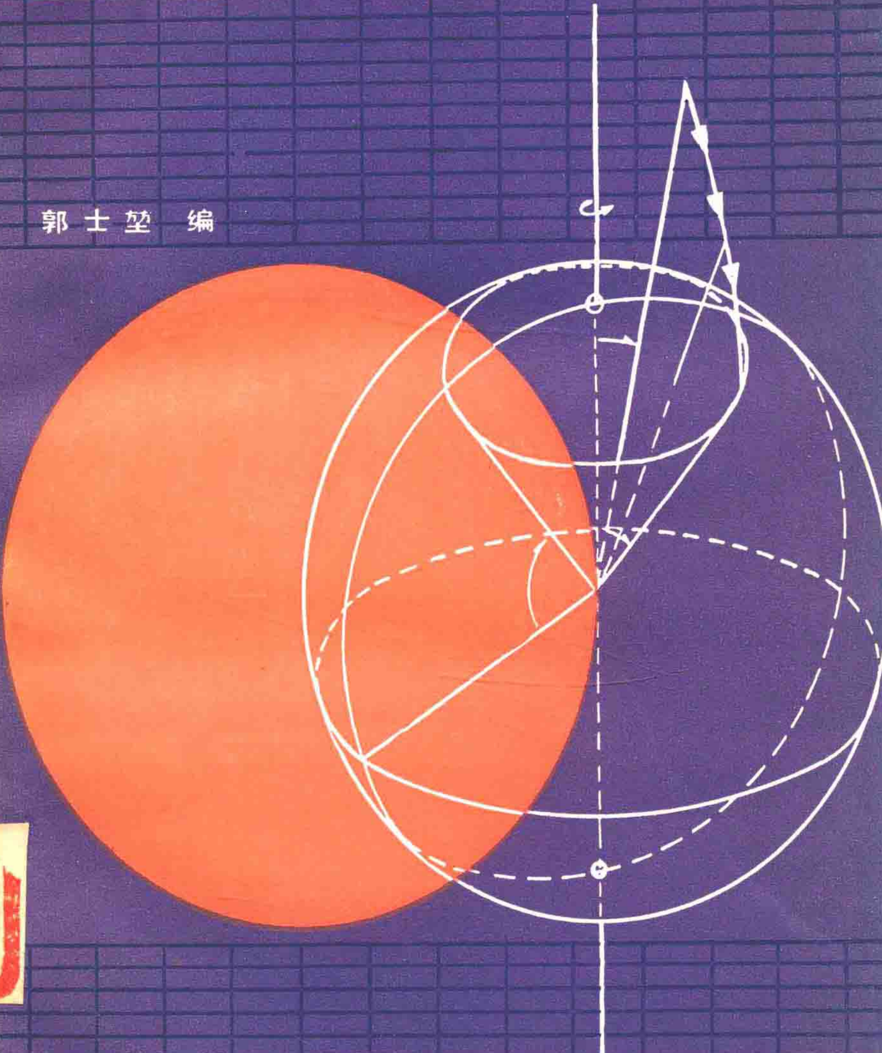
高等学校教学参考书

理论力学

下册

郭士堃 编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

理论力学

下册

郭士堃 编

高等教育出版社

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教学参考书

理论力学

下　册

郭士堃　编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

江苏扬州印刷厂印装

开本850×1168　1/32　印张9.75　字数234，000

1982年9月第1版　1984年2月第2次印刷

印数　14,601—24，700

书号　13010.0812　定价 1 05 元

目　　录

理论力学(下册)

第三篇　分析力学

第二部分 连续介质力学

*第四篇 连续介质力学基础

第三篇　分析力学

引言　在这里，先扼要叙述向量力学和分析力学两者在观点上和方法上的区别.

向量力学是以牛顿运动定律为基础，所牵涉到的量大半都是向量，力和动量更是两个基本量. 分析力学是以拉格朗日和哈密顿等所建立的变分原理为基础，所牵涉到的是标量而不是向量，其中尤以力函数（或势函数）和动能为两个基本量.

向量力学和分析力学的主要区别，有以下三点：

第一、处理质点组问题时：向量力学是将个别质点从组中孤立出来，再分析每个质点所受的力，进而建立每个质点的运动微分方程. 而分析力学是将质点组看作一个整体，只须求出一个仅与各质点的位置（及速度）有关的标函数，单凭微分便能获得有关各力的知识，并得到整个质点组的运动微分方程. 比如，当讨论某一个行星运动时，从力的分析看来，不仅要考虑太阳对它的作用，同时还须考虑来自所有其他行星的作用；但是，在其他行星的运动还不知道以前，它们的作用也是未知的，因而在这种情形下，仅孤立地求解一个行星的运动是不可能的. 在§6.3中讲的二体问题，就是一个例子. 由此可见，从整体的观点来研究动力学问题，似乎要合理些，从一个标函数来寻求力，当然方便得多.

第二、处理有关约束的问题时，为了使各质点的坐标能够满足某些确定的附加条件，在向量力学中，须用约束力来代替约束条件（§4.2-1）. 由于约束力的性质和强度均属未知，所以事先既要对它作出某些个别的假设，事后又常常要从方程中把它消去. 比如，我们处理刚体的内力时就是这样. 如果用分析力学的方法，便

在承认这些条件的前提下进行讨论，而不追问需要什么样的力来维持这些条件. 比如，在处理不可压流体的问题时，我们可以不管那些未知的内力，而代之以体积不变的条件，这样便使问题大为简化. 这是分析力学的一个优点.

第三、建立运动微分方程时，在分析力学中，可以根据统一的所谓最小作用量原理求得. 由极值原理所得的方程与坐标系无关，因此，选择坐标比较灵活，不再受各种坐标系的限制，这是分析力学的又一个优点. 在§10.2-4中，我们将举例说明. 在向量力学中寻找加速度在球坐标系中的分量表式所遇到的困难，在分析力学中已不复存在.

向量力学着重在分析各别质点所受的力，经常需要凭借几何图形的直观性来寻找关系. 分析力学着重在计算与整个力学体系有关的功和能，有统一的方法将力学问题转换为数学关系.

总起来说，向量方法和变分方法是同一力学领域中两种不同的数学描述. 我们将会看到，对自由质点的问题，两种方法是等价的. 对于许多工程的和物理的初等问题，也不难采用直角坐标和向量方法去解决. 但是，对于许多复杂的问题，变分方法就会显示出它的优越性. 这种优越性主要来自这种方法对坐标选择和坐标变换都是完全自由的. 这时，不仅使所获得的某些结果具有不变性或协变性(这是自然规律的基本属性!)，而且使运动微分方程的建立和求解（从理论上说）都变得容易些了. 利用循环坐标的概念，从拉格朗日方程便可直接得出相应的运动初积分；只因我们对拉氏方程还没有寻找循环坐标的系统方法，所以这时循环坐标的出现，纯属偶然. 哈密顿和雅可俾引入正则方程之后，由于它具有更加广泛的变换性质，这时只需求解一个偏微分方程，便可找到一组全都是循环的坐标，从而使问题完全解决.

虽然这个偏微分方程真正可解的情形仅局限于某一类问题，

但是，理论物理中正好有许多这一类的重要问题．因此，分析力学的理论不仅在逻辑上是完美的，而且给解决很多动力学问题提供了新方法．向量方法对这些问题往往是无能为力的．此外，分析力学的形式更便于推广到牛顿运动定律不能应用的其他物理学领域，如经典场论和量子力学等等．

本篇的主要目的是讲述分析力学的基本方法．

这里提到的特点和区别，在以下各章中将一一体现出来。不过为了读者易于接受起见，我们不是从最小作用量原理开始的．

第八章　虚功原理　达朗伯原理[①]

虚功原理属于分析力学中微分形式的变分原理，是解决平衡问题的一般方法，也是分析力学的基础．将虚功原理与达朗伯原理结合，导出动力学的一般方程，为下一章建立拉格朗日方程作准备．同时，扼要介绍了拉格朗日的不定乘子法(即 λ-乘子法)．关于约束、自由度、广义坐标等基本概念，也作了较详细的讨论．

§8.1　基本概念：约束·自由度·广义坐标·及位形空间

1. 约束的定义　运动总可以分为自由运动和非自由运动两类．

当体系运动时，如果运动状态(位置、速度等)完全由作用力和初始条件确定，便称为**自由运动**．反之，如体系的位置或速度受有某些预先给定的、几何上的或运动学上的限制，不是这些限制与作用力和初始条件有任何关系，反而是初始条件必须满足这些限制的要求，这便是**非自由运动或约束运动**．

例如：(1) 在重力作用下的抛射运动，便是自由运动，改变初始条件，可使物体以任意的速度通过空间任何一点．(2) 小球受重力作用沿斜面的运动，便是非自由运动，斜面就是预先给定的几何限制，所给初始条件必须保证物体是处在斜面上．(3) 如果小

---

① 本章使用的几个符号：N——质点的个数(用下标 i 代表一般的)；n——自由度数(用下标 r 代表一般的)；s——几何约束数目(用下标 μ 代表一般的)；$\boldsymbol{F}^{(a)}$——主动力；$\boldsymbol{F}^{(c)}$——被动力(约束力)

球在斜面上只滚不滑，则小球与斜面接触那一点的瞬时速度应为零. 这就是运动学上的限制.

凡是强加在体系上而限制其运动的条件，称为约束. 约束条件的数学表式称为约束方程.

2. 约束的分类 假设体系由N个质点组成，一般地说，加于体系的约束，不仅限制各质点的位置，而且限制它们的速度，这些限制条件还可能随时间而改变（比如，质点在运动着的斜面上滑动，球摆的悬点处于运动状态的情形等等）. 因此，约束方程的普遍形式可表为

$$f_\mu(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t)=0,$$

其中x_i, y_i, z_i代表所有质点坐标的集合($i=1, 2, \cdots\cdots, N$)，下标μ暂时视为一个定值，现在就各种特殊情形对约束加以分类.

1）完整约束与非完整约束 如果在上式中完全不包含速度$\dot{\boldsymbol{r}}_i$，这样的约束称为完整约束或几何约束. 故完整约束的方程总可以表为

$$f_\mu(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots, z_N; t)=0. \tag{8.1-1}$$

体系在运动过程中的任何时刻，相邻两位置之间应满足如下的条件

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}dx_i(t)+\frac{\partial f_\mu}{\partial y_i}dy_i(t)+\frac{\partial f_\mu}{\partial z_i}dz_i(t)\right]+\frac{\partial f_\mu}{\partial t}dt=0. \tag{8.1-1a}$$

这个条件实际上就是对速度的限制. 由此可见，当我们考察一个受完整约束的质点组时，初位置$\boldsymbol{r}_i(0)$和初速度$\dot{\boldsymbol{r}}_i(0)$均不能任意给定，它们必须满足如下的关系:

$$\left.\begin{aligned}&f_\mu(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots, z_N; 0)_0=0;\\&\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\right)_0\dot{x}_i(0)+\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial y_i}\right)_0\dot{y}_i(0)+\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_i}\right)_0\dot{z}_i(0)\right]+\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial t}\right)_0=0\end{aligned}\right\} \tag{8.1-1b}$$

完整约束无论用(8.1-1)或(8.1-1a)表示都可以；但是，对于后一种表示，则必须是可积的，否则便与定义不相符合.

我们将(8.1-1a)式的约束方程推广成如下的形式:

$$\sum_{i=1}^{N}[a_{\mu i}dx_i(t)+b_{\mu i}dy_i(t)+c_{\mu i}dz_i(t)]+d_{\mu 0}dt=0, \qquad (8.1\text{-}2)$$

其中　$a_{\mu i}, b_{\mu i}, c_{\mu i}, d_{\mu 0}$ 均为$(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots, z_N; t)$的函数.

如果上式是不可积的，即(8.1-2)的左边不是一个全微分，这样的约束称为非完整约束或微分约束．显然，这种约束条件不能象完整约束那样用一组确定的函数表示出来．从上面的讨论看出：非完整约束的初位置 $\boldsymbol{r}_i(0)$可以任意选取；但是，初速度$\dot{\boldsymbol{r}}_i(0)$则必须满足由(8.1-2)所确定的要求:

$$\sum_{i=1}^{N}[a_{\mu i}\dot{x}_i(0)+b_{\mu i}\dot{y}_i(0)+c_{\mu i}\dot{z}_i(0)]+d_{\mu 0}=0. \qquad (8.1\text{-}2a)$$

所受约束皆为完整约束的质点组称为完整组．反之，所受约束中只要有非完整约束存在，则称为非完整组．以后限于讨论完整组.

2) 固定约束与活动约束　这是根据约束对时间的依赖性来区分的．如果约束方程显含时间 t，称为活动约束．反之，如果不显含 t，则称为固定约束．完整的固定约束方程按(8.1-1)可以表为

$$f_\mu(x_1, y_1, z_1, x_2, \cdots, z_N)=0. \qquad (8.1\text{-}3)$$

例如，当一质点在椭球面上运动时，如果椭球中心以恒定速度 v_0 沿 Ox 轴移动，而其长轴和短轴又随时间成比例地增加，则约束方程应表为

$$\frac{(x-v_0t)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=A^2(t-t_0)^2.$$

此时，不但椭球的位置改变，而大小亦改变．如果将上式右端用 1

代替，则椭球只改变位置．若更设 $v_0=0$，则成为固定约束．

3）单面约束与双面约束　当质点在运动时，如果约束是用等式(8.1-1)或(8.1-3)表示的，称为双面约束；反之，如果是用不等式表示的，称为单面约束．在不等号下，实际上约束已经消失，对运动不再产生任何影响；因而今后我们将不讨论用不等式来表示的约束条件．

3．约束对体系中各质点的位移所加的限制·虚位移

完整约束既然限制了各质点的位置，当然对各质点的位移也有所限制．现在，仍就 N 个质点所组成的体系加以考察．

1）首先，假设约束是固定的，约束的个数为 $s(<3N)$，根据(8.1-3)可将这些约束的方程书为

$$f_\mu(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N)=0,\ \mu=1, 2, \cdots\cdots, s, \tag{8.1-4}$$

假如任一质点 i 所发生的无穷小位移$(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$均符合约束条件，也就是说这些位移都是约束所允许的，那么，N 个质点在新位置的坐标仍应满足上列 s 个方程．因此，我们对(8.1-4)式取变分，便求得 $3N$ 个位移分量：$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \cdots\cdots, \delta x_N, \delta y_N, \delta z_N$ 应受到下列 s 个条件的限制：

$$\delta f_\mu \equiv \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\mu}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\mu}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0.\quad \mu=1, 2, \cdots, s \tag{8.1-5}$$

符合约束条件的位移，为数甚多．所有符合约束条件的位移，统称为虚位移．虚位移只是运动学上所允许的位移，但不一定是真正运动所发生的实位移．在固定约束情形下，实位移一定包含在虚位移之中．例如，在重力作用下沿斜面自静止开始运动的质点，其实位移必在最大斜度的方向，这个方向的位移也包含在虚位移中，因为在斜面上任何方向的位移，都符合约束条件．

虚位移用符号 δ 表示，以便与实位移的微分符号 d 相区别．在