) \tag{1-6}$$

由上节末的定理，我们可用 $|\boldsymbol{T}'(s)|=|\boldsymbol{r}''(s)|$ 来表示曲线上两邻近点 $s, s+\Delta s$ 的切向量 $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{T}(s+\Delta s)$ 之间的夹角与 Δs 之比在 $\Delta s\to 0$ 时的变化情况，它度量了曲线上邻近两点的切向量的夹角对弧长的变化率，反映了曲线的“弯曲程度”.

定义　称 $k(s)=|\boldsymbol{r}''(s)|$ 为曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在 s 点的**曲率**.当 $k(s)\neq 0$ 时，其倒数 $\rho(s)=\dfrac{1}{k(s)}$ 称为曲线在 s 点的**曲率半径**.

例 1　对于直线 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 为常向量，$|\boldsymbol{u}|=1$.于是 $k\equiv 0$.反之，若曲线 C 的曲率 $k=|\boldsymbol{r}''(s)|\equiv 0$，则从微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}=\boldsymbol{0}$ 中解得 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{u}s+\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是常向量，因而曲线 C 是直线.所以直线的特征是 $k\equiv 0$.

例 2　对于圆周 $\boldsymbol{r}(s)=\left(r\cos\dfrac{s}{r}, r\sin\dfrac{s}{r}\right)$，其中 r 为圆的半径，这