

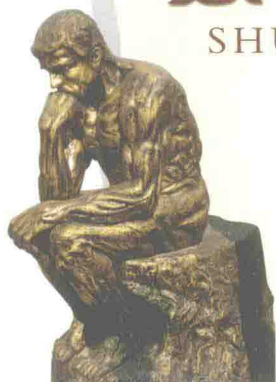
■全国教育科学规划“十二五”教育部重点课题研究成果

■河南省教育厅“省培计划”中小学教师地方项目培训资源

数学思想方法解读

SHUXUESIXIANGFANGFAJIEDU

杨启贤 主编



河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

全国教育科学规划“十二五”教育部重点课题研究成果
河南省教育厅“省培计划”中小学教师地方项目培训资源

SHUXUE SIXIANG FANGFA JIEDU

数学思想方法解读

主 编 杨启贤
副主编 吴向辉 郭文革
编 委 芮广亚 孙林坡 周 伟
吴连杰 牛长青

河南大学出版社

• 郑州 •

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法解读/杨启贤主编. —郑州:河南大学出版社,2012.3(2012.12 重印)
ISBN 978-7-5649-0672-6

I. ①数… II. ①杨… III. ①数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 039165 号

责任编辑 阮林要
责任校对 高丽燕
装帧设计 廖凤文

出版发行 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号
邮编:450046
电话:0371-86059750(职业教育出版分社)
0371-86059701(营销部)
网址:www.hupress.com

排	版	郑州市今日文教印制有限公司
印	刷	郑州市今日文教印制有限公司
版	次	2012 年 5 月第 1 版
印	次	2012 年 12 月第 2 次印刷
开	本	787mm×1092mm 1/16
印	张	12
字	数	285 千字
印	数	3001—5000 册
定	价	28.00 元

(本书如有印装质量问题,请与河南大学出版社营销部联系调换)

前 言

现在,人类已进入信息化时代.随着信息化程度的日益提高,将使数学知识、思想和方法更广泛、更深刻地应用到社会生活的方方面面,因而要求人们具有更高的数学素养.为使学生形成良好的思维品质,国家教育部决定从2012年秋季开始实施的《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《课标》)正是顺应了时代这一潮流,明确提出数学思想方法是数学课程目标的“四基”之一,并对其教学提出了更加具体的要求.

数学思想方法是从一般的数学知识中提炼出来的精髓,是数学科学建立和发展的灵魂,是将数学知识转化为数学能力的桥梁,是分析、解决数学问题的根本想法.教学中,注重基础知识固然重要,但是从培养人的数学素养来看,注重其思维能力的培养更为重要.因而,关注数学思想方法的教学,引导学生在理解、掌握基础知识和基本技能的基础上,将对一般知识的理解升华到对数学本质的理性认识,是培养学生分析问题、解决问题,提高应用能力和创新能力的重要途径.另一方面,数学思想方法还具有人文属性,作为一种文化因素深刻地影响着人的世界观和方法论.以上两个方面,正是《课标》的亮点,是数学学科实施素质教育的根本所在.

如何有效地进行数学思想方法的教学,对不少教师来说,目前还是一个具有挑战性的课题.一方面,数学思想方法本身具有抽象性,同时又受初中学生基础知识和认知水平的限制,教材中不可能将数学思想方法作为知识点予以系统编排,只能以“渗透”的形式在知识内容中体现;另一方面,在解决某一具体问题,往往是多种数学思想方法交织在一起,形成一个立体的网状结构,这就为教师、学生的理解、交流和领悟带来了更多的困惑.为了降低教师教学和学生学习中的难度,依据《课标》要求,本书特将初中常用的数学思想方法从教材中“抽”出来单独编排,予以“显性”展现,并在一定深度和广度范围内适当分析和整合,大致理出了数学思想方法在初中阶段体现的脉络.在目前此类参考资料较少的情况下,也许能起到给中小学教师雪中送炭的作用.

对于数学思想方法的研究,当代已初步形成了一个比较严密的系统.但是,从整体结构上来看,初中数学还仅仅处于初步感受和体验阶段.因此,本书

在编写中本着实用、实效的原则,避繁就简,化难为易,以初中教材中常用的数学思想方法为主体,兼顾对某一种思想方法的整体感知和相互之间的联系,自成一个比较简明的逻辑体系.因而,在内容设置上既基于《课标》,又适度超出了《课标》的范围,有的题目回溯到小学教学内容,有的延伸到高中甚至更广阔的数学领域,望读者在阅读时酌情取舍.为了深刻揭示某种数学思想方法的内涵,特从传统习题和近年来各地的中招试题中精选了近200道典型例题,按照类别与相应的数学思想方法内容予以同步编排,并对部分题目的解答给出了多种思路,每种思路所蕴涵的数学思想方法又多以“解题反思”的条目给出了简要点评.这样,不仅可使读者直接感受到数学思想方法是如何在教材中“渗透”的,还可作为教师教学中的参考和补充.

另外,为使读者对数学思想方法的本质有一个更全面、更深刻的理解,书中还介绍了一些数学思想方法产生的背景及相关的数学史料,如欧几里得公理体系、希尔伯特公理体系、笛卡尔坐标系、“七桥问题”和“一笔画”、哥德巴赫猜想、数学归纳法、无理数的证明、生活中的反证法,等等.为了阅读方便,有的资料随相关内容予以展示,有的以“相关链接”的条目单独出现,读者认真参阅,肯定大有裨益.

本书编写过程中,参考了不少书刊和网上资料,观摩了一些老师的现场作课,从中汲取了丰富的营养,采撷了部分相关内容和题目,限于体例,未作一一注明,谨向作者和老师们表示歉意和感谢.

参加本书编写的人员有杨启贤(第一章和第二章)、吴向辉(第三章和第十二章)、郭文革(第九章、第十章和第十一章)、芮广亚(第四章)、孙林坡(第五章)、周伟(第六章)、吴连杰(第七章)和牛长青(第八章),最后由杨启贤、吴向辉审定.

由于编者水平有限,书中难免错漏和不妥之处,诚请专家学者和读者朋友斧正.

编 者

2012年5月

目 录

前 言 /1

第一章 数学思想方法概述 /1

- 第一节 什么是数学思想方法 /1
- 第二节 数学思想方法的历史作用 /3
- 第三节 数学思想方法的基本构架 /5

第二章 公理化思想方法 /8

- 第一节 公理化思想的由来和发展 /8
- 第二节 欧几里得公理体系 /10
- 第三节 希尔伯特公理体系 /11

第三章 符号思想 /15

- 第一节 符号的产生与发展 /15
- 第二节 符号体系的来源与结构特征 /17
- 第三节 符号的作用 /19
- 第四节 整体化思想和换元法 /23

第四章 模型思想方法 /26

- 第一节 从“七桥问题”谈起 /26
- 第二节 模型思想方法 /29
- 第三节 算术应用题模型 /30
- 第四节 方程(组)模型 /31
- 第五节 不等式(组)模型 /39
- 第六节 函数模型 /43
- 第七节 样本模型 /54

第五章 化归思想方法 /58

- 第一节 具体与抽象、已知与未知的转化 /59

- 第二节 局部与整体的转化 /62
- 第三节 运算之间的转化 /65
- 第四节 方程之间的转化 /66
- 第五节 函数中的转化 /71
- 第六节 图形之间的转化 /76
- 第七节 命题之间的转化 /85
- 第八节 有限与无限的转化 /86
- 第九节 待定系数法 /87

第六章 数形结合思想方法 /93

- 第一节 利用线段图 /94
- 第二节 利用数轴 /99
- 第三节 利用坐标系 /101
- 第四节 利用图形性质 /103
- 第五节 运动变化中的数形结合 /105

第七章 集合、分类思想方法 /113

- 第一节 集合简述 /113
- 第二节 分类思想 /114

第八章 类比思想方法 /122

- 第一节 类比的含义 /122
- 第二节 常用的类比类型 /123

第九章 归纳思想方法 /127

- 第一节 不完全归纳法 /127
- 第二节 合情推理与猜想 /131
- 第三节 完全归纳法 /136
- 第四节 数学归纳法 /137

第十章 假设思想方法 /141

- 第一节 直接假设型 /141
- 第二节 数字计算型 /142
- 第三节 条件分析型 /144
- 第四节 假设推理型 /144

第十一章 演绎推理与证明 /145

- 第一节 命题及其四种形式 /145
- 第二节 充分条件与必要条件 /147
- 第三节 演绎推理与证明的意义 /148
- 第四节 综合法和分析法 /150
- 第五节 反证法 /155
- 第六节 同一法 /161

第十二章 引导学生领悟数学思想方法 /168

- 第一节 数学思想方法的教学要求及作用 /168
- 第二节 抓住数学的“灵魂” /170
- 第三节 突出个性化教学原则 /174
- 第四节 数学思想方法的中考复习 /180

主要参考文献 /183

第一章 数学思想方法概述

我国古代有个“点石成金”的故事：一个人十分崇拜八仙中的“纯阳祖师”吕洞宾，尽管他家里很穷，但仍然整日非常虔诚地供奉着吕祖。吕洞宾感其诚意，一日忽然从天上降到他家，见他家徒四壁，贫困潦倒，顿生怜悯之心；于是伸出一根手指，指向一块厚重的石头，口中念念有词；立刻，那块石头变成了光灿灿的黄金。吕洞宾说：“你想要它吗？”那个人拜了两拜，摇摇头道：“我不想要。”连这么大块的黄金都不动心，吕洞宾非常高兴，说：“像你这样没有贪心的人实在太少了，我可以传授给你成仙的真道。”那个人说：“不是的，吕祖，我想要你的那根手指头。”

这个故事中，如果把变成金子的石头看做数学知识，那么吕洞宾那根能把石头变成金子的指头就相当于这里所说的数学思想方法了。学习和研究数学的人，如果能够深刻领悟数学思想方法，就会在数学领域内“点石成金”。

第一节 什么是数学思想方法

一、数学思想

《现代汉语词典》中，“思想”被解释为“客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果”。《辞海》中称“思想”为观念，是相对于感性认识的理性认识成果。毛泽东在《人的正确思想从哪里来》一文中说：“这种感性认识的材料积累多了，就会产生一个飞跃，变成了理性认识，这就是思想。”综合起来看，思想是认识的高级阶段，是人们对事物本质的高度抽象和概括。它是人们从大量的思维活动中经过反复提炼获得，并一再被实践证明是正确的产物。如果将它应用到新的思维活动中去，就能产生出新的结果。

客观世界是丰富多彩的，其中大量的数学事实反映到人们的意识之中，经过大脑的思维活动，对数学事实进行概括、抽象，便产生了对数学问题的深刻认识，形成了概念、法则、性质、公式、公理、定理等一系列数学知识。然而现在的问题是，这些浩瀚广博的数学知识，它们之间有哪些共同的、带有本质性的东西？它们之间有哪些联系？经过长期实践和大量研究，人们逐步对数学知识与理论产生了更高级、更本质、更概括的认识，这就是数学思想。它超越了一般意义上的数学知识和理论，具有两个显著特点：其一，它不同于概念、法则、性质、公式、公理、定理等一般的数学知识，而是人们在获取这些知识的过程中必不可

少的纽带和桥梁;其二,它往往不以独立的形式而存在,而是蕴涵于处理问题的过程之中。因而,它是数学科学中奠基性、总结性、广泛性的核心内容,并且具有文化品格,是人类文化的重要组成部分。

简单地说,数学思想比一般的数学知识更深刻、更本质、更抽象、更概括,而数学知识比数学思想更具体、更丰富、更贴近客观现实。

通常情况下,数学思想是一个比较宽泛的概念,涉及很多方面。但其中有一部分与数学学科的产生和形成紧密相伴,不仅含有传统数学思想的精华,而且具有近现代数学思想的特征,并伴随着数学的发展而不断拓宽和创新。为了表述方便起见,人们将这些称之为基本数学思想,如符号思想与整体变元思想,集合、分类思想,对应思想,公理化思想,数形结合思想,化归思想,函数与方程思想,抽样统计思想,归纳和演绎等,都属于基本数学思想。

需要指出的是,数学思想仅仅是科学思想的一部分,而科学思想未必都是数学思想,如一分为二思想、量变质变思想、肯定否定思想等,都是一般的科学思想而不是数学思想。但有些科学思想在数学中经常运用,被染上了浓重的“数学色彩”,因而教学中也称之为数学思想。例如,分类思想是各门科学都能运用的思想,语文可分为文学、语言、写作等,物理学可分为力学、热学、电学、光学、原子物理学等。由此可见,分类思想不是单单由数学学科赋予的,但是在数学中经常应用它来处理问题,因此也被称为数学思想。

二、数学方法

“方法”一词,起源于希腊语,它的意义是要达到一定目的必须遵循某些调节原则,而“方法”就是关于这些调节原则的说明。我国《现代汉语词典》中将“方法”解释为“关于解决思想、说话、行动等问题的门路、程序等”。概括来说,方法是指人们为了达到一定目的而采取的某种可操作的规则、策略、途径和行为方式,是指导人们行动的原则。中国古代兵书《三十六计》开篇就写道“六六三十六,数中有术,术中有数。阴阳燮理,机在其中”,说明古人早已意识到数学与策略、方法之间的密切关系了。

人们在解决数学问题时,通常是在数学思想的指导下,用数学语言表达事物的状态、关系和过程,然后经过分析、推导和运算等,对数学事实形成确定的解释、判断和预言,从而达到解决问题的目的,这样便形成了一种数学手段和程序。同一手段和程序被重复运用了多次,并且达到了预期目的,便成为一种相对稳定的解决某类问题的策略,这便是数学方法。简言之,数学方法就是提出、分析和解决数学具体问题时所采用的方式、途径和手段,也可以说是解决数学问题的概括性策略。

数学方法有三个基本特征:一是高度的抽象性和概括性,二是逻辑的严密性及结论的确定性,三是应用的普遍性和可操作性。

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用:一是提供简洁精确的形式化语言,二是提供数量分析及计算的方法,三是提供逻辑推理的工具。现代科学技术特别是计算机技术的应用和发展,与数学方法的地位和作用的日益增强正好相辅相成。

中学数学中常用的数学方法大致可以分为以下三类。

(1) 逻辑学中的方法,如分析法、综合法、类比法、反证法等,它们本来是逻辑学中的一般方法,因广泛运用于数学问题的研究之中而被“数学化”了,是解决数学问题的得力工具,因此也称为数学方法。

(2) 数学中的一般方法,如建模法、数形结合法、待定系数法、换元法、消元法、降次法、代入法、图像法(坐标法)、比较法、数学归纳法等。

(3) 数学中的特殊方法,如配方法、拆项补项法、公式法、因式分解,以及图形平移、翻转、旋转、放缩等方法。

三、数学思想与数学方法的关系

从数学学科的产生和发展历程来看,数学思想和数学方法是不能截然分开的。“思想”指导“方法”,“方法”体现“思想”,两者相互依存,相得益彰,犹如刀之与刃也。刀不在,刃焉存?刃若无,岂谓刀也?

一般地说,数学思想是宏观的,它具有普遍的指导意义;而数学方法则是微观的,是解决问题直接的、具体的手段。前者给出了解决问题的方向,后者给出了解决问题的策略和途径。

在解决数学问题时,数学思想能促使人们主动寻求、自觉运用有效的数学方法,使人们正确把握解决问题的方向。而一旦选择了有效的方法,不仅使问题能得以圆满解决,而且还能使人们在更高的层面上领悟数学思想。大家都有这样的体会,当刚接触一个新的难题时,往往有“山重水复”之感,如果确定了一种解题思想,这时会顿觉“柳暗花明”,方法就成为技术性的问题了。比如解无理方程,其思想是把无理方程转化为有理方程。在此思想指导下,具体方法是先把方程的两边同时乘方。有的方程结构比较复杂,两边乘方后还要进行换元。换元要有一个巧妙的构思,这个构思过程就使人们对换元法有更深刻的理解。在整个解题过程中,思想与方法相互交融,知识和能力得到提升,更能让人们深刻领略到转化思想的风采,达到培养良好数学素养的目的。

中学阶段的数学内容都是基础知识,相对比较简单,处理具体问题时所涉及的数学思想与方法相互交融,常常是形影相随、相伴出现,教学中很难、也没有必要将二者予以明确区分。因此,除非专门的研究,一般不再将数学思想与数学方法这两个概念做严格的界定,而是将二者合为一个整体概念,统统称之为数学思想方法。

第二节 数学思想方法的历史作用

纵观数学学科的历史进程,任何一种新的数学思想方法的产生和发展,都是推动数学学科进步的有力杠杆。它不止使原有的学科更加严密、完善,甚至还为数学科学的创新带来一场革命,从而产生新的学科分支和更高一级的思想方法,使数学从一个新的领域迈入另一个新的领域,演绎出一个门类纷纭、知识浩瀚的数学王国。这方面的事例不胜枚举,下

面仅通过两个例子予以说明.

一、《几何原本》的公理化思想及逻辑结构

《几何原本》确立的公理化思想,是数学发展史上意义极其深远的大事,也是整个人类文明史上的里程碑.公理化思想在数学中的成功运用,其创始人是被誉为“几何之父”的古希腊数学家欧几里得(Euclid,约公元前330年~公元前275年).在他之前,古希腊人已经积累了大量的几何知识,并开始用逻辑推理的方法去证明一些几何命题.受这种思想的影响,欧几里得这位“建筑师”在前人准备的“木石砖瓦”材料的基础上,天才般地按照逻辑系统把几何命题整理起来,建成了一座巍峨的几何大厦,完成了数学史上的光辉著作——《几何原本》.这部著作的问世,标志着欧氏几何这一系统学科的建立,成为科学发展史上的光辉巨著,对数学特别是几何学的发展产生了不可估量的影响.2000多年来,这部著作一直为后世所推崇,在基础数学中占据着统治地位,是世界上发行最广而且使用时间最长的教科书,被译成多种文字,共有2000多种版本.至今,其地位也没有被动摇,包括我国在内的许多国家仍以它作为基础数学教材.

《几何原本》是用逻辑的链子由此及彼地展开了全部的内容.它的结构具有三个显著特点:一是鲜明的直观性,二是严密的逻辑演绎方法,三是直观性与演绎方法的紧密结合.正因为具有这样的特点,在长期的实践中,它已成为培养、提高青少年逻辑思维能力的好教材.

《几何原本》提出的公理体系及逻辑结构对后世的影响,远远超出了几何学的本身.这不只是因为它那严密、广博的几何知识,更是因为它那严谨、完善的思想方法及逻辑结构,致使它成了历代科学家们领悟的真谛.19世纪先后产生的罗巴切夫斯基几何和黎曼几何,就是在直接研究《几何原本》的基础上创立的.《几何原本》的思想方法和构建理念,不仅仅影响到数学领域,几乎渗透到了自然科学的所有领域,成了自然科学的一项奠基工程.历史上不知有多少科学家从学习几何中得到益处,从而为科学作出了巨大贡献.

少年时代的牛顿,曾深入钻研了《几何原本》,为以后的科学工作打下了坚实的数学基础,在许多领域取得了丰硕的成果.近代物理学的科学巨星爱因斯坦也精通几何学,并且是成功应用几何学的公理化方法开创研究工作并取得卓著成效的典范.他认为在物理学研究中,也应当在逻辑上从几个所谓公理的基本假定开始,把整个理论建立在公理之上.在狭义相对论中,爱因斯坦就提出了相对性原理和光速不变原理,从而开拓了近代物理研究的崭新领域.

二、笛卡尔坐标系和数形结合思想

笛卡尔(Descartes,1596~1650),法国数学家、哲学家、物理学家、生理学家.

据说,有一天笛卡尔卧病在床,尽管病情很重,但他还是反复思考着一个思考了很久问题:几何图形是直观的,而代数方程是抽象的,能不能把几何图形与代数方程结合起来,也就是说能不能用几何图形来表示方程呢?通过什么样的方法才能把组成几何图形的

“点”和满足方程的“数”联系起来呢?忽然,他看见屋顶角上有一只蜘蛛,拉着丝垂了下来,一会工夫,蜘蛛又顺着丝爬了上去,在上边左右拉丝.蜘蛛的“表演”使笛卡尔的眼前一亮,产生了灵感.他想,如果把蜘蛛看做一个点,它在屋子里可以上、下、左、右运动,能不能把蜘蛛的每个位置用一组数确定下来呢?他又想,屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条直线,如果把地面上的墙角作为起点,把墙面交出来的三条直线作为三根数轴,那么空间中任意一点的位置,不就可以用在这三根数轴上有顺序的三个数来表示了吗?反过来,任意给定一组三个有顺序的数,也可以在空间中找到一个确定的点与之对应.这就是笛卡尔直角坐标系的雏形.

此后,他大胆设想:如果把几何图形看成是动点的运动轨迹,那么几何图形就可以看成是由某种共同特征的点所组成的.比如,圆可以看做是平面内动点到定点的距离相等的点的轨迹.在坐标系内,如果把点看做是组成几何图形的基本元素,那么每一个点都可以用数组来表示;再把数组看做是方程的解,这样代数和几何就可以看做“一家人”了.由此,笛卡尔创造了用代数方法研究几何图形的数学分支——解析几何.

2000 多年来,几何与代数以光辉的历史伴随着人类文明.但是,在 16 世纪以前,它们有着各自独立的结构体系,互不联系地平行向前缓慢发展着.几何似乎仅是关于形的科学而与数无关,代数则似乎与形无关而仅是关于数的科学.1637 年,笛卡尔发表了他的划时代著作——《几何学》.在这本著作中,他首先建立了直角坐标系,使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来,从根本上改变了自古希腊开始的代数与几何分离的趋向.直角坐标系的创建,在代数与几何之间架起了一座桥梁,既可以用代数方法研究几何问题,也可以用几何方法解决代数问题,为此后微积分的创立奠定了基础.正因为如此,《几何学》被数学家誉为“精密科学进步中最伟大的一步”.后来,牛顿和莱布尼茨等人正是利用了这一“新式武器”,在建立微积分理论中起了关键性作用,从此带来了近代数学的飞速发展.恩格斯曾高度评价笛卡尔对数学的贡献:“数学中的转折点是笛卡尔的变数.有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了.”

从以上两个例子不难看出,数学思想方法在数学领域以及自然科学领域的发展中有着不可估量的历史作用.一种新思想的诞生,往往能引起某一学科的革命性突破;而一种新方法的出现,又孕育着一种新思想的诞生.

第三节 数学思想方法的基本构架

数学思想方法早在公元前 3 世纪就已处于萌芽状态,但在以后的 1000 多年间一直处于缓慢的发展之中.直到 17 世纪,数学基础学科中才有了重大思想方法出现,特别是数学公理化思想的形成、笛卡尔坐标系的应用以及数学基础理论研究的深入开展,人们开始关注数学各分支之间的内在联系,逐渐重视对数学思想方法的产生及发展规律的探讨.许多著名的数学家都曾从事过这方面的理论研究,并获得了丰富的成果,不仅有力地推动了数

学的发展,而且为后来人们研究数学思想方法及其在教学中的应用提供了理论基础.

在国内,对数学思想方法教学的研究也有一个渐进的发展过程.自1992年8月国家教委制定的《九年义务教育数学教学大纲》中明确提出数学思想方法是数学知识的组成部分以来,引起了教育界对数学思想方法教学的重视,许多专家、学者对数学思想方法的研究兴趣也日渐浓厚.随着研究的不断深入和拓展,有许多有价值的论文面世、不少新著出版,解决了教学中的一些实际问题,有效推动了我国数学教育改革的进程.2001年,国家教育部制定的全日制义务教育《课标(实验稿)》中说:“数学是人类的一种文化,它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分.”在这一思想的指导下,国家大力推进基础教育课程改革,调整和改革课程体系、结构 and 内容,经过十年的探索和实践,颁布了《课标(2011年版)》,要求教师应“使学生理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,获得基本的数学活动经验”.把数学思想方法作“四基”教学目标之一,更加突出了数学思想方法在教学过程中的重要地位.

目前,对于数学思想方法的研究大致可分为两条战线.其一是中小学教师和基层教研人员,他们植根于教学实践,侧重于数学思想方法在教学中的应用.由于他们的积极参与和大胆尝试,当前对于数学思想方法的研究已成为一项独具特色而又富有深远意义的崭新课题.其二是专业研究人员,他们侧重于理论方面的系统研讨.由于数学思想、数学方法本来就是两个不同的概念,为了更深刻、更全面地揭示数学思想和方法的本质及内在联系,因而他们在研讨过程中一般是将数学思想和数学方法作为两个概念分开进行表述的,这样能使层次结构更加清晰,内容展示更加直观.他们的研究虽观点不尽相同,但主流框架大体有以下两个方面.

一、基本数学思想

1. 两大“基石”思想

(1) 符号化与变元表示思想:换元思想、方程思想、参数思想.

(2) 集合思想:分类思想、交集思想、补集思想.

2. 两大“支柱”思想

(1) 对应思想:函数思想、变换思想、递归思想、数形结合思想.

(2) 公理化与结构思想:公理化思想、结构思想、极限思想.

3. 两大“主梁”思想

(1) 系统与统计思想:系统思想(整体思想、分解组合思想、运动变化思想、最优化思想)、统计思想(随机思想、统计调查思想、假设检验思想、量化思想).

(2) 化归与辩证思想:化归思想(纵向化归思想、横向化归思想、同向化归思想、逆向化归思想),辩证思想(对立统一思想、互变思想、一分为二思想).

二、基本数学方法

1. 几种重要的科学认识方法

- (1) 观察与实验.
- (2) 比较与分类.
- (3) 归纳与类比.
- (4) 想象.
- (5) 直觉与顿悟.

2. 几种重要的推理方法

- (1) 综合法与分析法.
- (2) 完全归纳法与数学归纳法.
- (3) 演绎法.
- (4) 反证法与同一法.

3. 几种重要的求解方法

- (1) 数学模型法.
- (2) 关系映射反演法.
- (3) 构造法.

许多学者认为,有关数学思想和数学方法的研究尚是一块未完全开垦的土地.以上介绍的主流框架结构涉及很多方面的知识,有待人们进一步去开掘.作为专业研究人员,将数学思想、数学方法分门别类地进行研究,为一线教师及基层教研人员的理解和应用提供了诸多方便.但是,根据《课标》要求和初中学生的认知水平,中学教师对上述结构中的内容不可能、也不必要一一“学深学透”,其中那些常用的、基本的数学思想方法应该是研讨和应用的重点.为了简明起见,下面从第二章到第十一章,将初中教材中蕴涵的主要数学思想和方法从教材中“抽”出来,并按一定的顺序予以探究和解读.

第二章 公理化思想方法

什么是公理化思想方法呢?概括地说,在一个理论系统中,从尽可能少的原始概念和一组不加证明的公理出发,用纯逻辑推理的法则,把该系统建立成一个严格的演绎系统,这种思想方法就叫公理化思想方法.数学之所以被尊崇为严谨科学的典范,就在于它首先成功运用了公理化思想方法.

第一节 公理化思想的由来和发展

数学史上,比较明确提出公理化思想的学者,当首推古希腊的亚里士多德(Aristotle, 公元前 384 年~公元前 322 年).在当时百家纷争的学术辩论中,他对什么是严格的证明程序做了明确的定义:其一,从一些不证自明的前提出发,经过有效的推理,获得无可争辩的结果;其二,这种不证自明的前提要尽可能的少.在当时的历史条件下,这种思想确实是难能可贵的.但是,亚里士多德并没有明确提出一个具体的公理体系,而首先把他的公理思想萌芽成功地应用到学术著作中的是伟大的数学家欧几里得.欧几里得首先提出 20 条公理、公设和定义,并以此为基础,将前人关于几何的经验知识条理化、系统化,形成了一个合乎逻辑的科学体系,写出了划时代著作《几何原本》,开创了用公理化方法和逻辑推理建立科学学科的先河.然而令后人遗憾的是,在此后的 2000 年间,人们关注的只是《几何原本》中的“知识”,而对于《几何原本》的“灵魂”——公理体系的产生及所起的作用并没有引起重视,直到 19 世纪中叶,学者们才完全明白了其中的奥妙.这就是在建立几何学时,必须有两个前提:首先是将一些原始概念(不定义概念)挑选出来,一切新的概念一定要用原始概念或已有定义的概念来下定义;其次是提出的所有几何命题,无论它本身多么明显,若不是根据公理或已有证明的命题证明过的,必须明白地宣布它为公理.这就是说,在构建几何学时,只允许纯粹按逻辑推理进行,绝不允许诉诸直觉和默契.

也许有人会问,为什么要首先确定一些原始概念和公理呢,这样做可靠吗?

大家知道,在数学科学中,任何一个新概念都是在旧概念的基础上建立的,而旧概念又必须建立在更旧的概念之上,这些概念都必须有自己的定义.这样就需要由较复杂的新概念,一步步地回溯到更简单的旧概念之上.那么,何时才能找到“第一个被定义了的旧概念”呢?事实上,这种无止境的回溯非但是不可能的,同时也是不必要的.这样做只能把数学变成一系列概念和定义的游戏,恰恰湮没了数学起源于现实世界的本质.因此,数学家们把那些最常见的、最好理解且不容易发生歧义的概念预先选定,不加定义而直接使用,

作为解释其余一切概念的本源. 这些预先选定的、不加定义的概念, 称之为原始概念, 也称之为元词, 如点、直线、平面等. 对于这样的原始概念, 人们只能结合具体的事物去想象它、理解它, 而不能用一句准确的语言去描述它, 也就是说这些概念是没有定义的.

在证明几何命题时, 需依据已有的定理、公式或法则. 而这些结论总是从前一个结论推导出来的, 而前一个结论又是从再前一个结论推导出来的. 这些已有的结论, 又需要有更旧的依据. 这样无限地往上步步追寻, 那么何时才能找到“第一个被证明了的结论”呢? 事实上, 希望每个结论都依据已经证明了的结论去证明, 是永远办不到的, 也是不必要的, 正像前面说过的原始概念一样, 应选择一些最简单、最基本的结论作为推理的基础. 因此, 人们选择了一些非常明显的、经过千百万人实践证实是正确的基本命题, 不加证明而直接作为论证别的结论的依据, 这些基本结论称之为公理. 教材中说的某些“基本事实”, 如“两点之间, 线段最短”、“经过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行”等都是公理, 也就是说这些结论是不需要证明的.

由上可以看出, 原始概念和公理尽管比较直观、简单, 但它们都是人们在对客观世界的深刻认识中总结出来并经过反复实践验证而得出的真理. 它们不仅是建立数学学科的基础, 而且能够深刻反映数学产生于现实世界的本质. 因此, 以它们作为推理的依据, 命题的论证便有了明白而正确的客观基础. 然后, 按照严格的逻辑顺序进行推理, 一套系统严密的学科便建立起来了.

事实上,《几何原本》只是公理化体系的雏形. 按照上面的标准去衡量, 还有一些不完善的地方, 因此称之为古典公理体系, 也叫欧几里得公理体系. 1899 年, 德国数学家希尔伯特(Hilbert, 1862~1943)在他的《几何基础》一书中, 首次用公理化的方法提出了一个完善的几何学公理系统, 称之为希尔伯特公理体系. 从此, 产生了现代公理化方法, 它具有以下三个特点.

第一, 相容性, 即各公理必须是互不矛盾的, 同存在于一个体系之中.

第二, 独立性, 即每条公理都是各自独立的, 此公理不能由它公理推出.

第三, 完备性, 即体系中所包含的公理应足以推出本学科的任何命题.

20 世纪以来, 公理化思想方法对近代数学的发展所产生的巨大影响已成为举世公认的事实, 如现代代数学、现代概率论等数学分支都是用公理化方法建立起来的. 同时, 它早已超越数学的理论范围, 进入其他自然科学领域. 如 20 世纪 40 年代波兰数学家巴拿赫(Banach, 1892~1945)完成了理论力学的公理化, 物理学家爱因斯坦也将相对论表述为公理体系.

公理化思想的现代发展是系统地建立“结构思想”, 也就是说, 结构思想把公理化思想推向了一个更高的层次. 所谓结构思想, 从现代系统方法论的观点来看, 是把整个数学作为一个大系统, 而将每一门学科或每一个数学分支作为这个系统的一个子系统, 从而将这个大系统按结构的特征分成若干子系统. 在此基础上, 不仅要进一步探讨各个子系统的结构特征, 而且还要探讨子系统结构之间的内在联系及本质差异.

需要说明的是, 现行初中数学教材并不是按纯粹的公理体系编排的, 可以认为是“简化”了的公理体系.《课标》中所涉及的公理, 均没有冠以“公理”这个名词, 而是称之为“基本事实”. 还有一些是本来意义上的定理, 教材中也称之为“基本事实”, 这主要是依据《课