工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目

21世纪高等学校规划教材

# 高等数学

## （下册）

许峰 殷志祥 ◎ 主编

周继振 詹倩 ◎ 副主编

讲究概念背景，强调方法应用

编排严谨合理，讲解通俗易懂

例题分析透彻，习题难易适中

注重释疑解惑，适当归纳汇总

中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目

21世纪高等学校规划教材

# 高等数学

## （下册）

许峰 殷志祥 ◎ 主编

周继振 詹倩 ◎ 副主编

人民邮电出版社

北京

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学. 下册 / 许峰, 殷志祥主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2016.8
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-42598-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①许… ②殷… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第187557号

## 内容提要

本套教材分为上、下两册。下册主要内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及应用、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数。本书结构严谨，条理清晰，语言通俗易懂，论述简明扼要，例题与习题难度适中且题型丰富。

本书有配套辅导教程，内容包括教学基本内容与基本要求、释疑解惑、典型例题解析、配套作业、复习题、历年统考试题及解答等。

本书可作为高等学校非数学专业“高等数学”课程的教材，也可以作为科技工作者学习微积分知识的参考书。

◆ 主　　编　许　峰　殷志祥
副 主 编　周继振　詹　倩
责任编辑　张孟玮
责任印制　沈　蓉　彭志环

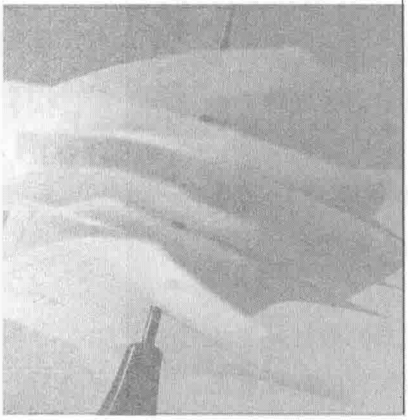
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：18　　2016 年 8 月第 1 版
字数：460 千字　　2016 年 8 月河北第 1 次印刷

定价：44.00 元

**读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316**
**反盗版热线：(010)81055315**

# 前 言 Preface



随着科学技术的发展和进步，数学已渗透到自然科学、工程技术、经济、金融、社会等各个领域，逐渐成为各学科进行科学研究的重要工具和手段。高等数学作为近代数学的基础，是理工类、经管类各专业大学生必修的重要数学基础课。

近十几年来，随着高等学校招生规模的不断扩大，高校的培养模式、教学方法、教学手段等逐渐呈现出多元化。高校教材也悄然发生着变化，由几花争艳逐步演变为百花齐放。每门课程不再是只有几种教材供选择，有些基础课程比如高等数学的教材已有上百种之多，而且还不断有新教材问世。

安徽理工大学的“高等数学”课程2004年入选安徽省第一批“省级精品课程”，安徽理工大学的公共数学教学团队获得“省级教学团队”称号，安徽理工大学数学系主编的《线性代数》和《概率论与数理统计》是安徽省“十一五”和“十二五”规划教材，并被多所高校选用。在长期的教学实践中，编者积累了较丰富的教学经验和教学资料，对高等数学教材也有不少自己的想法，这些为本书的编写奠定了一定的基础。为了使得本书区别于其他一般教材，避免低水平重复建设，编者在以下几个方面做了一些工作。

1. 一位哲人曾经说过：“科学只能给我们知识，而历史却能给我们智慧”。在教材的每一章的引言中，作者对本章要讨论的主要概念和问题的背景、起源、研究历程及一些数学家对此所做的贡献做了简要介绍。这样做不仅能使学生了解一点数学发展历史，接受一点数学文化的熏陶，而且能使学生知晓一点所学内容的来龙去脉和应用领域，提高学习兴趣。

2. 在内容与编排方面，与别的教材相比，本书做了一些变动。例如，将定积分与不定积分的内容相互融合；增加了函数图形描绘的应用、广义积分敛散性的判定法、伽马函数、定积分的近似计算、极值充分条件的证明、重积分的换元法及轮换对称性、空间曲线积分与路径无关的条件、绝对收敛级数的性质等。

3. 作者在编写本书时的一个指导思想是，力争使教材通俗易懂，易于自学。具体做法如下。(1)对于一些重要概念，都是通过浅显易懂的具体例子引入，以使学生更好地理解这些重要概念，同时也使学

生明白：数学概念不是数学家凭空想象出来的，而是来源于实际。（2）在提出本章节的主要问题和给出某些定理时，作者特别注意解说性文字的编写，使学生很容易明白为什么要讨论这个问题，这个问题与其他问题有什么联系，等等。

需要指出的是，与其他所有教材编写者一样，编者在编写本书时，参考、借鉴了多种优秀高等数学教材，这些教材在诸如内容编排、定理的论述、例题和习题的选择等方面给了编者许多有益的启示。在此，向这些教材的作者表示感谢和敬意。

本套教材分上、下两册，由安徽理工大学理学院数学系许峰（第 3 章和第 9 章）、范自强（第 4 章和第 11 章）、周继振（第 2 章和第 8 章）、耿显亚（第 5 章和第 10 章）、孙侠（第 1 章和第 6 章）、詹倩（第 7 章和第 12 章）编写，由许峰和殷志祥统稿。

由于编者水平所限，加之时间仓促，本书不足之处在所难免。一本优秀的教材是要经过反复锤炼的，是要经得起时间检验的。作者期待着广大读者特别是各位同行的批评意见和建议。

编者

2016 年 5 月

# 目录 Contents


## 第7章　向量代数与空间解析几何　/ 1

7.1　空间向量及其代数运算 / 1

7.1.1　空间直角坐标系 / 1

7.1.2　空间向量的概念 / 2

7.1.3　向量的坐标表示 / 4

7.2　向量的乘积 / 7

7.2.1　向量的数量积 / 7

7.2.2　向量的向量积 / 8

7.2.3　向量的混合积 / 11

7.3　空间平面 / 13

7.3.1　空间平面的方程 / 13

7.3.2　两平面的夹角 / 15

7.3.3　点到平面的距离 / 16

7.4　空间直线 / 17

7.4.1　空间直线的方程 / 17

7.4.2　两直线的夹角、直线与平面的夹角 / 19

7.4.3　平面束方程 / 20

7.5　空间曲面 / 22

7.5.1　柱面 / 22

7.5.2　旋转曲面 / 23

7.5.3　二次曲面 / 24

7.6　空间曲线 / 27

7.6.1　空间曲线的方程 / 27

7.6.2　空间曲线在坐标面上的投影 / 29

本章概述 / 31

总复习题7 / 32

## 第8章　多元函数微分学及应用　/ 34

8.1　多元函数的基本概念 / 34

8.1.1　平面点集 / 34

8.1.2　二元函数 / 36

8.1.3　多元函数 / 37

8.2　二元函数的极限与连续 / 38

8.2.1　二元函数的极限 / 38

8.2.2 二元函数的连续性 / 41
8.3 偏导数 / 44
8.3.1 偏导数的概念 / 44
8.3.2 偏导数的几何意义 / 47
8.3.3 高阶偏导数 / 48
8.4 全微分 / 51
8.4.1 全微分的概念 / 51
8.4.2 函数可微的条件 / 53
8.4.3 微分在近似计算中的应用 / 57
8.5 多元复合函数的求导法则 / 58
8.5.1 链式法则 / 58
8.5.2 多元复合函数的高阶偏导数 / 63
8.5.3 全微分形式的不变性 / 65
8.6 多元隐函数求导法 / 67
8.6.1 由一个方程所确定的隐函数求导公式 / 67
8.6.2 由方程组所确定的隐函数组的求导公式 / 71
8.7 多元函数微分法在几何中的应用 / 75
8.7.1 空间曲线的切线与法平面 / 75
8.7.2 空间曲面的切平面与法线 / 79
8.8 方向导数与梯度 / 82
8.8.1 方向导数 / 82
8.8.2 梯度 / 85
8.9 多元函数的极值和最值问题 / 88
8.9.1 无条件极值 / 88
8.9.2 条件极值 / 91
8.9.3 最大值和最小值 / 96
8.10 二元函数的泰勒公式 / 99
8.10.1 二元函数的泰勒公式 / 99
8.10.2 极值充分条件I的证明 / 101
本章概述 / 103
总复习题8 / 104

## 第9章 重积分 / 107

9.1 二重积分的概念与性质 / 107
9.1.1 二重积分的概念 / 107
9.1.2 二重积分的性质 / 109
9.2 二重积分的计算 / 112
9.2.1 直角坐标系下二重积分的计算 / 113
9.2.2 极坐标系下二重积分的计算 / 118
9.2.3 反常二重积分的计算 / 122
9.3 三重积分的概念与计算 / 124
9.3.1 三重积分的概念 / 124
9.3.2 三重积分的性质 / 125
9.3.3 直角坐标系下三重积分的计算 / 126
9.4 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 / 130
9.4.1 三重积分的换元法 / 130
9.4.2 利用柱面坐标计算三重积分 / 131
9.4.3 利用球面坐标计算三重积分 / 133
9.5 重积分的应用 / 134
9.5.1 空间几何体的体积 / 135
9.5.2 空间曲面的面积 / 135
9.5.3 平面薄片与空间立体的重心 / 137
9.5.4 平面薄片与空间立体的转动惯量 / 139
9.5.5 平面薄片与空间立体对质点的引力 / 140
本章概述 / 142
总复习题9 / 143

## 第10章 曲线积分 / 146

10.1 对弧长的曲线积分 / 146
10.1.1 对弧长的曲线积分的实际背景 / 146
10.1.2 对弧长的曲线积分的定义、性质及应用 / 146
10.1.3 对弧长的曲线积分的计算方法 / 148
10.2 对坐标的曲线积分 / 151
10.2.1 对坐标的曲线积分的定义与性质 / 151
10.2.2 对坐标的曲线积分的计算方法 / 153
10.3 格林公式及其应用 / 157
10.3.1 格林公式 / 157
10.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件 / 160
10.3.3 二元函数的全微分求积 / 163
本章概述 / 166
总复习题10 / 166

## 第11章 曲面积分 / 168


11.1 对面积的曲面积分 / 168
11.1.1 对面积的曲面积分的概念与性质 / 169
11.1.2 对面积的曲面积分的计算方法 / 170
11.2 对坐标的曲面积分 / 174
11.2.1 对坐标的曲面积分的概念与性质 / 175
11.2.2 对坐标的曲面积分的计算方法 / 178
11.3 高斯公式与斯托克斯公式 / 181
11.3.1 高斯公式 / 181
11.3.2 斯托克斯公式 / 185
11.3.3 空间曲线积分与路径无关的条件 / 189
11.4 场论初步及曲面积分的应用 / 193
11.4.1 场的概念 / 193
11.4.2 数量场的梯度 / 194
11.4.3 通量与散度 / 194
11.4.4 环流量与旋度 / 196
本章概述 / 200
总复习题11 / 203


## 第12章 无穷级数 / 206


12.1 常数项级数的概念及其性质 / 206
12.1.1 常数项级数的概念 / 206
12.1.2 常数项级数的性质 / 208
12.2 正项级数及其审敛法 / 210
12.2.1 正项级数的定义及其收敛的基本定理 / 211
12.2.2 正项级数的审敛法 / 211
12.3 交错级数、绝对收敛和条件收敛 / 220
12.3.1 交错级数及其审敛法 / 220
12.3.2 绝对收敛和条件收敛 / 222
12.3.3 绝对收敛级数的性质 / 223
12.4 幂级数 / 226
12.4.1 函数项级数的概念 / 226
12.4.2 幂级数及其收敛性 / 227
12.4.3 幂级数的运算及性质 / 231
12.5 函数的幂级数展开式及其应用 / 234
12.5.1 泰勒级数 / 234
12.5.2 将函数展开成幂级数的方法 / 235
12.5.3 幂级数的应用 / 238
12.6 傅里叶（Fourier）级数 / 242
12.6.1 三角级数、三角函数系的正交性 / 242
12.6.2 周期为2π的函数的傅里叶展开式 / 244
12.6.3 周期为2$l$的函数的傅里叶展开式 / 250
12.6.4 复数形式的傅里叶级数 / 251
本章概述 / 253
总复习题12 / 256


## 部分习题答案 / 261

## 参考文献 / 279

# 向量代数与空间解析几何　第7章

本章主要介绍两部分内容。第一部分是向量代数. 向量在理论研究和工程技术中均有广泛应用，是重要的数学工具. 在中学，我们已经学习了向量的一些基本概念和运算. 在本部分，我们首先回顾向量的基础知识，然后介绍向量积、混合积等概念. 第二部分是空间解析几何. 与平面解析几何类似，空间解析几何也是用代数的方法去研究几何，利用向量和坐标这两大工具，从代数的角度来处理空间几何问题. 本部分首先讨论空间平面与直线的方程，然后介绍空间曲面和曲线的方程及其特性.

本章是对高中所学的平面解析几何在几何维度上的推广，也是对高中所学空间几何的代数化. 将几何方法与代数方法结合，使形与数统一起来，是数学发展史上的一次重大突破. 通过本章的学习，为后续学习多元函数的微分学和积分学打下必要的基础.

## 7.1　空间向量及其代数运算

### 7.1.1　空间直角坐标系

为给空间中的点定位，我们按照图 7-1-1 那样安排三条相交于一定点 $O$ 且互相垂直的轴，组成右手坐标系（即握住右手，大拇指以外的手指从 $x$ 轴向 $y$ 轴弯曲，那么大拇指则指向正 $z$ 轴的方向），称为 $Oxyz$ **空间直角坐标系**，又称**三维笛卡儿坐标系**.

设 $M$ 为空间中任意一点，过 $M$ 点作三个平面分别垂直于 $x$ 轴，$y$ 轴和 $z$ 轴（见图 7-1-2），则三个垂足 $P$，$Q$，$R$ 在三个坐标轴上的坐标依次为 $x$，$y$，$z$，它们构成的三元有序数组 $(x, y, z)$ 就与点 $M$ 一一对应，称 $(x, y, z)$ 为点 $M$ 的坐标，其中 $x$，$y$，$z$ 分别称为点 $M$ 的横坐标、纵坐标和竖坐标，又称 $x$ 坐标，$y$ 坐标和 $z$ 坐标.

$x$ 轴上点的 $y$ 坐标和 $z$ 坐标都是零，即 $x$ 轴上点的坐标形如 $(x, 0, 0)$. 类似地，$y$ 和 $z$ 轴上点的坐标分别是 $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$.

每两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，因此在空间直角坐标系中有三个坐标面，分别为 $xOy$ 坐标面、$yOz$ 坐标面和 $zOx$ 坐标面，这三个坐标面相互垂直，把空间分成了八个称为**卦限**的部分，其中点的坐标都是正数的卦限称为第一卦限，第五卦限在第一卦限的下方，第二、三、四卦限，第六、七、八卦限分别按逆时针方向排列在 $xOy$ 坐标面的上方和下方. 八个卦限分别用大写罗马数字 I，II，…，VIII 表示（见图 7-1-3）.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中的两点，那么如何计算 $|M_1M_2|$ 呢？

分别过 $M_1$ 和 $M_2$ 这两点各作三个垂直于三个坐标轴的平面，这六个平面构成了一个以 $M_1M_2$ 为对角线的长方体（见图 7-1-4），该长方体的三条相邻的棱长分别等于 $P_1P_2$，$Q_1Q_2$ 和 $R_1R_2$ 的长度，即分别为

$$|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|,\ |z_1 - z_2|,$$

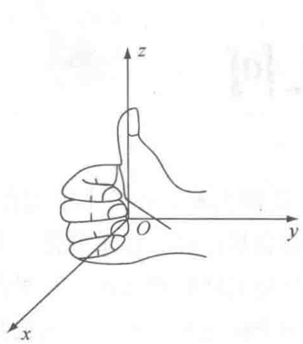



图 7-1-1

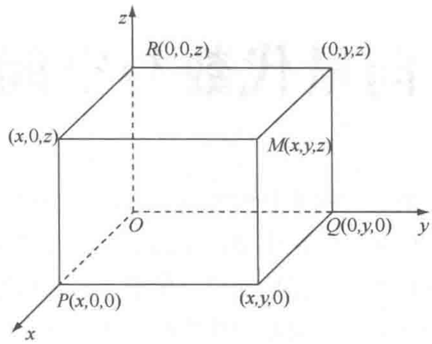



图 7-1-2

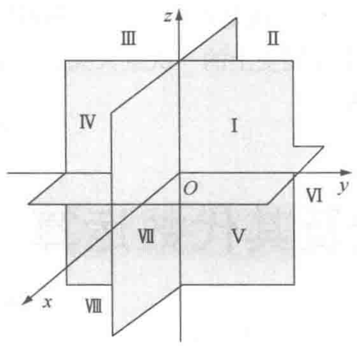



图 7-1-3

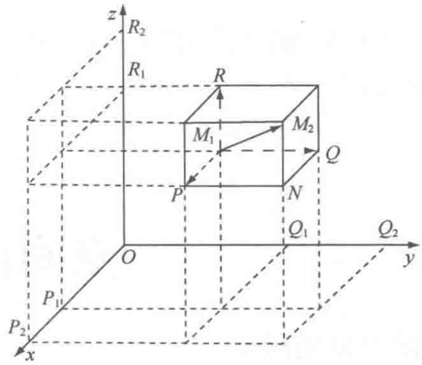



图 7-1-4

由此可得对角线 $M_1M_2$ 的长度，即点 $M_1$ 与 $M_2$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\,. \tag{7.1.1}$$

**例 7.1.1** 求与定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离恒为 $R$ 的动点 $M(x, y, z)$ 的轨迹.

**解** 由于 $|M_0M| = R$，从而有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R\,,$$

两边平方即可得到点 $M$ 的轨迹为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2\,.$$

**例 7.1.2** 求与两定点 $M_1(1,0,2)$, $M_2(-1,0,2)$ 距离相等的点 $M(x, y, z)$ 的轨迹.

**解** 由于 $|M_1M| = |M_2M|$，从而有

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}\,,$$

化简得点 $M$ 的轨迹为 $x=0$.

## 7.1.2 空间向量的概念

### 1. 向量的概念

有些量只有数量的属性. 举例来说，我们测量质量、长度、时间时，只需要记录一个数和一个合适的测量单位即可，这些就是数量. 而为了描述诸如力、位移或速度，仅仅只有数量的大小则是不够的，例如为描述一个力，我们不但需要记录力的大小还需要知道力的作用方向. 我们把这种既

有大小、又有方向的量称为**向量**. 通常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 或上方带有箭头的字母 $\vec{a},\vec{b}$ 表示. 跟平面向量一样，长度和方向是空间向量的两个重要特征. 在几何上，通常用有向线段来表示向量，其长度表示向量的大小，方向表示向量的方向. 例如起点为 $A$、终点为 $B$ 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 就表示一个确定的向量（见图 7-1-5）. 它的长度用 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 表示，也称为**向量的模**，是一个非负的数. 我们把模为 1 的向量称为**单位向量**；模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$ ，零向量的方向是任意的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ .

若一个向量与其起点位置无关，即在作任何平移变化时该向量保持不变，我们就称之为**自由向量**，简称向量. 如无特别说明，本书中所涉及的向量均为自由向量. 与之相对的是**固定向量**，例如力学中的作用力就是固定向量.

2. 向量的夹角

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ，将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移使它们有相同的起点，称它们所在射线的夹角 $\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ ，其取值范围为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ （见图 7-1-6）.

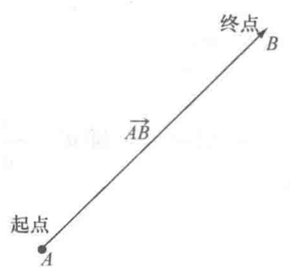



图 7-1-5

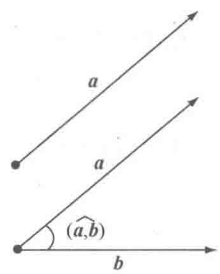



图 7-1-6

如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ （或 $\pi$ ），就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ （其中夹角为零，两向量同向；夹角为 $\pi$ 时，两向量反向）；如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ ，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ .

3. 向量的代数运算

（1）向量的加法运算

在物理学中，力、速度以及加速度等都按向量的方式相加.

**定义 7.1.1** 设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ，将它们平移到同一个起点，并以 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ （见图 7-1-7）. 此法称为向量加法的**平行四边形法则**.

向量加法的另一种方法：将 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点所构成的向量即为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ （见图 7-1-8），此方法称为向量加法的**三角形法则**. 此法则对平行向量仍然适用.

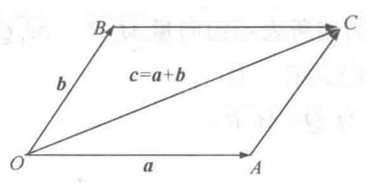



图 7-1-7

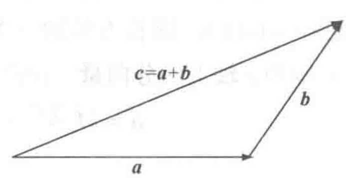



图 7-1-8

向量的加法满足下列性质：

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

② 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

③ 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

（2）向量的数乘运算

**定义 7.1.2** 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 以及实数 $\lambda$，规定 $\lambda$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，简称为**数乘**，其模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$（即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍），$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为：

① 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；②当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；③当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量的数乘满足以下性质（其中 $\lambda,\mu$ 为实数）：

① 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mu\boldsymbol{a}$；

② 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

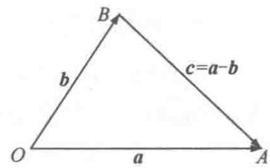



图 7-1-9

特别地，向量 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 有相同的长度但指向相反的方向，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差（见图 7-1-9）为：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

（3）向量的单位化

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，通常记为 $\boldsymbol{a}^0$，即 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，则有

$$\boldsymbol{a}=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{长度}}}{|\boldsymbol{a}|}\,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{方向}}}{\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}},$$

这样就把一个向量表示成它的长度和方向的乘积.

## 7.1.3 向量的坐标表示

1. 向量的坐标

若向量 $\overrightarrow{OM}$ 的起点在原点 $O(0,0,0)$，终点为 $M$，则向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标即为终点 $M$ 的坐标. 用从原点 $O(0,0,0)$ 到点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$ 的有向线段所表示的向量作为**标准单位向量**，分别用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示（见图 7-1-10），于是向量 $\overrightarrow{OM}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$\boldsymbol{r}$ 又称为**向径**. 对任意起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，如何求其坐标？

过 $M_1$ 和 $M_2$ 这两点各作三个垂直于三个坐标轴的平面，这六个平面构成了一个以 $M_1M_2$ 为对角线的长方体（见图 7-1-11），该长方体的三条相邻的棱所表示的向量 $\overrightarrow{M_1P}$，$\overrightarrow{M_1Q}$ 和 $\overrightarrow{M_1R}$ 就称为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $x$ 轴，$y$ 轴和 $z$ 轴上的**分向量**. 由向量的加法运算，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R},$$

其中

$$\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},$$

$$\overrightarrow{M_1Q} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = (y_2 - y_1)\boldsymbol{j},$$
$$\overrightarrow{M_1R} = \overrightarrow{R_1R_2} = (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.$$

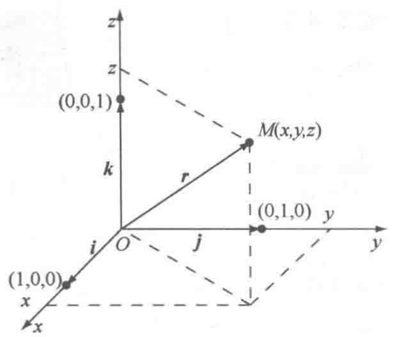



图 7-1-10

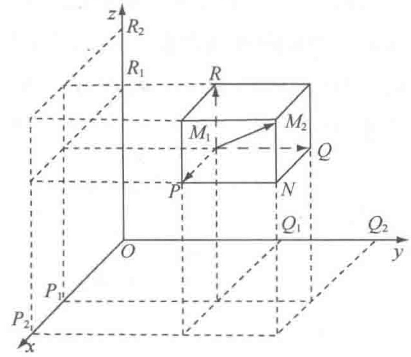



图 7-1-11

因此

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{7.1.2}$$

其中

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1,$$

分别称为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 $x$ 轴，$y$ 轴和 $z$ 轴上的**投影**，也称为**向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标**. 和点与点的坐标类似，向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 $a_x, a_y, a_z$ 一一对应，式（7.1.2）称为向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示，记为

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \text{ 或 } \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \tag{7.1.3}$$

利用向量的坐标表示，可将向量的加减以及数乘运算转化为其坐标的数量运算.

设

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \{a_x, a_y, a_z\},\quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

$\lambda$ 为任意实数，则

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

由此可得非零向量 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是：存在实数 $\lambda$，使得

$$b_x = \lambda a_x,\ b_y = \lambda a_y,\ b_z = \lambda a_z,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标分量成比例，则上式等价于

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}, \tag{7.1.4}$$

其中 $a_x, a_y, a_z$ 不全为零，若个别为零，则相应的分子也应为零.

**例 7.1.3** 把一个质点的速度向量 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ 表示成它的速率和方向的乘积.

**解** 与在平面上类似，速率是速度向量的大小，于是有

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

则

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \sqrt{14}\,\frac{\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}.$$

2. 向量的方向余弦

**定义 7.1.3** 设非零向量$\boldsymbol{a}$与 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴正向的夹角分别为 $\alpha,\beta,\gamma$（$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$），称 $\alpha,\beta,\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha,\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为$\boldsymbol{a}$的方向余弦（见图 7-1-12）．易知其坐标为

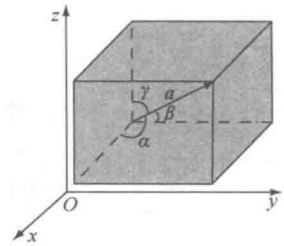


图 7-1-12

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

因此$\boldsymbol{a}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

易知方向余弦有下列两个性质：

（1）$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$；

（2）$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^0$，即

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

为与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量.

**例 7.1.4** 设 $M_1(1,1,\sqrt{2})$，$M_2(2,2,0)$，求向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角及与$\boldsymbol{a}$平行的单位向量.

**解** $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{2-1,2-1,0-\sqrt{2}\}=\{1,1,-\sqrt{2}\}$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2$，则

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

所以$\alpha=\frac{\pi}{3}=\beta$，$\gamma=\frac{3\pi}{4}$，与$\boldsymbol{a}$平行的单位向量为$\pm\boldsymbol{a}^0=\pm\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

## 习题 7-1

1．在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A(1,-2,2);\ B(1,2,-3);\ C(1,-2,-3);\ D(-2,-1,-3).$$

2．求点 $P(1,0,1)$

（1）到各坐标轴的距离；（2）到各坐标面的距离.

3．过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

4．求点 $(a,b,c)$ 关于

（1）各坐标面的对称点的坐标；（2）各坐标轴的对称点的坐标.

5．在 $xOy$ 坐标面上，求与三个已知点 $A(5,6,2)$，$B(4,7,-2)$ 和 $C(3,5,3)$ 等距离的点.

6．求空间中距原点和点 $(0,2,0)$ 等距离的点的轨迹.

7．给定两点 $A(-2,0,1)$，$B(2,3,0)$，在 $Ox$ 轴上有一点 $P$，满足 $|PA|=|PB|$，求点 $P$ 的坐标.

8．设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 在 $x$ 轴上的投影以及在 $z$ 轴上的分向量.

9．求平行于向量 $\boldsymbol{a}=\left\{1,-1,-\sqrt{2}\right\}$ 的单位向量.

10．已知两点 $M_1(3,\sqrt{2}-1,0)$ 和 $M_2(2,-1,1)$，求向量 $\overline{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

11．求 $p$，$q$ 的值，使三点 $A(1,2,3)$，$B(-2,1,p)$，$C(4,q,-1)$ 共线.

12．试证明以三点 $A(1,2,3)$，$B(9,-2,5)$，$C(3,0,8)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

13．从点 $A(1,-2,3)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,6\}$ 的方向取一线段长 $|AB|=28$，求点 $B$ 的坐标.

# 7.2 向量的乘积

## 7.2.1 向量的数量积

**定义 7.2.1** 设有向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，称数值 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称**点积**或**内积**），记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

向量的数量积满足以下性质：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

（2）交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（3）分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

（4）结合律（对数乘的结合律）$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为任意实数）；

（5）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

**数量积的坐标表示** 设两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}^2+a_yb_y\boldsymbol{j}^2+a_zb_z\boldsymbol{k}^2+(a_xb_y+a_yb_x)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad(a_yb_z+a_zb_y)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+(a_xb_z+a_zb_x)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

即

$$\{a_x,a_y,a_z\}\cdot\{b_x,b_y,b_z\}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

也就是说两向量的数量积等于其对应坐标乘积之和.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

从而

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\arccos\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

由此可得：$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 .$$

**数量积的物理意义**

一个向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$ 在非零向量 $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PM}$ 上的**向量投影**（见图 7-2-1）是指从点 $Q$ 向直线 $PM$ 引垂线，垂足为 $N$，由此确定的向量 $\overrightarrow{PN}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记为

$$proj_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a}\text{ 在 }\boldsymbol{b}\text{ 上的向量投影}).$$

若 $\boldsymbol{a}$ 表示一个力，则 $proj_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 表示在 $\boldsymbol{b}$ 的方向上 $\boldsymbol{a}$ 的有效力. 例如：我们用一个常力 $\boldsymbol{F}$ 拉一个箱子，则使箱子在位移方向 $\boldsymbol{s}$ 上向前运动的有效力就是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 上的向量投影（见图 7-2-2），其长度就是

$$|\boldsymbol{F}|\cos\theta ,$$

则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} .$$

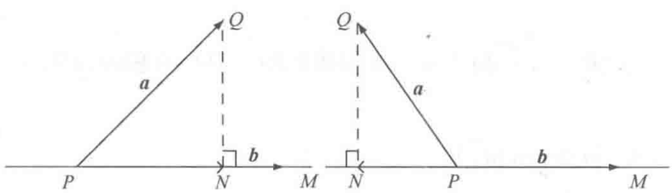



图 7-2-1　$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的向量投影

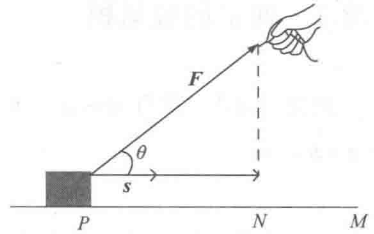



图 7-2-2

**例 7.2.1**　已知

$$|\boldsymbol{a}| = 1,\ |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2},\ (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{4},$$

求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

**解**　由数量积的定义及性质可知

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$= 1+2+2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 5 .$$

故

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = \sqrt{5} .$$

**例 7.2.2**　设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=2, |\boldsymbol{c}|=5$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

**解**　由已知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) = 0,$$

故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = -19 .$$

## 7.2.2　向量的向量积

**定义 7.2.2**　设有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，两者的向量积为一个新的向量 $\boldsymbol{c}$，其大小和方向按如下规定：

（1）$\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

（2）$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的方向符合右手法则（见图 7-2-3），则向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**（也称**叉积**或**外积**），记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

向量的向量积有如下性质：

（1）反交换律

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\quad\text{（见图 7-2-4）};$$

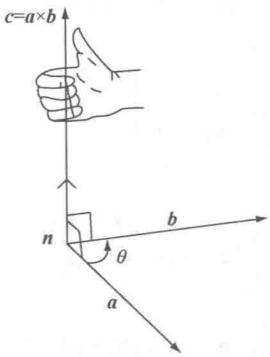


图 7-2-3

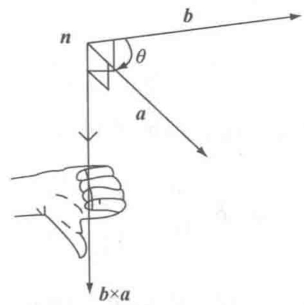


图 7-2-4

（2）分配律

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c};$$

（3）结合律（对数乘的结合律）

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\quad\text{（}\lambda\text{ 为任意实数）};$$

（4）$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，特别地，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由向量积的定义和性质，不难发现：标准单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 两两的向量积具有图 7-2-5 所示的规律.

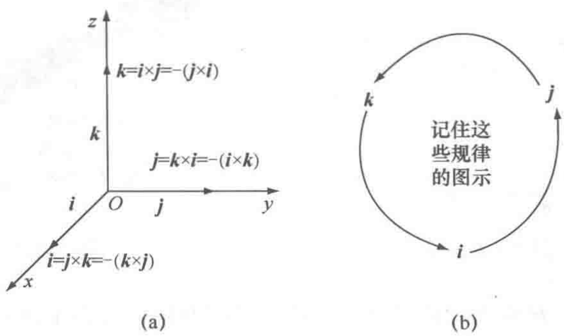


图 7-2-5

**向量积的坐标表示**　设两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+\\&\quad a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$