21世纪高等学校数学系列教材

（第二版）

泛函分析

侯友良　王茂发　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

21世纪高等学校数学系列教材

（第二版）

泛函分析

■ 侯友良　王茂发　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/侯友良,王茂发编著．—2 版．—武汉:武汉大学出版社,2016.7
21 世纪高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-18075-8

Ⅰ.泛…　Ⅱ.①侯…　②王…　Ⅲ.泛函分析—高等学校—教材
Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 135855 号

责任编辑:胡　艳　　　责任校对:汪欣怡　　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
　　　(电子邮件:cbs22@ whu. edu. cn 网址:www. wdp. com. cn)
印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:13　字数:318 千字　插页:1
版次:2011 年 1 月第 1 版　　2016 年 7 月第 2 版
　　2016 年 7 月第 2 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-18075-8　　定价:28.00 元

前　言

泛函分析是现代数学的一个较新的重要分支．泛函分析综合应用分析的、代数的和几何的观点和方法，研究无限维空间和这些空间上的线性算子．这些空间通常是由满足某些条件的函数或数列构成，并且在其上赋予了具有内在联系的代数和拓扑结构．例如，区间 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 和 p 次方可积函数空间 $L^p[a,b]$ 就是这样的空间．类似这样的空间在数学的各个分支会经常遇到．泛函分析的一部分内容是空间的一般理论，包括空间的基本性质、空间的结构与分类等．泛函分析的主要内容是线性算子的理论，例如线性算子的有界性、线性算子的谱论等．

泛函分析的一个特点是高度的概括性．在泛函分析中，将一些具有共性的空间抽象为一类空间，研究这类空间以及这类空间上的线性算子的一般性质．例如，在机械求积公式的收敛性和 Fourier 级数的发散性等问题中，都牵涉到一个本质上相同的问题，就是算子序列的一致有界性．关于这类问题在泛函分析中有一个重要定理，就是一致有界原理(即共鸣定理)．这个定理是在抽象 Banach 空间上关于算子族一致有界性的一般结论．由于泛函分析的高度概括性，使其具有另一个特点就是应用的广泛性．在一般空间上的研究结论，可以应用到各个具体空间的情形．本书给出了泛函分析应用的一些例子．但由于篇幅的限制，在这方面不可能充分展开．泛函分析的概念与方法已经渗透到数学的各个分支，如微分方程、积分方程、概率论、抽象调和分析、计算数学等，并且在物理学和许多工程技术中得到广泛应用．

泛函分析的理论是在无限维空间上展开的．无限维空间与有限维空间特别是欧氏空间在有些方面是类似的，因此泛函分析的有些概念来源于与欧氏空间相关概念的类比．在学习泛函分析的时候，注意与欧氏空间的情形进行比较和对照，当然有利于对泛函分析内容的理解．但更重要的是无限维空间与有限维空间有本质的不同，前者远比后者更复杂多样，因而无限维空间上的分析理论远比有限维空间上的更复杂，更丰富．正因为此，使得泛函分析成为与经典分析不同的独立分支．

如上所述，泛函分析的概念与方法已经渗透到数学的各个分支，因此掌握泛函分析的基础知识，对于数学各专业的学生而言是十分必要的．作为本科生的教材，本书介绍泛函分析的基础理论．在内容结构安排和文字表述上尽力做到简洁清晰，增强可读性．注意引导性的论述，以帮助读者对概念和定理的理解．本书的末尾对部分习题给出了提示或解答要点，供读者参考．本书的第 5 章介绍了拓扑线性空间的基础知识，这部分内容超出了本科生教材的要求，仅供有需要的读者参考．

本书在编写过程中，参考了国内外一部分同类教材．在此，对这些文献的作者表示感谢．

作　者

2016 年 4 月

目　录

第 1 章　距离空间与赋范空间

在数学分析和实变函数论中我们熟知的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 具有丰富的结构. 一方面，在 $\mathbf{R}^n$ 上定义了任意两点之间的距离. 由此导出 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑结构，可以在 $\mathbf{R}^n$ 上讨论极限与连续等. 另一方面，$\mathbf{R}^n$ 具有代数结构. $\mathbf{R}^n$ 是一个线性空间，并且对其中的每一个向量赋予了一个范数(模). 泛函分析中研究的距离空间和赋范线性空间，通常是由一些满足某些条件的函数或数列构成，这些空间分别在上面提到的两个方面类似于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

本章将对距离空间和赋范线性空间进行一般讨论，介绍一些常用的空间，并且讨论这些空间的基本性质.

1.1　距离空间的基本概念

1.1.1　距离空间的定义与例

全书用 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示实数域和复数域. 实数域和复数域统称为标量域，用 $\mathbf{K}$ 表示，即符号 $\mathbf{K}$ 可能表示 $\mathbf{R}$，也可能表示 $\mathbf{C}$.

在数学分析和实变函数课程中，我们已经熟知，对 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，可以定义 x 与 y 的距离：

$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.1}$$

这样定义的 $\mathbf{R}^n$ 上的距离具有以下性质：

(1) 正定性：$d(x,y) \geqslant 0$，并且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(2) 对称性：$d(x,y) = d(y,x)$；

(3) 三角不等式：$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

如果考查 $\mathbf{R}^n$ 中关于邻域、开集、闭集、极限和函数的连续性等概念，就会发现这些概念只依赖于 $\mathbf{R}^n$ 上的距离，一些相关结论的证明只用到了距离的上述性质(1)~(3). 这个事实启发我们，若在一个给定的集 X 上，以某种方式定义了满足上述性质(1)~(3) 的距离，则可以与在 $\mathbf{R}^n$ 上一样建立类似的理论. 另一方面，在数学的一些领域中也常常需要用到这方面的理论. 正是由于这种理论和应用上的需要，就产生了距离空间的理论.

定义 1.1.1　设 X 是一非空集. 若对任意 $x, y \in X$，都对应有一个实数 $d(x,y)$，称之为 x 与 y 的距离，满足：

(1) 正定性：$d(x,y) \geqslant 0$，并且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(2) 对称性：$d(x,y) = d(y,x)$；

(3) 三角不等式：$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,
则称函数 d 是 X 上的距离，称 X 为距离空间(或度量空间)，记为(X,d).

在不会引起混淆的情况下，(X,d) 可以简写为 X.

例 1 欧氏空间 $\mathbf{K}^n$. 上面已提到欧氏空间 $\mathbf{R}^n$. 这里将 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 一并考虑. 设

$$\mathbf{K}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{K}\}.$$

对任意 $x,y\in\mathbf{K}^n$，按照式(1.1.1) 定义 $d(x,y)$，则 d 满足定义 1.1.1 的条件，因而 d 是 $\mathbf{K}^n$ 上的距离，$\mathbf{K}^n$ 按照这个距离成为距离空间. 当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，相应的 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 分别称为实 n 维欧氏空间和复 n 维欧氏空间. 对任意 $x,y\in\mathbf{K}^n$，若令

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\quad d_2(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|,$$

则容易验证 d_1 和 d_2 也是 $\mathbf{K}^n$ 上的距离. 注意$(\mathbf{K}^n,d)$，$(\mathbf{K}^n,d_1)$ 和$(\mathbf{K}^n,d_2)$ 这三个空间上的距离是不同的，因此它们是不同的距离空间. 由式(1.1.1) 定义的距离称为 $\mathbf{K}^n$ 上的欧氏距离. 今后若无特别申明，将 $\mathbf{K}^n$ 视为距离空间时，其距离总是指欧氏距离.

设 E 是 $\mathbf{K}^n$ 的非空子集，则 $\mathbf{K}^n$ 上的距离也是 E 上的距离，因此 E 按照这个距离也成为距离空间. 称之为 $\mathbf{K}^n$ 的子空间. 例如，区间$[a,b]$，$[0,\infty)$ 都是 $\mathbf{R}^1$ 的子空间.

一般地，设 E 是距离空间(X,d) 的非空子集，则 d 也是 E 上的距离，因此 E 按照距离 d 成为距离空间，称(E,d) 为(X,d) 的子空间.

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$. 设 $C[a,b]$ 是区间$[a,b]$ 上的(实值或复值) 连续函数的全体. 对任意 $x=x(t)$，$y=y(t)\in C[a,b]$，令

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

容易验证 d 是 $C[a,b]$ 上的距离，按照这个距离 $C[a,b]$ 成为距离空间.

例 3 数列空间 s. 设 s 是(实或复) 数列 $x=(x_i)$ 的全体. 对任意 $x=(x_i)$，$y=(y_i)\in s$，令

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}.$$

显然，d 满足距离定义 1.1.1 中的(1) 和(2). 由于函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{1+t}(t\geqslant 0)$ 是单调增加的，因此对于任意 $a,b\in\mathbf{K}$，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \tag{1.1.2}$$

对任意 $x,y,z\in s$，利用式(1.1.2) 得到

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)\\&=d(x,z)+d(z,y).\end{aligned}$$

即 d 满足三角不等式. 因此 d 是 s 上的距离，按照这个距离 s 成为距离空间.

对于像 s 这样的空间，每一个元 $x=(x_i)$ 都是一个数列. 与欧氏空间 $\mathbf{K}^n$ 中的元 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对照，称 x_i 为 x 的第 i 个坐标.

例 4　可测函数空间 $M(E)$. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集，$m(E)<\infty$，$M(E)$ 是 E 上(实值或复值) 可测函数的全体. 将 $M(E)$ 中两个几乎处处相等的函数视为同一元. 对任意 $x=x(t)$，$y=y(t)\in M(E)$，令

$$d(x,y)=\int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t.$$

显然，$d(x,y)\geqslant 0$. 由积分的性质知道 $d(x,y)=0$ 当且仅当在 E 上 $x(t)=y(t)$ a. e. 按照 $M(E)$ 中两个元相等的规定，这表明 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$. 显然 d 满足对称性. 利用不等式(1.1.2) 容易证明 d 满足三角不等式. 因此 d 是 $M(E)$ 上的距离，按这个距离 $M(E)$ 成为距离空间.

例 5　离散距离空间. 设 X 是任一非空集. 对于 $x,y\in X$，令

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

则 d 是 X 上的距离. 称 (X,d) 为离散距离空间.

例 5 表明对于任一非空集 X，总可以在 X 上定义某种距离，使之成为距离空间. 而例 1 表明我们还可以用不同的方式在 X 上定义距离. 但随意定义的距离不见得有什么实际意义. 在泛函分析中常用的空间一般是由满足某些条件的函数或数列构成的. 在这些空间上定义的距离常常是为了描述和研究序列的某种收敛性. 本节后面的例 6 和例 7 就是这方面的例子.

在 1.2 节中将要讨论的赋范空间也是一种距离空间，那里我们将会看到更多的例子.

设 X 是一距离空间. 利用 X 上的距离可以定义集与集的距离. 设 A,B 是 X 的非空子集. 定义 A 与 B 的距离为

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}.$$

特别地，若 $x\in X$，则称 $d(x,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$ 为 x 与 A 的距离.

设 A 是距离空间 X 的非空子集. 若存在 $x_0\in X$ 和 $M>0$，使得对任意 $x\in A$ 有 $d(x,x_0)\leqslant M$，则称 A 是有界集.

1.1.2　序列的极限

若 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的一列元，则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列(或点列). 在距离空间中，由于定义了元与元之间的距离，因此可以像在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上一样，定义序列的极限.

定义 1.1.2　设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的序列，$x\in X$. 若

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0,$$

则称 $\{x_n\}$(按距离) 收敛于 x，称 x 为 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，或 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.

例 6　$C[a,b]$ 中的序列 $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x 等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收

敛于函数 $x(t)$.

证明 由 $C[a,b]$ 中距离的定义,

$$d(x_n,x)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|.$$

因此 $d(x_n,x)\to 0$ 当且仅当 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|\to 0$. 这相当于 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $x(t)$. ■

例 7 在可测函数空间 $M(E)$ 中, 序列 $\{x_n\}$ 按距离收敛于 x 等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 依测度收敛于函数 $x(t)$.

证明 设 $\{x_n(t)\}$ 依测度收敛于 $x(t)$, 则 $\dfrac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}$ 依测度收敛于 0. 利用有界收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}t=0.$$

反过来, 设 $d(x_n,x)\to 0$. 对任给的 $\varepsilon>0$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}mE(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)&=\int_{E(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_{E(|x_n-x|\geqslant\varepsilon)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}t\\&\leqslant d(x_n,x)\to 0.\end{aligned}$$

因此 $x_n(t)$ 依测度收敛于 $x(t)$. ■

容易证明, 在数列空间 s 中按距离收敛等价于按坐标收敛. 这就是说, 如果

$$x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots),\ x=(x_1,x_2,\cdots),$$

则 $d(x^{(n)},x)\to 0$ 的充要条件是对每个 $i=1,2,\cdots$, 有 $x_i^{(n)}\to x_i(n\to\infty)$. 这个结果的证明留作习题.

例 6 和例 7 表明, 不同空间中的序列在不同意义下的收敛, 通过定义适当的距离, 可以归结为距离空间中序列的按距离收敛. 这样, 对一般距离空间中关于序列收敛的讨论, 所得结果可以应用到各个具体的距离空间. 这是泛函分析的高度概括性带来的应用的广泛性的一个例子.

定理 1.1.1 在距离空间中, 有:

(1) 收敛序列的极限是唯一的;

(2) 收敛序列是有界的;

(3) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 的任一子列也收敛于同一极限.

证明 (1) 若 $x_n\to x,x_n\to y$, 则

$$0\leqslant d(x,y)\leqslant d(x_n,x)+d(x_n,y)\to 0(n\to\infty).$$

故 $d(x,y)=0$, 从而 $x=y$. 结论(2) 和(3) 的证明留给读者. ■

定理 1.1.2 距离函数 $d(x,y)$ 是两个变元的连续函数. 即当 $x_n\to x,y_n\to y$ 时, $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.

证明 对任意 $x,y,z\in X$, 由三角不等式得到

$$d(x,y)-d(z,y)\leqslant d(x,z).$$

同样

$$d(z,y)-d(x,y)\leqslant d(z,x)=d(x,z).$$

因此 $|d(x,y)-d(z,y)|\leqslant d(x,z)$. 于是当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}|d(x_n,y_n)-d(x,y)| &\leqslant |d(x_n,y_n)-d(x,y_n)|+|d(x,y_n)-d(x,y)|\\ &\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y)\to 0.\end{aligned}$$

从而 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$. ■

本节引入了距离空间，并且定义了距离空间中序列的极限. 在本章以后各节，将结合一些经典空间的例子，继续关于距离空间的讨论.

1.2　赋范空间的基本概念

我们熟知的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 不仅具有距离结构，而且具有代数结构. $\mathbf{R}^n$ 是一个线性空间，并且赋予了每个向量一个范数(即向量的模). 本节将引入赋范空间. 赋范空间是对其中每个向量赋予了范数的线性空间，而且由范数导出的拓扑结构与代数结构具有自然的联系. 与距离空间相比较，赋范空间在结构上更接近于 $\mathbf{R}^n$.

1.2.1　线性空间

先回顾一下线性代数中关于线性空间的定义及相关概念.

定义 1.2.1　设 X 是一非空集，$\mathbf{K}$ 是标量域. 若

(1) 在 X 上定义了加法运算，即对任意 $x,y\in X$，对应 X 中一个元，记为 $x+y$，称为 x 与 y 的和，满足：

① $x+y=y+x$;

② $(x+y)+z=x+(y+z)$;

③ 在 X 中存在唯一的元 0(称之为零元)，使得对任意 $x\in X$，成立有 $x+0=x$;

④ 对任意 $x\in X$，存在唯一的 $x'\in X$，使得 $x+x'=0$. 称 x' 为 x 的负元，记为 $-x$;

(2) 在 X 上定义了数乘运算，即对任意 $x\in X$ 和 $\alpha\in\mathbf{K}$，对应 X 中一个元，记为 αx，称为 α 与 x 的数积，满足(设 $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$，$x,y\in X$)：

⑤ $1x=x$;

⑥ $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

⑦ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

⑧ $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

则称 X 为线性空间(或向量空间)，X 中的元称为向量.

当标量域 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 时，分别称 X 为实线性空间和复线性空间.

设 E 是 X 的子集. 若 E 对 X 上的加法和数乘运算封闭，即对任意 $x,y\in E$ 和 $\alpha\in\mathbf{K}$，都有 $x+y\in E$，$\alpha x\in E$，则 E 本身也是一个线性空间，称为 X 的线性子空间.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 中的一组向量. 若存在不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{K}$，使得

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,$$

则称向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性相关的. 若向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不是线性相关的，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性无关的.

若 X 中的线性无关向量组的向量的个数最多为 n，则称 X 为 n 维的，记为 $\dim X = n$. 若 X 中的线性无关向量组中的向量的个数可以任意大，则称 X 为无限维的，记为 $\dim X = \infty$.

设 X 为 n 维线性空间. 若 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 X 中的一个线性无关向量组，则对任意 $x \in X$，x 可以唯一地表示为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的线性组合，即

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{K}$. 称 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 X 的一组基，称 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为 x 关于基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的坐标.

例如，在欧氏空间 $\mathbf{K}^n$ 上定义加法和数乘运算如下：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n) \quad (\alpha \in \mathbf{K}),$$

则 $\mathbf{K}^n$ 成为 n 维线性空间. 特别地，分别称 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 为实 n 维欧氏空间和复 n 维欧氏空间. 向量组

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n &= (0, \cdots, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

是 $\mathbf{K}^n$ 的一组基，称为 $\mathbf{K}^n$ 的标准基.

设 X, Y 是线性空间，其标量域为 $\mathbf{K}$，T 是 X 到 Y 的映射. 若对任意 $x_1, x_2 \in X$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$，有

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2,$$

则称 T 为线性算子.

设 E 是线性空间 X 的非空子集. 令 $\mathrm{span}(E)$ 是 E 中的元有限线性组合的全体，即

$$\mathrm{span}(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : x_1, x_2, \cdots, x_n \in E, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{K}, n = 1, 2, \cdots \right\}.$$

容易验证 $\mathrm{span}(E)$ 是包含 E 的最小线性子空间，称之为由 E 张成的线性子空间.

在泛函分析中经常用到下面两种类型的线性空间.

例 1 数列空间. 设 s 是(实或复)数列的全体. 在 s 上定义加法和数乘如下：

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, \cdots) + (y_1, y_2, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots), \\ &\alpha(x_1, x_2, \cdots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots) \quad (\alpha \in \mathbf{K}). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

容易验证按照这样定义的加法和数乘运算，s 成为一个(实或复)线性空间. 令

$$e_i = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{i}, 0, \cdots), \quad i = 1, 2, \cdots.$$

则对任意 $n \geqslant 1$，e_1，e_2，$\cdots$，e_n 是一个线性无关组．因此 s 是无限维线性空间．

例 2　函数空间．设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为一非空集，X 是定义在 E 上的（实值或复值）函数的全体．对任意 $x, y \in X$ 和 $\alpha \in \mathbf{K}$ 定义

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t)\ (t \in E). \tag{1.2.2}$$

容易验证，按照这样定义的加法和数乘运算，X 成为一个（实或复）线性空间．

泛函分析中常见的线性空间都是上述两类空间的子空间．这些空间上的线性运算分别由式（1.2.1）和式（1.2.2）定义．

设 X 是线性空间，$A, B \subset X$，$\lambda \in \mathbf{K}$．记

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\},$$

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

特别地，若 $x_0 \in X$，记 $x_0 + A = \{x_0 + x : x \in A\}$．称 λA 为 A 的倍集，称 $A + B$ 为 A 与 B 的（线性）和集．

1.2.2　赋范空间的定义与例

定义 1.2.2　设 X 是一线性空间，其标量域为 $\mathbf{K}$．若对任意 $x \in X$，都对应有一个实数 $\|x\|$，称之为 x 的范数，满足：

（1）正定性：$\|x\| \geqslant 0$，并且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$；

（2）绝对齐性：$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|\ (x \in X,\ \alpha \in \mathbf{K})$；

（3）三角不等式：$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\ (x, y \in X)$，

则称函数 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数，称 X 为赋范线性空间（简称为赋范空间），记为 $(X, \|\cdot\|)$．

在不会引起混淆的情况下，$(X, \|\cdot\|)$ 可以简记为 X．

关于范数还成立有不等式：

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|\ (x, y \in X). \tag{1.2.3}$$

事实上，由范数的三角不等式得到

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

由以上两式得到

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|, \quad \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

因此式（1.2.3）成立．

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间．对于 $x, y \in X$，令

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

容易验证 d 是 X 上的距离，称为由范数导出的距离．今后总是将赋范空间按照这个距离视为距离空间．

由于赋范空间也是距离空间，因此关于距离空间成立的结论，在赋范空间中也成立．但赋范空间比距离空间具有更丰富的结构，因此赋范空间的理论更丰富、更细致．

设$\{x_n\}$是赋范空间X中的序列，$x\in X$. 若当$n\to\infty$时，$\|x_n-x\|\to 0$，则称$\{x_n\}$(按范数）收敛于x，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$或$x_n\to x(n\to\infty)$. 显然，按范数收敛与按由范数导出的距离收敛是一样的.

并非每个线性空间上的距离都可以由一个范数导出. 实际上容易证明，线性空间X上的距离d可以由X上的一个范数导出的充要条件是d满足：

(1) $d(\alpha x,0)=|\alpha|d(x,0)$ $(x\in X,\ \alpha\in\mathbf{K})$；

(2) $d(x+z,y+z)=d(x,y)$ $(x,y,z\in X)$.

例如1.1节例3中s上的距离不满足上述条件(1)，因此该距离不能由s上的范数导出.

定理 1.2.1 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范空间，则：

(1) 范数$\|\cdot\|$是X上的连续函数. 即当$x_n\to x$时，$\|x_n\|\to\|x\|$；

(2) X上的加法和数乘运算是连续的. 即对X中的任意序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$和标量序列$\{\alpha_n\}$，若$x_n\to x, y_n\to y, \alpha_n\to\alpha$，则

$$x_n+y_n\to x+y,\quad \alpha_n x_n\to\alpha x.$$

证明 (1) 设$x_n\to x$，则$\|x_n-x\|\to 0$. 由式(1.2.3)得到，当$n\to\infty$时，

$$\big|\|x_n\|-\|x\|\big|\leqslant\|x_n-x\|\to 0.$$

因此$\|x_n\|\to\|x\|$.

(2) 设$x_n\to x, y_n\to y$. 则当$n\to\infty$时，

$$\|x_n+y_n-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0.$$

因此$x_n+y_n\to x+y$. 设$\alpha_n\to\alpha$，则存在$M>0$使得$|\alpha_n|\leqslant M(n\geqslant 1)$. 于是当$n\to\infty$时，

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\|&\leqslant\|\alpha_n x_n-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha x\|\\&=|\alpha_n|\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\|x\|\\&\leqslant M\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\|x\|\to 0.\end{aligned}$$

因此$\alpha_n x_n\to\alpha x$. ■

例 3 欧氏空间$\mathbf{K}^n$. 对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{K}^n$，定义

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则$\|\cdot\|$是$\mathbf{K}^n$上的范数. 按照这个范数$\mathbf{K}^n$成为赋范空间. 由这个范数导出的距离就是$\mathbf{K}^n$上的欧氏距离. 此外，若令

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\quad \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,$$

则容易验证$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_\infty$也是$\mathbf{K}^n$上的范数. 注意$\mathbf{K}^n$按照不同的范数所成的赋范空间是不同的赋范空间.

例 4 空间$C[a,b]$. 设$C[a,b]$是1.1节例2中的连续函数空间. 按照函数的加法和数乘运算，$C[a,b]$成为线性空间. 对于$x=x(t)\in C[a,b]$，定义

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

则$\|\cdot\|$是$C[a,b]$上的范数. 按照这个范数$C[a,b]$成为赋范空间. 由这个范数导出的距离就是 1.1 节例 2 中定义的距离.

例 5　空间 c 和 c_0. 设 c 是收敛的(实或复) 数列的全体. 按照数列的加法和数乘运算, c 成为线性空间. 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in c$, 令

$$\|x\| = \sup_{i\geqslant 1}|x_i|,$$

则$\|\cdot\|$是 c 上的范数. 设 c_0 是收敛于 0 的(实或复) 数列的全体, 显然$\|\cdot\|$也是 c_0 上的范数.

一般来说, 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范空间, E 是 X 的线性子空间. 则 E 按照范数$\|\cdot\|$也是一个赋范空间. 称 E 为 X 的(线性) 子空间. 以后若无特别申明, 赋范空间的子空间总是指线性子空间.

例如, 上述例 5 中的 c_0 是 c 的子空间.

例 6　可积函数空间 $L[a,b]$. 设 $L[a,b]$ 是区间$[a,b]$上的 Lebesgue 可积函数的全体. 按照函数的加法和数乘运算, $L[a,b]$成为线性空间. 将$L[a,b]$中的两个几乎处处相等的函数不加区别地视为同一元. 对每个 $f\in L[a,b]$, 令

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x,$$

则$\|\cdot\|_1$是 $L[a,b]$ 上的范数. 在 1.3 节中我们将讨论更一般的情形, p 次方可积函数空间 $L^p[a,b]$.

例 7　空间 $V[a,b]$ 和 $V_0[a,b]$. 设 f 是定义在区间$[a,b]$上的(实值或复值) 函数. 若存在 $M>0$, 使得对于$[a,b]$的任一分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 总有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant M,$$

则称 f 是$[a,b]$上的有界变差函数. 区间$[a,b]$上的有界变差函数的全体记为$V[a,b]$. 设 $f\in V[a,b]$, 令

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

其中上确界是对$[a,b]$的所有分割 π 取的. 称 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ 为 f 在$[a,b]$上的全变差. 设 $f,g\in V[a,b]$. 对于区间$[a,b]$的任一分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)+g(x_i)-f(x_{i-1})-g(x_{i-1})|\\&\quad\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\\&\quad\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g).\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

因此 $f+g\in V[a,b]$. 这说明 $V[a,b]$ 对加法运算封闭. 显然, $V[a,b]$ 对数乘运算也是封闭的. 因此 $V[a,b]$ 按函数的加法和数乘运算成为线性空间. 在 $V[a,b]$ 上定义

$$\|f\| = |f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\quad(f\in V[a,b]).\tag{1.2.5}$$

我们验证$\|\cdot\|$是 $V[a,b]$ 上的范数.

(1) 显然,$\|f\|\geqslant 0$,并且当 $f=0$ 时,$\|f\|=0$. 反过来,若$\|f\|=0$,则 $|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=0$. 因此 f 在$[a,b]$ 上必为常数并且 $f(a)=0$. 从而 $f(x)=0(x\in[a,b])$. 因此 $f=0$.

(2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\|$是显然的.

(3) 设 $f,g\in V[a,b]$. 在式(1.2.4) 中对所有分割 π 取上确界,得到

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

由此得到$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

因此由式(1.2.5) 定义的函数$\|\cdot\|$是 $V[a,b]$ 上的范数. 特别地,令

$$V_0[a,b]=\{f\in V[a,b]:f(a)=0,\ f\text{ 在}(a,b)\text{ 上右连续}\},$$

则 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的线性子空间. 空间 $V_0[a,b]$ 在 2.6 节中有重要应用.

例 8* 空间 $C^{(k)}(\Omega)$. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集,具有连通的内部,k 是非负整数,$C^{(k)}(\Omega)$ 是在Ω上具有直到k 阶连续偏导数的n 元函数的全体. 则$C^{(k)}(\Omega)$是线性空间. 由非负整数构成的有序 n 元数组 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 称为 n 重指标. 对于一个 n 重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,记$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$,

$$D^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

补充规定 $D^0f=f$. 对于 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^{(k)}(\Omega)$,令

$$\|f\|=\max_{|\alpha|\leqslant k}\max_{x\in\Omega}|D^\alpha f(x)|,$$

则可以验证$\|\cdot\|$是 $C^{(k)}(\Omega)$ 上的范数. $C^{(k)}(\Omega)$ 按照这个范数成为赋范空间.

1.3 L^p 空间

1.3.1 空间 $L^p(1\leqslant p<\infty)$

在分析中最常用的一类赋范空间是L^p 空间. 设E是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集,$1\leqslant p<\infty$. 若 f 是E上的(实值或复值) 可测函数,并且$|f|^p$在E 上是可积的,则称 f 在E 上是 p 次方可积的. E 上的 p 次方可积函数的全体记为$L^p(E)$.

由于当 $a,b\in\mathbf{K}$ 时,

$$|a+b|^p\leqslant(2\max(|a|,|b|))^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p),\tag{1.3.1}$$

因此,当 $f,g\in L^p(E)$ 时,

$$|f(x)+g(x)|^p\leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p)\ (x\in E).$$

从而 $f+g\in L^p(E)$. 又显然当 $\alpha\in\mathbf{K}$ 时,$\alpha f\in L^p(E)$. 因此 $L^p(E)$ 按照函数的加法和数乘运算成为线性空间. 我们规定,将 $L^p(E)$ 中的两个几乎处处相等的函数不加区别地视为同一元. 特别地,若 $f=0$ a. e. 于E,则将 f 与$L^p(E)$ 的零向量即恒等于零的函数视为同一向量.

对每个 $f\in L^p(E)$，令

$$\|f\|_p=\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3.2}$$

称$\|f\|_p$为 f 的 p 范数. 下面证明$\|\cdot\|_p$确实是$L^p(E)$上的范数. 为此先证明两个重要的不等式.

引理 1.3.1(Hölder 不等式) 设 $1<p$, $q<\infty$ 并且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 若$f\in L^p(E)$, $g\in L^q(E)$，则 $fg\in L^1(E)$，并且

$$\int_E|fg|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3.3}$$

用 p 范数的记号表示就是$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

证明 先证明对任意实数 a, $b\geqslant 0$，有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.3.4}$$

只需考虑 $a,b>0$ 的情形. 令 $\varphi(x)=\ln x(x>0)$. 由于 $\varphi''(x)<0$，因此 $\varphi(x)$ 是$(0,\infty)$上的上凸函数. 于是当 $0<\lambda<1$ 时，对任意 $x,y\in(0,\infty)$，有

$$\lambda\ln x+(1-\lambda)\ln y\leqslant\ln(\lambda x+(1-\lambda)y).$$

上式的左端是 $\ln x^\lambda y^{1-\lambda}$，从而 $x^\lambda y^{1-\lambda}\leqslant\lambda x+(1-\lambda)y$. 令 $\lambda=\dfrac{1}{p}$，则 $1-\lambda=\dfrac{1}{q}$. 再令 $x=a^p$, $y=b^q$，即得式(1.3.4).

现在证明式(1.3.3).

若$\|f\|_p=0$或$\|g\|_q=0$，则 $f=0$ a.e.或 $g=0$ a.e.，此时式(1.3.3)显然成立. 现在设$\|f\|_p>0$, $\|g\|_q>0$. 对任意 $x\in E$，对 $a=\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ 和$b=\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$利用式(1.3.4)得到

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\leqslant\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}\quad(x\in E).$$

两边分别积分得到

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_E|fg|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p\|f\|_p^p}\int_E|f|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{q\|g\|_q^q}\int_E|g|^q\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由此得到$\int_E|fg|\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$. 此即式(1.3.3). ■

当 $p=q=2$ 时，Hölder 不等式变为Cauchy 不等式，即

$$\int_E|fg|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E|g|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 1.3.2(Minkowski 不等式) 设 $1\leqslant p<\infty$, $f,g\in L^p(E)$. 则

$$\left(\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3.5}$$

用 p 范数的记号表示就是$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$.