运筹与管理科学丛书 26

排队博弈论基础

王金亭 著

科学出版社

运筹与管理科学丛书　26

排队博弈论基础

王金亭　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书简要介绍基于博弈论的排队经济学理论和主要结果，建立了一个完整的理论框架. 内容包括排队论及博弈论基础知识、可见信息系统、不可见信息系统、优先权排队博弈、可修排队博弈、休假排队博弈、重试排队博弈等各种连续时间排队系统的均衡分析，以及排队博弈在通信网络中的应用实例. 本书很多内容是作者近年来的研究成果，并包含了一些新的尚未发表的结果.

本书可作为运筹学、管理科学、系统科学、交通运输、无线通信、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员的参考书，同时也可作为有关专业的研究生和高年级本科生的教材. 阅读本书只需具备微积分和初等概率论的基本知识. 对于有志于从事排队论和博弈论交叉领域研究的读者，这是一本较为合适的基础性的入门书.

图书在版编目(CIP)数据

排队博弈论基础/王金亭著. —北京：科学出版社，2016

(运筹与管理科学丛书；26)

ISBN 978-7-03-049094-0

Ⅰ. ①排…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①排队-博弈论-研究　Ⅳ. ①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 142077 号

责任编辑：李静科／责任校对：张凤琴
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000
2016 年 6 月第一次印刷　印张：11 3/4
字数：237 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道: "运筹帷幄之中, 决胜千里之外."

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于 20 世纪 50 年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣、同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前　言

经典的排队理论主要研究排队系统本身的客观规律, 在具体的排队模型中对顾客到达及其服务时间分布规律进行统计建模, 利用概率论、随机过程等理论得出排队系统的队列长度、等待时间、忙期等指标. 但不可忽视的是, 在一个排队系统中, 顾客、服务商及系统管理者也是重要组成部分. 他们的自主行为将直接影响到整个系统的性能, 使得排队策略具有灵活性, 更加符合实际情况但同时也使得排队分析更加复杂. 在经典排队理论中顾客个体的策略性决策行为往往被忽略, 各种服务系统的性能分析、最优设计及控制等相关问题分析中很少考虑顾客的经济效用及其带来的对系统性能的各种影响. 许多研究表明, 人的行为表现出一些特有的性质, 如风险厌恶 (偏好)、损失厌恶、参照依赖、不等值贴现等, 导致人们在行为上并不一定按照从系统整体最优化的角度给出的 "效用最大" 模式那样去做, 而是会根据系统的不同信息及自己的风险特征做出 "自己满意的选择". 因此, 对于有顾客个体特征决策行为的服务系统, 出现了经典运筹学、统计学和经济学不能直接应用和处理的一些新问题.

基于博弈论的排队经济学理论是一个快速发展的研究领域. 国内外已有学者将行为科学引入到运筹学中, 开展行为运筹学与行为运作管理的研究工作, 并迅速成为新的学术热点. 具体对于排队系统博弈理论来说, 一方面, 顾客希望自己能够及时得到服务. 顾客在接受服务后能够得到一定的效用收益, 但在一定的费用结构下, 顾客的排队时间越长, 相应的损失就越大. 另一方面, 服务设施也有本身的损耗, 比如预防维修、更换服务设备等. 服务商可以对提供的服务进行定价, 有时对顾客收取准入费用后才允许顾客排队, 以达到控制顾客流的目的. 在这个过程中, 顾客和服务商都追求各自的利益最大化. 顾客自主选择排队策略, 其行为受到自身掌握的系统信息和其他顾客行为策略的影响. 服务商对服务费用定价的时候也不得不考虑顾客可能采取的行为及策略. 总之, 两者在决策的同时都不得不考虑对方行为对自己的影响, 于是就形成了双方乃至更多方之间的博弈. 另外, 系统的费用结构可以根据实际问题的不同而变化, 不同顾客的优先级有别、服务商的服务能力不同, 以及排队规则的不同变化等, 使得该问题具有多样性, 因此排队系统的博弈分析在银行服务、企业订单生产、通信网络等领域都有广泛的重要应用.

本书试图简要介绍基于博弈论的排队经济学理论. 在取材时, 尽可能包括排队博弈理论的基本内容、基本模型和方法. 内容包括排队论及博弈论基础知识、可见信息系统、不可见信息系统、优先权排队博弈、可修排队博弈、休假排队博弈、重

试排队博弈等各种连续时间排队系统的均衡分析, 以及排队博弈在通信网络中的应用实例. 本书很多内容是作者近年来的研究成果, 并包含了一些新的尚未发表的结果. 由于篇幅的限制, 同时考虑读者的广泛性, 作者舍弃了不少更深入的理论问题和某些虽然重要但较特殊的系统的讨论.

本书可作为运筹学、管理科学、系统科学、交通运输、无线通信、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员的参考书, 同时也可作为有关专业的研究生和高年级本科生的教材. 本书对排队系统的博弈分析相关的基本概念给出了严格的数学定义, 对一些基本的结论和公式尽量给出数学证明. 对于有志于从事排队论和博弈论交叉领域研究的读者, 这是一本较为合适的基础性的入门书.

作者衷心感谢导师曹晋华研究员长期的鼓励和支持, 感谢美国得克萨斯州南方大学李伟教授、西华盛顿大学张喆教授、加拿大卡尔顿大学赵一强教授、新加坡国立大学张汉勤教授以及师兄刘斌、岳德权、李泉林等教授的长期合作和指导. 同时也十分感谢北京交通大学理学院数学系刘彦佩教授、修乃华教授、常彦勋教授的支持和鼓励. 感谢我的研究生们的录入及部分校对工作, 张钰同学帮助校对了书稿校样. 感谢科学出版社数理分社李静科老师, 她为本书的出版付出了辛勤的劳动. 最后, 作者感谢家人长年累月无私的支持和奉献, 没有他们的支持, 这项工作是不可能完成的.

本书得到了教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-11-0568) 和国家自然科学基金的资助 (批准号：11171019, 71571014, 71390334).

由于作者水平所限, 不妥之处在所难免, 欢迎广大读者批评指正, 以求改进.

作者
2016 年 3 月
于北京交通大学红果园

目　　录

第 1 章　基础知识

本章主要参考 Gross 和 Harris(1998), Hassin 和 Haviv(2003), Nisan, Roughgarden, Tardos 和 Vazirani(2007) 的专著, 给出博弈论以及排队论的相关基本概念.

1.1　博弈论基础

1.1.1　博弈的定义

博弈即一些个人、队组或其他组织, 面对一定的环境条件, 在一定的规则下, 同时或先后, 一次或多次, 从各自允许选择的行为或策略中进行选择并加以实施, 各自取得相应结果的过程.

从上述定义中可以看出, 规定或定义一个博弈需要设定下列四个方面.

(1) **博弈的参加者 (Player)**　即在所定义的博弈中究竟有哪几个独立决策、独立承担结果的个人或组织. 对我们来说, 只要在一个博弈中统一决策、统一行动、统一承担结果, 不管一个组织有多大, 哪怕是一个国家, 甚至是许多国家组成的联合国, 都可以作为博弈中的一个参加方. 并且, 在博弈的规则确定之后, 各参加方都是平等的, 大家都必须严格按照规则办事. 为统一起见, 将博弈中的每个独立参加方都称为一个 "博弈方".

(2) **各博弈方各自选择的全部策略 (Strategies) 或行为 (Actions) 的集合**　即规定每个博弈方在进行决策时, 可以选择的方法、做法或经济活动的水平、量值等. 在不同博弈中可供博弈方选择的策略或行为的数量很不相同, 在同一个博弈中, 不同博弈方的可选策略或行为的内容和数量也常不同, 有时只有有限的几种, 甚至只有一种, 而有时又可能有许多种, 甚至无限多种可选策略或行为.

(3) **进行博弈的次序 (Orders)**　在现实的各种决策活动中, 当存在多个独立决策方进行决策时, 有时候需要这些博弈方同时做出选择, 因为这样能保证公平合理, 而很多时候各博弈方的决策又有先后之分, 并且有时一个博弈方还要做不止一次的决策选择. 这就免不了有一个次序问题. 因此规定一个博弈必须规定其中的次序, 次序不同一般就是不同的博弈, 即使博弈的其他方面都相同.

(4) **博弈方的收益 (Payoffs)**　对应于各博弈方的每一组可能的决策选择, 都应有一个结果表示该策略组合下各博弈方的所得或所失. 由于我们对博弈的分析主要是通过数量关系的比较进行的, 因此我们研究的绝大多数博弈, 本身都有数量

的结果或可以量化为数量的结果, 如收入、利润、损失、个人效用和社会效用、经济福利等. 博弈中的这些可能结果的量化数值, 称为各博弈方在相应情况下的 "收益". 规定一个博弈必须对收益做出规定, 收益可以是正值, 也可以是负值, 它们是分析博弈模型的标准和基础. 值得注意的是, 虽然各博弈方在各种情况下的收益应该是客观存在, 但这并不意味着各博弈方都了解各方的收益情况.

以上四个方面是定义一个博弈时必须首先设定的, 确定了上述四个方面就确定了一个博弈. **博弈论**就是系统研究可以用上述方法定义的各种博弈问题, 寻求在各博弈方具有充分或者有限理性 (Full or Bounded Rationality) 能力的条件下, 合理的策略选择和合理选择策略时博弈的结果, 并分析这些结果的经济意义、效率意义的理论和方法.

所有博弈方同时或可看作同时选择策略的博弈称为**静态博弈 (Static Game)**. 我们把决策有先后顺序的博弈称为**动态博弈 (Dynamic Game)**, 也称**多阶段博弈 (Multistage Game)**. 动态博弈中在轮到行为时对博弈的进程完全了解的博弈方, 称为具有**完美信息 (Perfect Information)**的博弈方, 如果动态博弈的所有博弈方都有完美信息, 则称为**完美信息的动态博弈**. 动态博弈中轮到行为的博弈方不完全了解此前全部博弈进程时, 称为具有**不完美信息 (Imperfect Information)**的博弈方, 有这种博弈方的动态博弈则称为**不完美信息的动态博弈**.

1.1.2 非合作博弈

一般地, 我们将允许存在有约束力协议的博弈称为**合作博弈 (Cooperative Game)**. 与此相对的是, 我们将不允许存在有约束力协议的博弈称为**非合作博弈 (Non-cooperative Game)**. 由于在合作博弈和非合作博弈两类博弈中, 博弈方基本的行为逻辑和研究它们的方法有很大差异, 因此它们是两类很不相同的博弈. 事实上, "合作博弈理论" 和 "非合作博弈理论" 正是博弈论最基本的一个分类, 它们在产生和发展的路径, 在经济学中的地位、作用和影响等许多方面都有很大的差异. 现代占主导地位, 也是研究和应用较多较广泛的, 主要是其中的非合作博弈理论.

我们常用 G 表示一个非合作博弈. 如果 G 有 n 个博弈方, 每个博弈方全部可选策略的集合我们称为 "策略空间", 分别用 S_i 表示, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n$.

一般地, 我们将各博弈方都完全了解所有博弈方各种情况下的博弈称为**完全信息 (Complete Information)**博弈, 而将至少部分博弈方不完全了解其他博弈方收益情况的博弈称为**不完全信息 (Incomplete Information)**博弈或**贝叶斯博弈 (Bayesian Game)**.

纯策略 (Pure Strategy) 在完全信息博弈中, 如果在每个给定信息下, 只能选择一种特定策略, 这个策略称为纯策略.

混合策略 (Mixed Strategy) 如果在每个给定信息下只以某种概率选择不

同策略, 称为混合策略.

混合策略是纯策略在空间上的概率分布, 纯策略是混合策略的特例.

收益函数 (Payoff Function) 每个参与人在参与博弈时依据其所属类型和选择的行动可获得的收益.

记 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 为一个策略组合, $s_i\in S_i$, 每个博弈方的收益函数为 $F_i(s)$. 用 s_{-i} 表示除了第 i 个人, 其他所有人的策略组合. 如果 s_i 是一个混合策略, 以概率 α 选择 s_i^1, 以概率 $1-\alpha$ 选择 s_i^2, 那么第 i 个人的收益就是

$$F_i(s_i,s_{-i})=\alpha F_i(s_i^1,s_{-i})+(1-\alpha)F_i(s_i^2,s_{-i}).$$

策略 s_i^1 比 s_i^2 **弱占优**, 指的是对于任意的 s_{-i} 有 $F_i(s_i^1,s_{-i})\geqslant F_i(s_i^2,s_{-i})$ 成立, 其中至少有一个 s_{-i} 使得 ">" 成立. 如果说 s_i 是一个弱占优的策略, 那么它对其他所有策略都是弱占优的.

如果

$$s_i^*\in\arg\max_{s_i\in S_i}F_i(s_i,s_{-i}),$$

那么策略 s_i^* 被称为对 s_{-i} 是**最佳对策**.

1.1.3 纳什均衡

定义 1.1.1 在博弈 G 中, 如果由各个博弈方的各一个策略组成的某个策略组合 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ 中, 任一博弈方 i 的策略 s_i^e, 都是对其余博弈方策略的组合 s_{-i}^e 的最佳对策, 也即

$$F_i(s_i^e,s_{-i}^e)\geqslant F_i(s_i,s_{-i}^e),$$

对任意的 $s_i\in S_i$ 都成立, 则称 $s^e=(s_1^e,\cdots,s_n^e)$ 为 G 的一个**纳什均衡 (Nash Equilibrium)**.

如果简单的考虑各博弈方都是同类型的, 那么得到的是**对称均衡 (Symmetric Equilibrium)**.

由一个动态博弈第一阶段以外的某阶段开始的后续博弈阶段构成的, 有初始信息集和进行博弈所需要的全部信息, 能够自成一个博弈的原博弈的一部分, 称为原动态博弈的一个**子博弈 (Subgame)**.

如果在一个完美信息的动态博弈中, 各博弈方的策略构成的一个策略组合满足, 在整个动态博弈及它的所有子博弈中都构成纳什均衡, 那么这个策略组合称为该动态博弈的一个**子博弈完美纳什均衡 (Subgame Perfect Equilibrium)**. 简单地说, 这组策略必须在每一个子博弈中都是最优的.

子博弈完美纳什均衡是稳定的, 是比纳什均衡更强的均衡 (排除均衡策略中不可信的威胁或承诺). 如果不是子博弈完美纳什均衡, 可能在某些子博弈中不符合博弈方的自身利益.

1.1.4　进化稳定策略

定义 1.1.2　对于一个均衡策略 y, 可能存在另一个最佳对策 $z(z \neq y)$. 所以当之前的人都开始选择策略 y 时, 有部分人可能选择 z, 如果 z 对于自身是最佳对策, 并且比 y 好, 那么所有人都会转而去选择 z. 在这种情况下, 策略 y 是不稳定的. 如果没有这样的 z 存在, 则 y 是一个**进化稳定策略 (Evolutionarily Stable Strategy)**.

记 $F(x,y)$ 表示其他人选择策略 y, 自己选择 x 的收益函数. 一个均衡策略 y 被称为是进化稳定策略, 当它满足以下条件:

$$\begin{aligned} &F(y,y) \geqslant F(x,y), \quad x \in S, \\ &F(z,y) \geqslant F(x,y), \quad x \in S, z \neq y, \\ &F(y,z) > F(z,z). \end{aligned}$$

1.1.5　拥挤偏好和拥挤厌恶

假设对于任意的策略 y, 存在唯一的最佳对策 $x(y)$, 即

$$x(y) = \arg\max_x F(x,y).$$

如果 $x(y)$ 关于 y 单调减少, 则称这种情形为**拥挤厌恶 (Avoid the Crowd)**, 简称 ATC.

如果 $x(y)$ 关于 y 单调增加, 则称这种情形为**拥挤偏好 (Follow the Crowd)**, 简称 FTC.

在 ATC 情形中, 最多只可能存在一个均衡解. 而在 FTC 情形中, 可能存在多个均衡解.

1.2　排队论基础

排队论 (Queueing Theory)又名**随机服务系统理论**, 是研究拥挤现象的一门数学学科. 它通过研究各种服务系统在排队等待中的概率特性, 来解决系统的最优设计和最优控制. 排队论是运筹学的重要分支, 也是应用概率的重要分支, 所研究的问题有很强的实际背景, 它起源于 20 世纪初丹麦电信工程师 A.K.Erlang 对电信系统的研究. 之后, 经过国内外的数学家和运筹学家的努力, 排队论已是一门成熟的理论, 其文献数以千计, 特别是随着计算机技术的迅猛发展, 排队论的科学研究更是日新月异, 其应用领域也不断扩大. 目前, 排队论的科学研究成果已广泛应用于通信工程、交通运输、生产与库存管理、计算机系统设计、计算机通信网络、军事作战、柔性制造系统和系统可靠性等众多领域, 并取得了丰硕成果. 因此, 排队

论在科学技术及国民经济发展中起到了直接的重要作用, 而且已成为从事通信、计算机等领域研究的专家、工程技术人员和管理人员必不可少的重要数学工具之一.

1.2.1 排队系统的基本组成部分

1. 输入过程

输入过程是表述顾客来源及顾客是按怎样的规律抵达排队系统.

(1) **顾客总体数** 顾客的来源可能是有限的, 也可能是无限的.

(2) **到达的类型** 顾客是单个到达的, 或是成批到达的.

(3) **顾客到达过程** 相继顾客到达的间隔时间服从什么样的概率分布, 分布的参数是什么, 到达的间隔时间之间是否独立.

2. 排队规则

排队规则是指服务允许不允许排队, 顾客是否愿意排队. 在排队等待的情形下服务的顺序是什么, 分为:

(1) **损失制** 顾客到达时, 若所有服务台均被占, 服务机构又不允许顾客等待, 此时该顾客就自动离去.

(2) **等待制** 顾客到达时, 若所有服务台均被占, 他们就排队等待服务. 在等待制系统中, 服务顺序又分为:

先到先服务 顾客按到达的先后顺序接受服务.

后到先服务 后到达的顾客先接受服务.

随机服务 在等待的顾客中随机地挑选一个顾客进行服务.

有优先权的服务 在排队等待的顾客中, 某些类型的顾客具有特殊性, 在服务顺序上要给予特别待遇, 让他们先得到服务.

(3) **混合制** 损失制与等待制的混合, 分为队长有限的混合制系统, 等待时间有限的混合制系统, 以及逗留时间有限的混合制系统.

3. 服务机构

刻画服务机构的主要方面为:

(1) **服务台的数目**. 在多个服务台的情形下, 是串联或是并联.

(2) **顾客所需的服务时间服从什么样的概率分布, 每个顾客所需的服务时间是否相互独立, 是成批服务或是单个服务等**. 常见顾客的服务时间分布有: 定长分布、负指数分布、超指数分布、k 阶埃尔朗分布、几何分布、一般分布等.

1.2.2 经典排队系统的符号表示

一个排队系统是由许多条件决定的, 为了简明起见, 在经典排队系统中, 常采用 3—5 个英文字母表示一个排队系统, 字母之间用斜线隔开: 第一个字母表示输

入分布类型, 第二个字母表示服务时间的分布类型, 第三个字母表示服务台的数目, 第四个字母表示系统的容量, 有时用第五个字母表示顾客源中的顾客数目. 例如:

$M/M/c/\infty$ 表示输入过程是泊松流, 服务时间服从负指数分布, 系统有 c 个服务台平行服务, 系统容量为无穷, 于是 $M/M/c/\infty$ 系统是等待制系统.

$M/G/1/\infty$ 表示输入过程是泊松流, 顾客所需的服务时间独立、服从一般概率分布, 系统中只有一个服务台, 容量为无穷的等待制系统.

$GI/M/1/\infty$ 表示输入过程为顾客独立到达且相继到达的间隔时间服从一般概率分布, 服务时间相互独立、服从负指数分布, 系统中只有一个服务台, 容量为无穷的等待制系统.

$E_k/G/1/K$ 表示相继到达的间隔时间独立、服从 k 阶埃尔朗分布, 服务时间独立、服从一般概率分布, 系统中只有一个服务台, 容量为 K 的混合制系统.

$D/M/c/K$ 表示相继到达的间隔时间独立、服从定长分布, 服务时间相互独立、服从负指数分布, 系统中有 c 个服务台平行服务, 容量为 K 的混合制系统.

$M^r/M/1/\infty$ 表示顾客是成批到达, 每批到达为固定的 r 个顾客, 批与批的到达间隔时间独立、服从负指数分布, 顾客的服务时间独立、服从负指数分布, 有一个服务台, 系统容量为无穷的等待制系统.

$M^X/M^r/1/\infty$ 表示顾客是成批到达, 每批到达的数量 X 是具有某个离散型概率分布律的随机变量, 批与批的到达间隔时间独立、服从负指数分布, 同时顾客是成批服务, 每批服务的数量为 r, 服务时间独立, 服从负指数分布, 而系统中有一个服务台, 容量为无穷的等待制系统.

1.2.3 描述排队系统的主要数量指标

1. 队长与等待队长

队长是指在系统中的顾客数 (包括正在接受服务的顾客), 而等待队长是指系统中排队等待的顾客数, 它们都是随机变量, 是顾客和服务机构双方都十分关心的数量指标, 应确定它们的分布及有关矩 (至少是期望平均值). 显然, 队长等于等待队长加上正在被服务的顾客数.

2. 顾客在等待系统中的等待时间与逗留时间

顾客的**等待时间**是指从顾客进入系统的时刻起直至开始接受服务止这段时间, 而**逗留时间**是顾客在系统中的等待时间与服务时间之和. 在假定到达与服务是彼此独立的条件下, 等待时间与服务时间是相互独立的. 等待时间与逗留时间是顾客最关心的数量指标, 应用中关心的是统计平衡下它们的分布及期望平均值.

3. 系统的忙期与闲期

从顾客到达空闲的系统, 服务立即开始, 直到系统再次变为空闲, 这段时间是系统连续繁忙的时间, 我们称为系统的**忙期**, 它反映了系统中服务员的工作强度.

与忙期对应的是系统的**闲期**, 即系统连续保持空闲的时间长度. 在排队系统中, 统计平衡下忙期和闲期是交替出现的.

而**忙期循环**是指相邻的两次忙期开始的间隔时间, 显然它等于当前的忙期长度与闲期长度之和.

4. 输出过程

输出过程也称**离去过程**, 是指接受服务完毕的顾客相继离开系统的过程. 刻画一个输出过程的主要指标是相继离去的时间间隔和在一段已知时间内离去顾客的数目, 这些指标从一个侧面也反映了系统的工作效率.

1.2.4 $M/M/1$ 排队系统

假设顾客到达是参数为 λ 的泊松流, 即相继到达的间隔时间序列独立、服从相同参数为 λ 的负指数分布 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, t \geqslant 0$; 顾客所需的服务时间序列独立、服从相同参数为 μ 的负指数分布 $G(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, t \geqslant 0$; 系统中只有一个服务台, 容量为无穷大, 而且到达过程与服务过程是彼此独立的. 当满足稳定性条件 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, 在统计平衡下, 有以下结论.

(1) 系统中有 n 个顾客的概率为

$$(1-\rho)\rho^n.$$

(2) 系统中平均队长为

$$\frac{\rho}{1-\rho}.$$

(3) 顾客的平均逗留时间为

$$\frac{1}{\mu-\lambda}.$$

(4) 平均忙期长度为

$$\frac{1}{\mu-\lambda}.$$

(5) 一个忙期中所服务的平均顾客数为

$$\frac{1}{1-\rho}.$$

(6) 从顾客到达系统到首次服务台空闲的平均时间为

$$\frac{1}{\mu(1-\rho)^2}.$$