HONGXUE SHUXUE NENG LI PEI YANG

《中学数学能力培养》编辑组

中学数学能力培养

● 下册

科学普及出版社

中学数学能力培养

下册

《中学数学能力培养》编辑组

科学普及出版社

内 容 提 要

数学教学中能力培养问题是目前国内外学术界、教育界都在积极探讨的问题。本书征集全国十几个省市、自治区的有关文章60余篇，文章作者多系具有丰富经验的数学教师和数学教育研究人员。全书内容紧密联系教材，并按现行中学课本顺序编排。文中既有理论上的分析探索，同时又不脱离教学实践。通过典型习题的分析、讲解，抽象出解题的规律与方法，总结归纳出能力培养的途径。

本书按初、高中不同内容分上、下册出版。可供中学教师，从事成人教育和其他教育工作的同志参考使用，也可作为广大中学生和自学青年的能力"自我培养"的参考书。

中学数学能力培养
下 册

《中学数学能力培养》编辑组
责任编辑：颜 实
技术设计：王予南

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京市密云县印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：16.375 字数：433 千字
1988 年 8 月第 1 版 1988 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—10，000册 定价：4.50元
统一书号：7051·1183 本社书号：1615

ISBN 7-110-00490-2/G·118

目　录

Ⅲ. 高　中　代　数

Ⅳ．立 体 几 何

Ⅴ．解 析 几 何

Ⅵ．高　中　三　角

III. 高中代数

Ⅲ—1．注意发掘集合概念教学中的教育因素

贵阳市教育科学研究所　　杨天明

19世纪70年代，德国数学家G·康托（1845—1918年）在对数学分析的理论基础-实数结构的研究中，创立了集合论。他提出了集合这个概念，运用一一对应关系对各种无穷集合分类。英国数学家G·布尔（1815—1864年）确信逻辑关系与某些数学运算相类似。他研究概念的外延逻辑（即类的逻辑），并通过符号化和类似初等代数的运算法则，确立了类的逻辑运算（如两类的交、并、某类的补等），成为逻辑代数的创始人。关于映射的知识，关于集合的代数运算的知识，就是从这两方面的开创性工作发展起来的。也反映了中学数学中集合知识的两个基本方面。

中学数学中的集合因素表现为集合思想的直观渗透（如画圈、画箭头等）、集合概念的初步介绍以及集合符号、语言的初步运用上。在发挥教材中集合因素的教育作用方面，宜注意下面几点。

一、引导学生理解数学概念及其逻辑联系，培养学生的逻辑思维能力

1．使用集合术语，区别一个集合与这个集合的元素

例如，实际教学中，对“有理数”这个名词学生常有不同理解：一些学生理解为全体有理数；但也有学生认为是指某些或个别有理数。明确提出“有理数集”，就可以避免在理解上的歧

义。谈到其他数集时也有类似情形。又如，区别“不等式的解”与“不等式的解集”的重要性更明显：前者表示不等式的个别解，后者表示不等式的全体解，是定义“解不等式”这个概念的基础。

2．根据概念的内涵正确判断对象

掌握概念的内涵（本质属性），了解概念的外延（对象范围），是人们通常理解概念的最基本要求。学生理解数学概念时，对其内涵与外延常常不协调，不自觉地扩大或缩小外延是常发生的。通过判断元素与集合的关系，或者用列举法表示某些用描述法表示的集合，能帮助学生克服这方面的弱点。举例如：

（1）一个边长为1的正方形，是否下列集合的元素：{四边形}，{多边形}，{平行四边形}，{梯形}。

（2）$x(x+1)$ 是否下列集合的元素：{单项式}，{多项式}，{整式}，{代数式}。

（3）分别用列举法表示下面的集合：{绝对值不大于3的整数}，{48的质因数}，{中国古代四大发明}。

3．理解概念间的逻辑联系

不掌握概念的逻辑联系，只是单个地记忆概念，不可能使学生形成数学的概念体系。具有逻辑联系的数学概念，其外延有五种关系（同一关系，从属关系，交叉关系，对立关系和矛盾关系）。这些关系都可以通过集合直观图与集合关系得到说明，事实上，记两个概念的外延分别是集合A、B，如果$A=B$，那么这两个概念有同一关系；如果$A\subset B$，这两个概念有从属关系，前者是种概念，后者是属概念；如果$A\cap B\neq\phi$，且$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$，那么这两个概念有交叉关系，这时产生新概念，其外延是$A\cap B$；如果$A\cap B=\phi$且$A\cup B=I$，那么，这两个概念是矛盾关系；如果$A\cap B=\phi$但$A\cup B\neq I$，那么，这两个概念便是对立关系。可以通过下面的集合练习，提高理解概念间逻辑联系的能力：

（1）下面的集合中，哪些有真包含关系，哪些是相等的：

{平行四边形}，{矩形}，{梯形}，{只有两条边平行的四边形}，{对角线相等的平行四边形}，{对角线相等的梯形}。

（2）下面的集合中，哪些有真包含关系：

{正比例函数}，{反比例函数}，{一次函数}，{二次函数}，{幂函数}，{三角函数}，{正弦函数}。

（3）若$I=R$（实数集合），试分别写出下列集合的补集合：{绝对值小于1的实数}，{正实数}，{不大于3的实数}，$\{x|1<x<5\}$，{非负实数}，$\{x|x<-1$或者$x\geqslant 1\}$，{自然数}。

（4）分别写出下列各交集：{直角三角形}∩{等腰三角形}，{平行四边形}∩{梯形}，{矩形}∩{菱形}，{4的倍数}∩{6的倍数}，{4的因数}∩{6的因数}。

4．正确理解联结词“并且”、“或者”、“否定”（“非”）及“如果……，那么……”的逻辑意义 正确理解它们代表的逻辑意义是正确建立、理解各种数学命题的必要条件。从理论上讲，集合代数与命题代数是同一代数结构（布尔代数）的两种不同解释，利用集合关系可以对联结命题的逻辑联结词的意义加以说明。事实上，命题是对于对象具有某属性的肯定或否定的思维形式。一个命题p与使它成为真命题的所有对象的集合P是相对应的。如果p、q是两个命题，分别对应于集合P、Q，那么，命题“p并且q”对应于$P\cap Q$；命题“p或者q对应于$P\cup Q$；命题“非p”对应于$\overline{P}$；命题“如果p，那么q”对应于$\overline{P}\cup Q$（当命题真时，有$P\subseteq Q$成立）。下面的例题可作为这方面的练习：

（1）在数轴上，已知$A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|x<2\}$，试用A、B及它们的交、并、补分别表示下面的集合，并在数轴上标出：$\{x|x\leqslant 1\}$，$\{x|x\leqslant 1$并且$x<2\}$，$\{x|x\leqslant 1$或者$x<2\}$，$\{x|x>1$并且$x<2\}$，$\{x|x>1$或者$x<2\}$。

（2）在直角坐标系中，已知点集$A=\{(x,y)|x>0\}$，$B=\{(x,y)|y>0\}$，试用A、B及其交、并、补分别表示

下列点集，并在坐标平面上标出：$\{(x,y)|x>0$或者$y>0\}$，$\{(x,y)|x>0$并且$y>0\}$，$\{(x,y)|x\leqslant 0\}$。

（3）选用"或者"、"并且"填下面的空，使它们成为真命题：

①如果$ab=0$，那么$a=0$，____$b=0$；

②已知a、b是实数，如果$a^2+b^2=0$，那么$a=0$，____$b=0$；

③已知a、b是实数，如果$\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$，那么$a=0$，____$b=0$；

④如果a被2整除，____被3整除，那么a一定被6整除；

⑤如果$\triangle ABC$是斜三角形，那么这个三角形是锐角三角形，____是钝角三角形；

⑥平面上直线a、b的位置关系是平行，____相交，____重合。

（4）将下面集合的包含关系化为"如果……，那么……"的推出关系：

① $\{a|a$是4的倍数$\}\subseteq\{a|a$是2的倍数$\}$；

② $\{x|x<-1\}\subseteq\{x|x<2\}$；

③ $\{1,2\}\subseteq\{x|x^3-3x^2+2x=0\}$；

④ $\{$正方形$\}\subseteq\{$平行四边形$\}$。

二、培养学生抽象概括能力

集合概念是数学最基本的概念。只要是能彼此相区别，能加以确切判断的对象，都能形成一个集合。因此，集合概念具有普遍性和概括性。集合概念提供了一种表现形式，利用它便于把各类对象用统一方法加以概括，进行比较，分析对象的抽象层次及其特点；集合概念提供了一种思维方式，利用它便于用统一的观点研究具有不同属性、不同抽象层次的对象形成的集合，研究它们的逻辑联系，研究具有相同结构的不同集合的元素属性上的类

比，促进学生从知识体系上掌握知识。如

1. 实物集合（某书店书籍的集合，某城市居民的集合等）、数的集合，整数集合等）、一次函数的集合（ $\{f(x) | f(x)=kx+b$，其中 $k\in R$，$b\in R$，但 $k\neq 0\}$ ）、集合 {正比例函数，反比例函数，一次函数，二次函数} 便是反映了构成集合的元素的不同的抽象层次的例子。

2. 学生能熟记数学概念的定义，利用该定义作计算、证命题，却不善于从概念体系上掌握概念。集合所提供的统一的思维形式，能有效地克服学生这一弱点。如要求学生回答：多面体、凸多面体、棱柱、棱锥、棱台、平行六面体各集合有哪些包含关系。

3. 经典的函数概念是从“变量”入手加以定义的，其物理背景的印迹十分明显。直观性强，但局限性较大；尤其初学时，常引起误解。建立在集合与对应基础上的函数概念，是对两个“变量”间的“相依关系”的抽象概括，并且对应法则被突出出来。这样，函数是否可用解析式表示、用什么方式表达、是否连续等都成为无关紧要的了；甚至，定义域与值域也不必是数集。这就为在更广阔的领域里运用函数概念创造了条件。概括性、抽象性，带来了数学应用的广泛性。

4. 一一对应概念不仅是集合理论的一个重要概念，而且这种思想在数学中也极有用处，应注意对学生培养。对于按一定规则建立了一一对应关系的两个集合，它们的各自元素具有种种属性而互相联系着并且形成各自的内部结构；另一方面，这两个集合的各自属性又通过一定方式对应着。于是，按照集合元素的对应关系以及各自属性的对应关系，可以由一个集合的某元素（或某子集）的某个性质，推知在另一个集合的对应元素（或对应子集）的相应性质。这样的两个集合具有相同的结构。掌握了这个思想，不仅可以通过对应、类比启发出新知识，而且也有助于从结构上理解知识体系。中学阶段的一个典型例子是通过建立平面直角坐标系，确立平面上的点与有序实数对（x、y）间一一对

应关系，进而用代数方法研究几何问题。这时，用数量关系刻划图形性质，对代数关系给出几何解释，是十分重要的。其他如函数解析式与图象的对应关系，一元不等式的解集与数轴上点集的对应关系以及集合与集合的元素属性的对应关系等都是渗透一一对应思想的好题材。

三、培养学生理解和运用数学符号的能力

数学符号是符号化了的数学概念。数学的符号体系与成套地使用数学符号，不仅是数学的特点，也是数学的优点。正确理解与熟练运用数学符号的能力是一种数学能力，应认真培养学生的这种能力。学生在学习集合之前，已经接触了许多数学运算符号。不过，那都是关于数的。即使是字母，也是代表数；式的运算最终仍然是数的运算。集合符号则是全新的一套。集合符号可用来表示集合关系与集合运算。中学阶段，按现行教材，主要是围绕表示集合概念、加深对数学概念及其逻辑联系的理解这样两方面进行的，并没有按集合代数运算的要求系统展开，这是训练中应把握住的。为了培养学生理解、运用集合符号的能力，下面的例子可供参考。

1．从符号 $\in$、$\notin$、$\subset$、$\cap$、$\cup$、$=$、$\neq$ 中，选择适合者填下面的空：ϕ____ $\{0\}$，a____ $\{a\}$，$\{a,b,c\}$ ____ $\{b,c\} = \{b,c\}$；$\{a,b,c\}$ ____ $\{b,c\} = \{a,b,c\}$，A____$\overline{A} = I$，A____$\overline{A} = \phi$，$\{3\}$____ $\{1,2\}$，3____ $\{1,2\}$，$\{1,2\}$ ____ $\{5\}$，A____ $\{A\}$，$\{x \mid x=(-1)^n$，n是自然数$\}$ ____ $\{1,-1\}$。

2．若$I=R$（实数集合），$A=\{x \mid x<1\}$，$B=\{x \mid x>-1\}$，试求下列集合，并在数轴上标志出来：$\overline{A}$，$A\cup B$，$A\cap B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$。

3．已知$I=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，试用A、B及其交、并、补表示下列集合：$\{1,$

2，3，4｝，｛1｝，｛5｝，｛4，5｝，｛2，3｝。

4．如图，已知集合 A、B、C，试分别用已知集合及其交、并、补写出下列各图中阴影部分表示的集合。

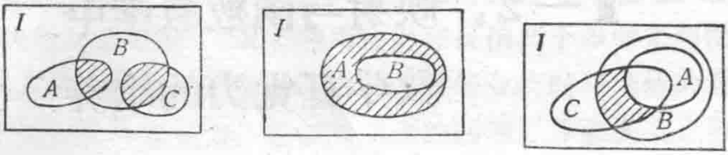

图 Ⅲ-1-1

5．集合符号初步的运用，较多是在立体几何里讨论点、直线、平面位置关系的时候。如用$a\subset\alpha$表示直线 a在平面 α上，用$\alpha\cap\beta=\phi$表示平面α、β平行，用$A\notin\alpha$表示点A不在平面α上等等。这时，直线、平面都是作为空间点集的子集。这种表示法虽然抽象，但在形式上简缩，在意义上准确。

教学大纲指出："把集合、对应思想适当渗透到教材中去，这样，有利于加深理解有关教材，同时也为进一步学习作准备。"综合上述可见，不应只是形式地灌输集合知识，只有充分重视其中的教育因素，把知识传授与前面提到的有关能力的培养结合起来，才能达到教学大纲所规定的要求。

Ⅲ—2. 映射与函数教学中数学直觉力的培养

南京师范大学 刘 云 章

所谓数学直觉，作为一种思维形式来讲，它是人脑对于数学对象的某种直接的领悟或洞察。按现代心理学家们的说法，这是一种不包含普通逻辑推理过程的“发散思维”。直觉，有时又称为顿悟。按哲学家的说法，这是突发性的瞬间的推断，是逻辑程序的高度简缩。数学直觉往往产生于经验、观察、归纳、类比和联想的基础上。例如阿基米德对于“皇冠之谜”，由于看到水溢到盆外，而恍然大悟，想到了解决方法并得出“阿基米德原理。”这就是以数学直觉（还有物理直觉）为基础的，是观察、类比和联想的结果。

生动的数学直觉，有助于人们理解数学，且能导致发明创造。不少著名的定理是数学家受一些简单具体原型的启发而得到的。爱因斯坦论述发明创造时说：“真正可贵的因素是直觉”。数学直觉和逻辑是数学创造的双翼，两者相辅相成，都是数学工作者进行创造的武器。一般教师对于培养学生的逻辑思维能力还是足够重视的（也是应该的），但是，对于培养数学直觉力却重视不够。据国内一些数学专家的分析，这是因为我国数学教学法的研究水平，未能上升到创造性科学研究的高度，忽视了数学直觉在智力开发中的作用。培养创造型人才，就要高度重视数学直觉力的培养。“对中学生不必侈谈什么创造、发明”，这是一种见木不见林的说法。事实上，中学是学生能不能发展成创造型人才

的关键阶段，从这一点来看培养数学直觉力就更为重要。

数学直觉的内容很广，映射关系的直觉是其中之一。人们思考问题时常常凭借这个直觉产生类比、联想，把表面上似乎不相干的对象串联在一起，从而得到新的理论、方法。方法论中的“关系映射反演原则”*就是利用映射和反演两个步骤来解决问题的普遍方法。函数是特殊的映射，怎样结合映射与函数的教学，提高学生的数学直觉力，是值得重视的问题。下面谈几点做法：

一、培养观察能力

观察能导致发现。牛顿从苹果由树上掉下来悟得万有引力定律；瑞利发现惰性气体；伦琴发现X射线等等都与他们超人的观察能力有关。观察能力反映了科学工作者的素养，对中学生不能要求太高，但也要注意培养。

中学课本里很多概念、方法及定理的引入都是从观察图象入手的，这样做符合学生的认识规律，也有利于培养学生的观察能力。

例如，课本中介绍映射概念时，提供了三个对应关系的图象。在引入新课时，可引导学生观察、分析，看看三个对应关系有什么共同点？（对于集合A中任何一个元素，集合B都有一个或几个元素和它对应。）第二、第三个对应关系有什么相同的特点？（对于集合A中任何一个元素，集合B只有一个元素和它对应。）然后，再给出映射的定义。在巩固新课、复习概念时可选择一些观察性习题，让学生对照定义作出回答。例如，课本第21页练习3，第26页习题二第3题。回答这些问题，需要仔细观察各元素间的对应关系，对于培养观察能力是有益的。

再如，关于幂函数、指数函数、对数函数以及三角函数等，课本中都是先研究函数的图象，引导学生观察图象的特征，然后再给出函数的性质。教者要吃透教材精神，有意识地培养学生的

* 徐利治著《数学方法论选讲》