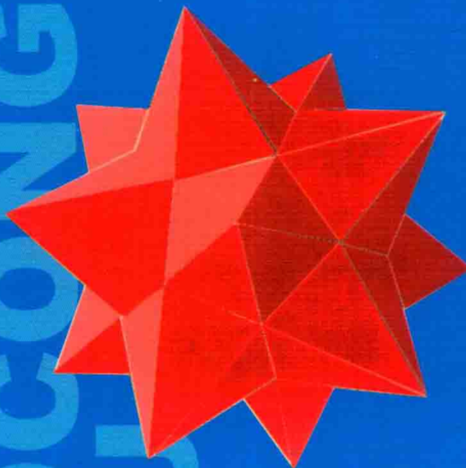
数学奥林匹克小丛书

初中卷 2

Shuxue Aolinpike XIAOCONGSHU



因式分解技巧

单墫 著

华东师范大学出版社

Shuxue Xiao Congshu

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 2

因式分解技巧

Olinpike Xiao Congshu

单墫 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．因式分解技巧/单墫著．—上海：华东师范大学出版社，2005.2
ISBN 7-5617-4080-8

I.数... II.单... III.数学课-初中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016378号

数学奥林匹克小丛书·初中卷

因式分解技巧

著　　者　单　墫
策划组稿　倪　明
责任编辑　程丽明
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　门市(邮购)　电话　021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
　　　　　华东　中南地区　021-62458734
　　　　　华北　东北地区　021-62571961
　　　　　西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062

印 刷 者　上海崇明裕安印刷厂
开　　本　787x960　16开
印　　张　6.25
字　　数　96千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4080-8/G·2320
定　　价　9.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

本书导读

在中学数学中，因式分解十分重要．一方面，它承上启下，学习它，既可以复习整式的四则运算，又为下一步学习分式打好基础，对等式的恒等变形、方程的求解等等也是不可缺少的；另一方面，因式分解的问题变化万千，方法灵活多样，有助于培养学生的观察能力、运算能力和创造能力．因此，它是初中数学竞赛的重要内容．本书是供读者学习因式分解时参考的，前面8个单元内容不超过初中水平，可供广大同学阅读；后面5个单元稍有提高，可供有兴趣的读者继续钻研．

单 墫 1943年11月生．现任南京师范大学数学系教授，广州大学教育软件所研究员，中国科学技术大学兼职教授．主要研究领域是数论与组合，发表论文数十篇．同时，在数学的普及与数学竞赛方面做了大量工作．著作有《趣味的图论问题》、《覆盖》、《棋盘上的数学问题》、《组合几何》、《对应》、《数学竞赛史话》、《数学竞赛研究教程》、《国际数学竞赛中的解题方法》等20多种，主编《奥数教程》、《初等数学名题题典》、《几何不等式在中国》、《华罗庚数学奥林匹克丛书》等，译著有《几何不等式》、《近代欧氏几何学》等．

数学奥林匹克小丛书

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

目 录

0 什么是因式分解

在小学里,我们学过整数的因数分解.由乘法,得

$$3\times 4=12.$$

反过来,12 可以分解:

$$12=3\times 4.$$

当然,4 还可以继续分解为 2×2. 于是得

$$12=3\times 2\times 2.$$

这时 12 已经分解成质因数的乘积了.

同样地,由整式乘法,得

$$(1+2x)(1-x^2)=1+2x-x^2-2x^3.$$

反过来,$1+2x-x^2-2x^3$ 可以分解为两个因式 $1+2x$ 与 $1-x^2$ 的乘积,即

$$1+2x-x^2-2x^3=(1+2x)(1-x^2).$$

$1-x^2$ 还可以继续分解为$(1+x)(1-x)$. 于是

$$1+2x-x^2-2x^3=(1+2x)(1+x)(1-x),$$

这里 x 的一次多项式 $1+2x$、$1+x$、$1-x$ 都不能继续分解,它们是不可约多项式,也就是既约多项式.所以,$1+2x-x^2-2x^3$ 已经分解成质因式的乘积了.

把一个整式写成几个整式的乘积,称为因式分解.每一个乘式称为积的因式.

在因式分解中,通常要求各个乘式(因式)都是既约多项式,这样的因式称为质因式.

因式分解的方法,我们将逐一介绍.

1 提公因式

学过因式分解的人爱说:“一提、二代、三分组.”

“提”是指“提取公因式”.在因式分解时,首先应当想到的是有没有公因式可提.

几个整式都含有的因式称为它们的公因式.

例如 ma、mb、$-mc$ 都含有因式 m,m 就是它们的公因式.

由乘法分配律,我们知道

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc,$$

因此

$$ma+mb-mc=m(a+b-c). \tag{1}$$

这表明(1)式左边三项的公因式 m 可以提取出来,作为整式 $ma+mb-mc$ 的因式.$ma+mb-mc$ 的另一个因式 $a+b-c$ 仍由三项组成,每一项等于 $ma+mb-mc$ 中对应的项除以公因式 m:

$$a=ma\div m,\ b=mb\div m,\ c=mc\div m.$$

1.1 一次提净

例1 分解因式: $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$.

解 $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 由

$$12a^2x^3、6abx^2y、-15acx^2$$

这三项组成,它们的数系数 12、6、-15 的最大公约数是 3,各项都含有因式 a 和 x^2,所以 $3ax^2$ 是上述三项的公因式,可以提取出来作为 $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 的因式,即有

$$\begin{aligned}&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2\\=&3ax^2(4ax+2by-5c).\end{aligned}$$

在例 1 中，如果只将因式 $3a$ 或 $3ax$ 提出，那么留下的式子仍有公因式可以提取，这增添了麻烦，不如一次提净为好. 因此，应当先检查数系数，然后再一个个字母逐一检查，将各项的公因式提出来，使留下的式子没有公因式可以直接提取.

还需注意原式如果由三项组成，那么提取公因式后留下的式子仍由三项组成. 在例 1 中，这三项分别为 $12a^2x^3$、$6abx^2y$、$-15acx^2$ 除以公因式 $3ax^2$ 所得的商. 初学的同学为了防止产生错误，可以采取两点措施：

1. 在提公因式前，先将原式的三项都写成公因式 $3ax^2$ 与另一个式子的积，然后再提取公因式，即

$$\begin{aligned}&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2\\=&3ax^2\cdot 4ax+3ax^2\cdot 2by+3ax^2\cdot(-5c)\\=&3ax^2\cdot(4ax+2by-5c).\end{aligned}$$

在熟练之后应当省去中间过程，直接写出结果.

2. 用乘法分配律进行验算. 由乘法得出

$$\begin{aligned}&3ax^2(4ax+2by-5c)\\=&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2.\end{aligned}$$

1.2 视“多”为一

例 2 分解因式：$2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$.

解 原式由

$$2a^2b(x+y)^2(b+c)、-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$$

这两项组成. 它们的数系数的最大公约数是 2，两项都含有因式 a^2 和 b，而且都含有因式 $x+y$ 与 $b+c$，因此 $2a^2b(x+y)(b+c)$ 是它们的公因式. 于是有

$$\begin{aligned}&2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2\\=&2a^2b(x+y)(b+c)\cdot(x+y)-2a^2b(x+y)(b+c)\cdot 3ab^2(b+c)\\=&2a^2b(x+y)(b+c)[(x+y)-3ab^2(b+c)]\\=&2a^2b(x+y)(b+c)(x+y-3ab^3-3ab^2c).\end{aligned}$$

在本例中，我们把多项式 $x+y$、$b+c$ 分别整个看成是一个字母，这种观点在因式分解时是很有用的.

1.3 切勿漏1

例3 分解因式：$(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)$.

解 我们把多项式 $2x+y$ 看成是一个字母，因此原式由

$$(2x+y)^3、-(2x+y)^2、2x+y$$

这三项组成，$2x+y$ 是这三项的公因式，于是

$$\begin{aligned}&(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)\\=&(2x+y)\cdot(2x+y)^2-(2x+y)\cdot(2x+y)+(2x+y)\cdot 1\\=&(2x+y)[(2x+y)^2-(2x+y)+1].\end{aligned}$$

请注意，中括号内的式子仍由三项组成，千万不要忽略最后一项1.在省去中间过程时，尤需加倍留心.

1.4 注意符号

例4 分解因式：$-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)$.

解
$$\begin{aligned}&-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)\\=&a(2x+3y)\cdot(-3b)\cdot(2x+3y)^3+a(2x+3y)\cdot c(2x+3y)^2+\\&a(2x+3y)\cdot(-1)\\=&a(2x+3y)[-3b(2x+3y)^3+c(2x+3y)^2-1].\end{aligned}$$

注意中括号内的最后一项是-1，千万别漏掉！

本例中，原式的第一项有个因数-1，它也可以作为因数提取出来，即

$$\begin{aligned}&-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)\\=&-a(2x+3y)\cdot 3b(2x+3y)^3-a(2x+3y)\cdot(-c)(2x+3y)^2-\\&a(2x+3y)\cdot 1\\=&-a(2x+3y)[3b(2x+3y)^3-c(2x+3y)^2+1].\qquad(2)\end{aligned}$$

这样做也是正确的.但必须注意各项的符号，提出因数-1后各项都应改变符号，所以(2)式的中括号内三项的符号恰与原式中相应的三项相反.

1.5 仔细观察

例 5 分解因式：$(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)$.

解 初看起来，原式所含的第一项 $(2x-3y)(3x-2y)$ 与第二项 $(2y-3x)(2x+3y)$ 没有公因式，但进一步观察便会发现

$$2y-3x=-(3x-2y),$$

因此 $3x-2y$ 是两项的公因式. 于是有

$$\begin{aligned}&(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)\\=&(3x-2y)[(2x-3y)-(2x+3y)]\\=&-6y(3x-2y).\end{aligned}$$

提出公因式后，留下的式子如果可以化简，就应当化简.

1.6 化“分”为整

例 6 分解因式：$3a^3b^2-6a^2b^3+\frac{27}{4}ab$.

解 这里的第三项 $\frac{27}{4}ab$ 的系数是分数，为了避免分数运算，我们把 $\frac{1}{4}$ 先提取出来，这时每项都除以 $\frac{1}{4}$（也就是乘以 4），即

$$\begin{aligned}&3a^3b^2-6a^2b^3+\frac{27}{4}ab\\=&\frac{1}{4}(12a^3b^2-24a^2b^3+27ab)\\=&\frac{3}{4}ab(4a^2b-8ab^2+9).\end{aligned}$$

熟练以后可以将以上两步并作一步，“一次提净”.

在提出一个分数因数（它的分母是各项系数的公分母）后，我们总可以使各项系数都化为整数（这个过程实质上就是通分）. 并且，还可以假定第一项系数是正整数，否则可用前面说过的方法，把 -1 作为公因数提出，使第一项系数成为正整数.