解·析·几·何·讲·义

华南师范大学数学系几何教研室

广 东 高 等 教 育 出 版 社 出 版

解析几何讲义

华南师范大学数学系几何教研室

广东高等教育出版社

解析几何讲义
华南师范大学数学系几何教研室
☆
广东高等教育出版社出版发行
新星新技术研究所电脑照排
广东紫金印刷工业公司印刷
787×1092 毫米　32 开本　7.5 印张　1 插页　160 千字
1992 年 9 月第一版　　1992 年 9 月第一次印刷
印数 1— 3000 册
ISBN7－5361－0875－3/G・250
定价：2.20 元

内容提要

本书内容共分五章。

第一章为平面解析几何基本内容复习，以及参数方程和极坐标方程。第二章为平面直角坐标变换与二次曲线的分类。第三章为向量代数。第四章为空间中的平面与直线的方程。第五章为曲面与曲线的方程，二次曲面的分类，以及一些绘图方法。

本书可供师范院校本、专科一年级使用，亦可供高中及中专数学教师参考。

前　　言

本书为师范院校本、专科一年级学生而编写。在编写过程中，我们力求选材精简扼要，以不大的篇幅介绍解析几何的基本内容，使学生在一个学期内掌握其基本知识，初步学习到有关变换、分类、不变量等近代数学的思想和方法，以及区分图形的仿射性质与度量性质，也学习到一些绘图的方法，提高空间的想象能力，为后继课程作好准备，也为学生日后胜任中学教学工作而作好准备。

本书共分五章。

第一章复习、充实中学课程中的平面解析几何的基本内容，并将其用较严格的数学语言叙述出来。随后，介绍参数方程和极坐标方程，既为空间解析几何做准备，也为各方面的应用打好基础。

第二章介绍平面直角坐标变换及二次曲线的分类。通过这个在解析几何历史上著名的成果的学习，使学生初步接触到近代数学以不变量来对空间形式分类的方法。

第三章是向量代数的内容。它不仅是空间解析几何的基本工具，也为高等 代数、微分几何以及物理学等其它课程服务。这是学习的重点之一。

第四章介绍空间中平面与直线的方程，是空间解析几何的基本内容之一，是所有内容 的基础，也是学习的重点之

一。我们将其分成仿射与度量两部分先后教学，这是与很多课本不同之处。我们希望，这将使学生初步接触到空间形式在不同变换群下不同的不变性质，为以后抽象出这个几何分类作一些准备。

第五章介绍空间曲面与曲线的初步理论，介绍二次曲面的分类，并举例介绍一些曲面与曲线直观图的画法，为以后学习多元函数微积分等课程做准备。

每章之后附有一些习题，供教师选留之用。其中有些较难的，其作法有一定代表性的，亦可留给学生思考，或供教师选为补充例题之用。

本书由华南师范大学数学系几何教研室组织集体编写。每章由一人负责起草。各章起草人顺次是：黄锦能、左再思、符学雅、叶木秀、李世杰同志。由左再思任主编、叶木秀绘制全部插图。张文池、沈文淮、陈奇斌同志参加了部分的编写及修改工作。

本书出版前经过华南师范大学数学系及湛江师范学院（原雷州师范专科学校）、韩山师范专科学校的多次使用，我们根据任课教师和学生提出的不少宝贵的意见进行了几次修改。这次出版前，广东高等教育出版社的编缉同志又进行了认真细致的审阅及修改。在此，我们向上述所有的同志表示感谢。同时感谢我系领导的大力支持和鼓励。今后，尚望使用或阅读到的同志继续批评指正。

编　者

1992年5月8日

目　录

第一章　参数方程和极坐标方程

这门课是接续中学的数学课程中的解析几何内容来教学的。在中学的课程中，读者已经学习了平面解析几何的部分内容。为了进一步学习的需要，也为了未来的教学工作的需要，本章将首先对此进行复习和补充。但作为数学专业的大学生，以及未来的数学教师，不能停留在中学课程中的那些内容和不很严格的叙述。因此，学习本章第一节，不是对已有知识的简单的重复，而是复习、充实和提高。我们对其主要结果不加证明地列举出来，学习的时候，要了解它们的来历，懂得如何证明。这一节未学好，学习以下的内容是很困难的。

第二节和第三节，则是平面解析几何中的另一些重要的基础知识，对日后其它课程的学习同样是重要的。

§1·1　平面解析几何基本内容的复习和补充

1　直线坐标系和有向线段

我们已经熟悉作为点集的直线和线段的概念。直线和线段都有两个方向，若指定其中一个方向，便成为有向直线或

有向线段。有向线段按方向先后写出两个端点，例如 AB，便成为它的记号，A 叫始点，B 叫终点。画在图上，则以箭头表示方向。

为了运算方便，我们也承认两端重合的有向线段。当然作为点集它已不是线段的原有涵义。

平面上给定一条有向直线，则每个在这直线上的有向线段或每个平行于这直线的有向线段可以定义一个实数叫做它的**量值**，其绝对值是这有向线段之长度，其符号则依其与那给定的有向直线同向与否来确定正或负。两端重合的有向线段量值规定为 0。这个量值仍以这有向线段的记号来记，例如 AB。

于是，可以对它们按实数的运算法则进行代数的运算。不在一条直线上且不平行的有向线段的量值之间不定义运算。

在有向直线上取定一点 O，叫做**原点**，并取定长度单位，便赋予了这直线上的一个**坐标系**。任给直线上的点 M，有向线段 OM 的量值便是 M 的**坐标**。以此方式，将该直线作为点集同实数集 R 建立了一一对应的关系。这种对应依赖于坐标系的选取。如图1·1。

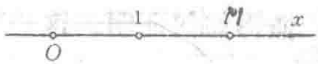

图1·1

这种用坐标系来建立数与点的对应关系的方法，通常叫**坐标法**，是17世纪法国数学家笛卡儿创立的。因此又常叫笛卡儿坐标法。运用它，我们可以用代数的方法研究几何的问题，或者用几何的方法研究代数的问题。

设在取定坐标系的直线上，有 A，B 二点，其坐标分别为 x_1，x_2。问有向线段 AB 的量值是什么？

不难得出

$$AB = x_2 - x_1。$$

若有第三点 C，异于 B，且已知$\frac{AC}{CB} = \lambda$，问 C 的坐标 x 是什么？因 $AC = x - x_1$，$CB = x_2 - x$，可以解出

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}。$$

这叫做直线上的**定比分点公式**。对 C 取直线上除 B 点外任一点皆有意义；且 λ 取除 -1 以外任一实数皆确定唯一点 C。

2 平面直角坐标系，曲线和方程

一个平面直角坐标系 Oxy，由两条各自取定了坐标系 Ox 与 Oy 的直线组成，它们互相垂直，相交于原点 O，且单位长度相同。这两个直线坐标系的公共原点 O，就叫做该平面坐标系的原点，两条直线分别叫 x 轴（或 Ox 轴），y 轴（或 Oy 轴），又叫**横轴与纵轴**。

取定这个坐标系后，平面上任意一点 M，便有一对实数 (x, y) 成为其坐标，x 和 y 分别叫做它的**横坐标和纵坐标**，分别是过 M 向横轴与纵轴做的垂线的垂足在该直线上的坐标。我们已经知道，用这个方法将平面上的点与全体有序的实数对建立了一一对应的关系。同样地，这个对应关系依赖于坐标系的选取。如图1·2。

对于两个坐标轴之间的关系，除了垂直之外，还规定了一种方向。我们确定平面的一面为正面。在这面，从 Ox 轴的正向绕原点逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$转到 Oy 轴的正向，便称这个坐标系是个右手系；若反时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 Oy 轴的正向，则称为左手系。

两种坐标系解决实际问题时作用并无区别。但为了方便，确定使用其中的一种。按通常习惯，我们使用右手系。今后不再声明，当说取一个平面直角坐标系时，就是右手系。不难看出，两个同类的且同单位长度的直角坐标系，可以通过移动将其重合；但右手系与左手系间不可以。

设在平面 Π 上取定了直角坐标系 Oxy。我们便可建立平面曲线 C 和二元方程 $F(x,y)=0$之间的关系。

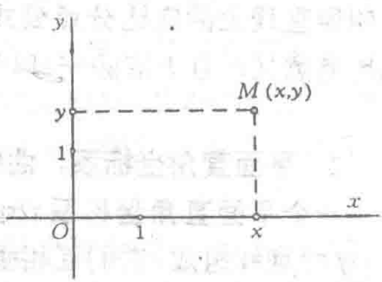

图1·2

若 C 上每点 M 的坐标 (x,y) 都满足方程 $F(x,y)=0$；且满足方程 $F(x,y)=0$ 的每对实数 (x,y) 所确定的点 M 都在 C 上，便说方程 $F(x,y)=0$ 是曲线 C 的方程，又说曲线 C 是方程 $F(x,y)=0$的曲线。

由于一点在不同的坐标系中可以有不同的坐标，故一条曲线在不同的坐标系中可以有不同的方程。另一方面，即使在同一个坐标系中一条曲线也可以有不同的方程。例如，图1·3中过原点的直线 $y-2x=0$，还可以有下列的方程：

$$(y-2x)^2=0,$$

$$[(x-1)^2+(y-2)^2](y-2x)=0,$$

$$(x^2+y^2)(y-2x)=0,$$

等等。它们在实数域中都是彼此同解的方程。

这样，我们在使用坐标法并借助代数工具研究几何的问题时，便要按照实际情况选取适当的坐标系及在此坐标系中

选取适当的方程。这是学习解析几何应注意的一个问题。

在实际问题中，有时需要研究的曲线只是满足某方程的(x, y)所表示的点的一部分。例如研究一个炮弹的弹道。假如不计空气阻力，这是个抛物线。我们已学过抛物线的方程，它的曲线是两端皆无限延伸的。而这里的弹道只有从炮口到目标的一段。于是，就要在方程之外，再联立以对x或y的不等式加以限制，否则即违反了曲线与方程的关系的定义了。

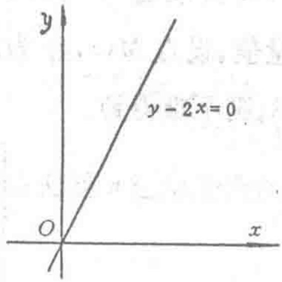

图1·3

那么，曲线到底是什么呢?我们已学过的直线，圆锥曲线，都是。还有什么呢?一点算不算?两条直线交叉算不算?一个圆盘算不算?这个问题，这里不拟作答。我们仅指出，在不同的数学分支中，有不同的规定，因而也就包含不同的对象。初学时，先不要把精力消耗在追究这个概念上。

以下，凡是取定了直角坐标系的平面，就简称为坐标平面。点M及其坐标(x, y)记为$M(x, y)$。

3 三个基本公式

(1) 平面上两点距离公式

设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$是坐标平面上的两点，则这两点的距离为

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。\qquad (1\cdot1\cdot1)$$

(2) 平面上的定比分点公式

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是坐标平面上相异的两点。连接直线 AB，并取定一个方向，则可在这有向直线上研究有向线段的量值。设点 $M(x, y)$ 为此直线上异于 B 的一个点，且有 $\frac{AM}{MB} = \lambda$。则不难得到

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \text{。} \end{cases} \qquad (1 \cdot 1 \cdot 2)$$

这是前边介绍的直线上的定比分点公式的推广，叫平面上的定比分点公式。同样，当 M 取该直线上除 B 以外的所有点时皆有意义，且当 λ 取除 -1 以外的任一实数时都确定直线上唯一的点。

当 M 在 A 和 B 之间时，$\lambda > 0$；当 M 与 A 重合时，$\lambda = 0$；当 M 在线段 AB 以外近 A 的一侧时，$-1 < \lambda < 0$；当 M 在线段 AB 以外近 B 的一侧时，$\lambda < -1$。

一个有用的特殊情况是 M 为线段 AB 的中点的情形。这时 $\lambda = 1$，公式化为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \text{。} \end{cases} \qquad (1 \cdot 1 \cdot 3)$$

(3) 三角形及多边形的面积公式

设坐标平面上有不共线的三点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，则此三点决定的三角形的面积 S 为 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值。展开得到

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right|。\qquad(1\cdot1\cdot4)$$

这个公式有 n 边形的推广形式：

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\cdots\cdots+\begin{vmatrix}x_{n-1} & y_{n-1}\\ x_n & y_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_n & y_n\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\right|.\qquad(1\cdot1\cdot5)$$

其中 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n)$ 是这 n 边形的顺次的顶点，S 为其面积。

4 直线的倾斜角和斜率

在坐标平面上，不与 Oy轴垂直的直线 l 的向上方向与 Ox 轴正向所夹的最小正角叫做 l 的**倾斜角**；若 l 与 Oy 轴垂直则令其倾斜角为0。于是，倾斜角 α 满足 $0\leqslant\alpha<\pi$。如图1·4所示。

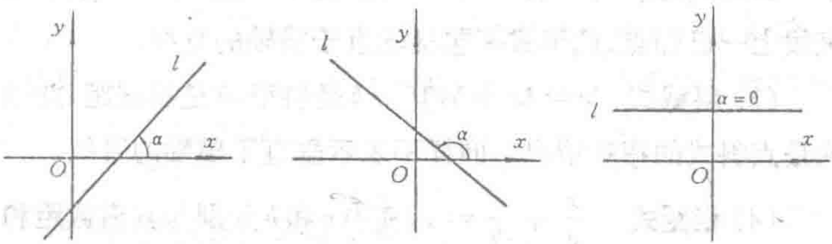

图1·4

直线 l 的倾斜角 α 的正切若存在，便叫它是 l 的**斜率**。于是，当 l 不与 Ox 轴垂直时，它便有斜率 k。斜率 k 与倾斜角 α 的关系依定义为