

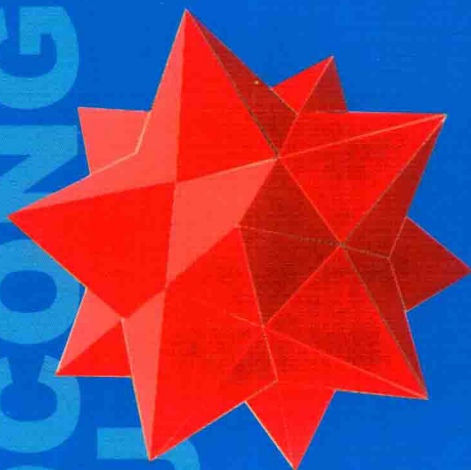
● 数学奥林匹克小丛书

初中卷

2

Shuxue Aolimpike

XIAOCONG
SHU



因式分解
技巧

单樽 著

华东师范大学出版社

Shuxue

Xiao

Congshu

Shuxue

o l i n p i k e

数学奥林匹克小丛书

初中卷

2

因式分解技巧

linpike Xiao Cengshu ● 单增 著

华东师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学奥林匹克小丛书·初中卷·因式分解技巧/单增
著. —上海: 华东师范大学出版社, 2005. 2
ISBN 7-5617-4080-8

I. 数... II. 单... III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016378号



数学奥林匹克小丛书·初中卷

因式分解技巧

著 者 单 增
策划组稿 倪 明
责任编辑 程丽明
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购) 电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口

业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893

业务传真 021-62860410 62602316
<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路3663号
邮编 200062

印 刷 者 上海崇明裕安印刷厂
开 本 787×960 16开
印 张 6.25
字 数 96千字
版 次 2005年4月第一版
印 次 2005年4月第一次
印 数 16 000
书 号 ISBN 7-5617-4080-8/G·2320
定 价 9.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系)

本书导读

在中学数学中，因式分解十分重要。一方面，它承上启下，学习它，既可以复习整式的四则运算，又为下一步学习分式打好基础，对等式的恒等变形、方程的求解等等也是不可缺少的；另一方面，因式分解的问题变化万千，方法灵活多样，有助于培养学生的观察能力、运算能力和创造能力。因此，它是初中数学竞赛的重要内容。本书是供读者学习因式分解时参考的，前面8个单元内容不超过初中水平，可供广大同学阅读；后面5个单元稍有提高，可供有兴趣的读者继续钻研。



单 博 1943年11月生. 现任南京师范大学数学系教授, 广州大学教育软件所研究员, 中国科学技术大学兼职教授. 主要研究领域是数论与组合, 发表论文数十篇. 同时, 在数学的普及与数学竞赛方面做了大量工作. 著作有《趣味的图论问题》、《覆盖》、《棋盘上的数学问题》、《组合几何》、《对应》、《数学竞赛史话》、《数学竞赛研究教程》、《国际数学竞赛中的解题方法》等20多种, 主编《奥数教程》、《初等数学名题题典》、《几何不等式在中国》、《华罗庚数学奥林匹克丛书》等, 译著有《几何不等式》、《近代欧氏几何学》等.

数学奥林匹克小丛书

冯志刚

第44届IMO中国队副领队
上海中学特级教师

葛 军

中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任
南京师范大学副教授

冷岗松

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
上海大学教授、博士生导师

李胜宏

第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员
浙江大学教授、博士生导师

李伟固

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
北京大学教授、博士生导师

刘诗雄

中国数学奥林匹克委员会委员
武钢三中校长、特级教师

倪 明

数学奥林匹克小丛书总策划
华东师范大学出版社副总编辑

单 增

第30、31届IMO中国队领队
南京师范大学教授、博士生导师

吴建平

中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席
第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编

熊 斌

第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员
华东师范大学副教授

余红兵

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
苏州大学教授、博士生导师

朱华伟

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练
广州大学软件所常务副所长、研究员



数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J.W.Milnor)、芒福德(D.B.Mumford)、奎伦(D.Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A.Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L.Fejér)、里斯(M.Riesz)、舍贵(G.Szegö)、哈尔(A.Haar)、拉多(T.Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意。这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动。

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版。这套书，规模大、专题细。据我所知，这样的丛书还不多见。这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书。

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队。他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动。华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血。我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好。

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席。



0 什么是因式分解	001
1 提公因式	002
1.1 一次提净	002
1.2 视“多”为一	003
1.3 切勿漏1	004
1.4 注意符号	004
1.5 仔细观察	005
1.6 化“分”为整	005
习题 1	006
2 应用公式	007
2.1 平方差	007
2.2 立方和与立方差	008
2.3 完全平方	008
2.4 完全立方	010
2.5 问一知三	010
2.6 $2^{1984} + 1$ 不是质数	011
习题 2	012
3 分组分解	014
3.1 三步曲	014
3.2 殊途同归	014
3.3 平均分配	015
3.4 瞄准公式	016
3.5 从零开始	017
习题 3	018

4 拆项与添项	020
4.1 拆开中项	020
4.2 皆大欢喜	020
4.3 旧事重提	021
4.4 无中生有	021
4.5 配成平方	022
习题 4	023
5 十字相乘	024
5.1 知己知彼	024
5.2 熟能生巧	026
5.3 再进一步	027
5.4 二次齐次式	028
5.5 系数和为零	029
习题 5	030
6 二元二次式的分解	031
6.1 欲擒故纵	031
6.2 三元齐次	033
6.3 项数不全	034
6.4 能否分解	034
习题 6	036
7 综合运用	037
7.1 善于换元	037
7.2 主次分清	039
7.3 一题两解	040
7.4 展开处理	041
7.5 巧运匠心	042
习题 7	044
8 多项式的一次因式	046
8.1 余数定理	046
8.2 有理根的求法	047

8.3 首1多项式	049
8.4 字母系数	051
习题8	052
9 待定系数法	053
9.1 二次因式	053
9.2 既约的情况	056
习题9	057
10 轮换式与对称式	058
10.1 典型方法	058
10.2 齐次与非齐次	061
10.3 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$	063
10.4 焉用牛刀	064
10.5 整除问题	065
10.6 原来是零	067
10.7 四元多项式	068
习题10	070
11 实数集与复数集内的分解	072
11.1 求根公式	072
11.2 代数基本定理	074
11.3 单位根	075
11.4 攻玉之石	078
习题11	080
12 既约多项式	081
12.1 艾氏判别法	081
12.2 奇与偶	082
12.3 分圆多项式	084
12.4 绝对不可约	086
习题12	087
习题答案	088



在小学里,我们学过整数的因数分解.由乘法,得

$$3 \times 4 = 12.$$

反过来,12 可以分解:

$$12 = 3 \times 4.$$

当然,4 还可以继续分解为 2×2 . 于是得

$$12 = 3 \times 2 \times 2.$$

这时 12 已经分解成质因数的乘积了.

同样地,由整式乘法,得

$$(1+2x)(1-x^2) = 1+2x-x^2-2x^3.$$

反过来, $1+2x-x^2-2x^3$ 可以分解为两个因式 $1+2x$ 与 $1-x^2$ 的乘积,即

$$1+2x-x^2-2x^3 = (1+2x)(1-x^2).$$

$1-x^2$ 还可以继续分解为 $(1+x)(1-x)$. 于是

$$1+2x-x^2-2x^3 = (1+2x)(1+x)(1-x),$$

这里 x 的一次多项式 $1+2x$ 、 $1+x$ 、 $1-x$ 都不能继续分解,它们是不可约多项式,也就是既约多项式.所以, $1+2x-x^2-2x^3$ 已经分解成质因式的乘积了.

把一个整式写成几个整式的乘积,称为因式分解.每一个乘式称为积的因式.

在因式分解中,通常要求各个乘式(因式)都是既约多项式,这样的因式称为质因式.

因式分解的方法,我们将逐一介绍.



学过因式分解的人爱说：“一提、二代、三分组。”

“提”是指“提取公因式”。在因式分解时，首先应当想到的是有没有公因式可提。

几个整式都含有的因式称为它们的公因式。

例如 ma 、 mb 、 $-mc$ 都含有因式 m ， m 就是它们的公因式。

由乘法分配律，我们知道

$$m(a+b-c) = ma + mb - mc,$$

因此

$$ma + mb - mc = m(a+b-c). \quad (1)$$

这表明(1)式左边三项的公因式 m 可以提取出来，作为整式 $ma + mb - mc$ 的因式。 $ma + mb - mc$ 的另一个因式 $a + b - c$ 仍由三项组成，每一项等于 $ma + mb - mc$ 中对应的项除以公因式 m ：

$$a = ma \div m, b = mb \div m, c = mc \div m.$$

1.1 一次提净

例1 分解因式： $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 。

解 $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 由

$$12a^2x^3, 6abx^2y, -15acx^2$$

这三项组成，它们的数系数 12、6、-15 的最大公约数是 3，各项都含有因式 a 和 x^2 ，所以 $3ax^2$ 是上述三项的公因式，可以提取出来作为 $12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2$ 的因式，即有

$$\begin{aligned} & 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2 \\ &= 3ax^2(4ax + 2by - 5c). \end{aligned}$$

在例1中,如果只将因式 $3a$ 或 $3ax$ 提出,那么留下的式子仍有公因式可以提取,这增添了麻烦,不如一次提净为好.因此,应当先检查数系数,然后再一个个字母逐一检查,将各项的公因式提出来,使留下的式子没有公因式可以直接提取.

还需注意原式如果由三项组成,那么提取公因式后留下的式子仍由三项组成.在例1中,这三项分别为 $12a^2x^3$ 、 $6abx^2y$ 、 $-15acx^2$ 除以公因式 $3ax^2$ 所得的商.初学的同学为了防止产生错误,可以采取两点措施:

1. 在提公因式前,先将原式的三项都写成公因式 $3ax^2$ 与另一个式子的积,然后再提取公因式,即

$$\begin{aligned} & 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2 \\ &= 3ax^2 \cdot 4ax + 3ax^2 \cdot 2by + 3ax^2 \cdot (-5c) \\ &= 3ax^2 \cdot (4ax + 2by - 5c). \end{aligned}$$

在熟练之后应当省去中间过程,直接写出结果.

2. 用乘法分配律进行验算.由乘法得出

$$\begin{aligned} & 3ax^2(4ax + 2by - 5c) \\ &= 12a^2x^3 + 6abx^2y - 15acx^2. \end{aligned}$$

1.2 视“多”为一

例2 分解因式: $2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$.

解 原式由

$$2a^2b(x+y)^2(b+c)、-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$$

这两项组成.它们的数系数的最大公约数是2,两项都含有因式 a^2 和 b ,而且都含有因式 $x+y$ 与 $b+c$,因此 $2a^2b(x+y)(b+c)$ 是它们的公因式.于是有

$$\begin{aligned} & 2a^2b(x+y)^2(b+c) - 6a^3b^3(x+y)(b+c)^2 \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c) \cdot (x+y) - 2a^2b(x+y)(b+c) \cdot 3ab^2(b+c) \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c)[(x+y) - 3ab^2(b+c)] \\ &= 2a^2b(x+y)(b+c)(x+y - 3ab^3 - 3ab^2c). \end{aligned}$$

在本例中,我们把多项式 $x+y$ 、 $b+c$ 分别整个看成是一个字母,这种观点在因式分解时是很有用的.

1.3 切勿漏 1

例 3 分解因式： $(2x+y)^3 - (2x+y)^2 + (2x+y)$.

解 我们把多项式 $2x+y$ 看成是一个字母,因此原式由

$$(2x+y)^3, -(2x+y)^2, 2x+y$$

这三项组成, $2x+y$ 是这三项的公因式,于是

$$\begin{aligned} & (2x+y)^3 - (2x+y)^2 + (2x+y) \\ &= (2x+y) \cdot (2x+y)^2 - (2x+y) \cdot (2x+y) + (2x+y) \cdot 1 \\ &= (2x+y)[(2x+y)^2 - (2x+y) + 1]. \end{aligned}$$

请注意,中括号内的式子仍由三项组成,千万不要忽略最后一项 1. 在省去中间过程时,尤需加倍留心.

1.4 注意符号

例 4 分解因式： $-3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y)$.

解

$$\begin{aligned} & -3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \\ &= a(2x+3y) \cdot (-3b) \cdot (2x+3y)^3 + a(2x+3y) \cdot c(2x+3y)^2 + \\ & \quad a(2x+3y) \cdot (-1) \\ &= a(2x+3y)[-3b(2x+3y)^3 + c(2x+3y)^2 - 1]. \end{aligned}$$

注意中括号内的最后一项是 -1 , 千万别漏掉!

本例中,原式的第一项有个因数 -1 , 它也可以作为因数提取出来,即

$$\begin{aligned} & -3ab(2x+3y)^4 + ac(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \\ &= -a(2x+3y) \cdot 3b(2x+3y)^3 - a(2x+3y) \cdot (-c)(2x+3y)^2 - \\ & \quad a(2x+3y) \cdot 1 \\ &= -a(2x+3y)[3b(2x+3y)^3 - c(2x+3y)^2 + 1]. \quad (2) \end{aligned}$$

这样做也是正确的. 但必须注意各项的符号, 提出因数 -1 后各项都应改变符号, 所以(2)式的中括号内三项的符号恰与原式中相应的三项相反.

1.5 仔细观察

例5 分解因式: $(2x-3y)(3x-2y) + (2y-3x)(2x+3y)$.

解 初看起来,原式所含的第一项 $(2x-3y)(3x-2y)$ 与第二项 $(2y-3x)(2x+3y)$ 没有公因式,但进一步观察便会发现

$$2y-3x = -(3x-2y),$$

因此 $3x-2y$ 是两项的公因式. 于是有

$$\begin{aligned} & (2x-3y)(3x-2y) + (2y-3x)(2x+3y) \\ &= (3x-2y)[(2x-3y) - (2x+3y)] \\ &= -6y(3x-2y). \end{aligned}$$

提出公因式后,留下的式子如果可以化简,就应当化简.

1.6 化“分”为整

例6 分解因式: $3a^3b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab$.

解 这里的第三项 $\frac{27}{4}ab$ 的系数是分数,为了避免分数运算,我们把 $\frac{1}{4}$ 先提取出来,这时每项都除以 $\frac{1}{4}$ (也就是乘以 4), 即

$$\begin{aligned} & 3a^3b^2 - 6a^2b^3 + \frac{27}{4}ab \\ &= \frac{1}{4}(12a^3b^2 - 24a^2b^3 + 27ab) \\ &= \frac{3}{4}ab(4a^2b - 8ab^2 + 9). \end{aligned}$$

熟练以后可以将以上两步并作一步,“一次提净”.

在提出一个分数因数(它的分母是各项系数的公分母)后,我们总可以使各项系数都化为整数(这个过程实质上就是通分). 并且,还可以假定第一项系数是正整数,否则可用前面说过的办法,把 -1 作为公因数提出,使第一项系数成为正整数.