

 普通高等教育大学物理规划教材



近代物理实验及其 数据分析方法

◎ 郑勇林 杨 阔 葛泽玲 编著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育大学物理规划教材

近代物理实验及其 数据分析方法

郑勇林 杨 阔 葛泽玲



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是一部理论和实验密切结合的近代物理实验理论及实验数据分析方法的专业书, 包含近代物理实验及相关领域最新的研究成果。全书分为三部分: 第一部分从原子、分子层面介绍了物质性质的理论; 第二部分包含 13 个近代物理、薄膜材料制备和检测方面的实验, 并对每一个实验的原理、特性和设计方法、数据处理进行了讨论; 第三部分为拓展阅读, 介绍了相关的经典物理实验方法以及近代物理理论在科学和技术上较新的应用及理论成果。

本书兼顾不同层次的读者群, 可作为大专院校材料、工业制造、应用物理及师范(物理)、医学等学科专业近代物理实验、固体材料等课程的教学用书, 也可供材料相关专业的研究生、工程技术人员阅读、参考。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

近代物理实验及其数据分析方法 / 郑勇林, 杨阔, 葛泽玲编著. —北京: 电子工业出版社, 2016.10

ISBN 978-7-121-29977-3

I. ①近… II. ①郑… ②杨… ③葛… III. ①物理学—实验数据—分析方法—高等学校—教材 IV. ①O41-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 232846 号

策划编辑: 张小乐

责任编辑: 张小乐

印 刷: 三河市鑫金马印装有限公司

装 订: 三河市鑫金马印装有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 20 字数: 520 千字

版 次: 2016 年 10 月第 1 版

印 次: 2016 年 10 月第 1 次印刷

定 价: 49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: (010) 88254462, zhxl@phei.com.cn。

前 言

本书作者长期从事近代物理实验及材料领域的研究。本书是集作者多年科学研究、教学讲义、企业生产经验,同时在参考了国内外先进的同类书籍后撰写而成的。

书中首先讨论了近代物理实验中数据测量的误差问题,给出了实验数据的获得及检测的一些主要方法、技术和适用条件。第一部分,第1章至第4章讨论了物质的结构和各种物理性质;第5章至第7章从理论和实验两方面,讨论了微波理论及技术、真空理论及获得真空的技术、X射线的理论等内容。第二部分从物理的探索发现和研究过程、从材料探索研究的角度、从实验技能技术的角度选择和设计了13个实验。其中有著名的构思巧妙、方法简洁、富有启发性的密立根油滴实验、夫兰克-赫兹实验、塞曼效应实验等;实验中也涉及物质相互作用过程和机理的研究。例如,利用X射线技术对物质结构的测定及检测等内容;实验还涉及新型磁性材料的制备技术和新型磁性材料性质机理的研究。第三部分,着重从实验过程、实验方法及数据处理角度,介绍了实验数据的分析处理方法,并介绍了相关实验研究领域的研究成果,同时还以范文的形式,对实验过程、方法进行了分析讨论。例如,对应真空镀膜实验,详细研究了“亚稳态Fe/Cu颗粒膜脱附激活能分析”;在用X射线衍射仪进行物相分析中,详细研究了“Fe含量和粒径对Fe/Cu颗粒膜结构和磁性的影响”。希望通过这种方式,让读者从中学习一些科学研究方法。

本书有如下特点:

(1) 强调基本原理和应用,全书内容以讲清物理概念为主,避免过多地使用数学。介绍方法时,以基本原理和如何应用为主,让读者在最短的时间内,学到近代物理实验分析的方法。

(2) 本书适应面广,书中涉及的实验理论和实验个数相对较多,作为教材使用时,教师(或读者)可根据实际情况设计为一学期的课程(48~64学时)或半学期的课程(24~32学时),实验内容也可根据不同专业作不同的选择。

(3) 书中在实验报告上对学生怎样读书、怎样查资料、怎样撰写实验科学论文提出了一定要求,并对应实验在第三部分中给出了研究范文,从而突出理论与工程和再学习研究的联系。在书中还增加了一些实验探索提问,增加了与工程相结合的实验,这是为了在实验研究中能更好地帮助读者理论联系实际和指导读者充分地阅读参考文献。通过实验,既能学到理论知识和物理研究方法,又能体验到工程实践。通过实验和探索,可使学生的科研能力和独创精神得到更大的提高。

(4) 本书内容新颖、参考文献齐全。全书突出工程意识,突出问题探索过程中的思维方法,突出实验的技术性,突出实验的技能性,突出现代高新技术。在每一章中列出了近十年国内相关领域的参考文献与专著。为了方便各专业学生,本书未对学生的基础知识做特别的要求,涉及的相关知识会在书中介绍。

(5) 学生试验时要求阅读有关参考资料,回答有关实验提问。实验前要求写出实验研究课题、可行性报告和预期结果,经指导老师或工程人员讨论确认后方可进行实验;实验后要

求按照实验科研论文规范写出完整的实验报告。本书在编排上吸收了国内相应教材的特色，全书贯穿“做好基础实验，模拟科研实验，逐步地进行科学实验与探索研究”。

本书主要由郑勇林、杨阔、葛泽玲撰写，在出版过程中谭健敏、沈安国、杨敏、孙婷雅、李泽涛等参与了部分内容的撰写。本书的责任编辑张小乐也提出了很多好的修改建议，并对全书文字做了非常精细的校对。

本书在撰写过程中得到了西南大学郑瑞伦教授、西南应用磁学研究所沈安国高级工程师的关注和大力支持，得到了成都大学汪令江教授、长江师范学院周晏副教授的关心和鼓励，在此向他们表示诚挚的谢意。同时特别感谢电子工业出版社给予的大力支持和帮助。

成都大学、阿坝师范学院科技处、四川省教育厅科研项目（13ZB0034）为本书的撰写出版提供了经费，在此一并致谢。本书还借鉴了参考文献中的一些观点和图片，在此向有关作者表示衷心感谢。

由于笔者学识有限，书中难免有错误和不妥之处，恳望同行和读者斧正。



2016年9月于成都碧落湖

目 录

第一篇 理论部分

第 1 章 数据处理	1
1.1 随机变量与概率（密度）函数	1
1.1.1 系统误差与偶然误差	1
1.1.2 随机变量、总体及样本	2
1.1.3 概率（密度）函数	2
1.1.4 随机变量分布的数字特征量	4
1.2 物理量中几种常见的概率分布	6
1.2.1 二项式分布	6
1.2.2 泊松分布	6
1.2.3 正态分布和中心极限定理	8
1.2.4 样本的算术平均值分布及其方差、标准误差	11
1.2.5 正态样本测量结果的表示——绝对误差和相对误差	12
1.2.6 样本的方差（标准偏差）	13
1.3 测量结果及其参数估计	14
1.3.1 点估计	15
1.3.2 区间估计	17
1.4 测量数据的合理性检验	20
1.4.1 参数的显著性检验	20
1.4.2 概率分布的检验（ χ^2 皮尔逊检验）	22
1.5 实验结果的表示与间接测量中的误差传递	24
1.5.1 误差与不确定度	24
1.5.2 直接测量数据的处理步骤	25
1.5.3 间接测量结果的不确定度合成	26
1.6 曲线拟合	28
1.6.1 最小二乘法和数据曲线拟合	28
1.6.2 线性与非线性曲线拟合	30
1.6.3 多变量数据拟合	32
第 2 章 原子物理	34
2.1 单原子的轨道角动量、自旋角动量、能级的精细结构	34
2.1.1 轨道角动量与轨道磁矩	34
2.1.2 电子自旋角动量与自旋磁矩	36

2.1.3	电子自旋-轨道耦合与总角动量量子数 j	37
2.1.4	电子轨道-自旋耦合对能级的影响	37
2.2	L - S 耦合	39
2.2.1	L - S 耦合原理	40
2.2.2	L - S 耦合的能级次序与间隔	42
2.2.3	多电子原子跃迁的选择定则 (L - S 耦合)	42
2.3	原子磁矩	43
2.3.1	单电子原子总磁矩	44
2.3.2	多电子原子总磁矩	44
2.4	能级的塞曼分裂和塞曼效应	45
2.4.1	能级的塞曼分裂	45
2.4.2	塞曼效应	46
2.5	原子能级的超精细结构	49
2.5.1	核自旋效应	49
2.5.2	核电四极矩效应	52
2.5.3	同位素效应	56
第 3 章	物质磁性	57
3.1	磁性材料的磁学特征	57
3.2	磁学的基本量及单位制	59
3.3	磁性物质分类	61
3.3.1	抗磁性物质	61
3.3.2	顺磁性物质	62
3.3.3	铁磁性物质	64
3.3.4	反铁磁性和亚铁磁性物质	65
第 4 章	永磁材料	67
4.1	永磁材料磁性特征	67
4.1.1	永磁材料的重要指标	67
4.1.2	新型结构稀土永磁材料	71
4.2	提高永磁体性能的途径	72
4.2.1	提高材料剩磁 (B_r) 的方法	72
4.2.2	提高矫顽力 (H_c) 的方法	72
4.3	稀土永磁材料的制备技术	74
4.3.1	烧结稀土永磁材料的制备技术	74
4.3.2	黏结稀土永磁材料及其制备技术	78
4.3.3	热压-热变形稀土永磁材料的制备技术	79
4.3.4	细微磁粉颗粒的制备	79
4.4	烧结 Sm-Co 永磁材料	80
4.4.1	低温度系数烧结 Sm-Co 永磁材料	81

4.4.2 烧结 2:17 型 Sm-Co 永磁材料的关键制备技术	83
-----------------------------------	----

第 5 章 微波技术	85
------------	----

5.1 微波及其技术的应用	85
---------------	----

5.2 微波振荡器	86
-----------	----

5.2.1 谐振器的电磁能量关系及品质因数 Q	87
---------------------------	----

5.2.2 体效应管(耿氏二极管)振荡器	89
----------------------	----

5.2.3 矩形谐振腔	91
-------------	----

5.3 矩形截面波导中的 TE_{10} 、 TE_{102} 波	93
---------------------------------------	----

5.3.1 矩形截面波导中的 TE_{10} 波的电磁场结构	93
----------------------------------	----

5.3.2 TE_{10} 波的传输特性	94
------------------------	----

5.3.3 矩形截面波导中 TE_{102} 波的电磁场结构	96
----------------------------------	----

5.3.4 影响腔体谐振频率的因素	96
-------------------	----

5.3.5 传输线上的反射和驻波	97
------------------	----

5.4 电子自旋共振的基本原理	98
-----------------	----

5.4.1 磁场和磁矩	98
-------------	----

5.4.2 自旋弛豫	99
------------	----

第 6 章 真空技术	104
------------	-----

6.1 真空的基本性质	104
-------------	-----

6.1.1 真空的基本性质	104
---------------	-----

6.1.2 真空状态下气体分子的统计规律	105
----------------------	-----

6.1.3 物质的蒸发速度	106
---------------	-----

6.2 真空的应用	106
-----------	-----

6.2.1 低真空($1 \times 10^5 \sim 1 \times 10^2$ Pa)	106
---	-----

6.2.2 中真空($1 \times 10^2 \sim 1 \times 10^{-1}$ Pa)	107
--	-----

6.2.3 高真空($1 \times 10^{-1} \sim 1 \times 10^{-6}$ Pa)	107
---	-----

6.2.4 超高真空($1 \times 10^{-6} \sim 1 \times 10^{-12}$ Pa)	107
---	-----

6.3 真空的获得	107
-----------	-----

6.3.1 真空的获得	108
-------------	-----

6.3.2 2X-2 型旋片式真空机械泵	108
----------------------	-----

6.3.3 油扩散泵	110
------------	-----

6.4 真空的测量	110
-----------	-----

6.4.1 热偶真空规	111
-------------	-----

6.4.2 热阴极电离真空规	111
----------------	-----

6.4.3 SG-3 型复合真空计	112
-------------------	-----

6.4.4 冷阴极电离真空计	112
----------------	-----

6.4.5 真空规的标定	113
--------------	-----

6.5 真空系统的检漏	113
-------------	-----

6.6 真空材料的清洁处理	113
---------------	-----

第 7 章	X 光技术	115
7.1	X 射线衍射的晶体学基础知识	115
7.1.1	晶体和非晶体	115
7.1.2	十四种布拉维格子和七大晶系	118
7.1.3	倒格子	121
7.2	X 射线基础	124
7.2.1	概述	124
7.2.2	X 射线的产生	126
7.2.3	X 射线光谱	129
7.3	X 射线与物质的相互作用	131
7.4	X 射线的衍射	133
7.5	X 射线的检测	136
7.6	X 射线的防护	141
7.6.1	X 射线的防护	141
7.6.2	X 射线的防护标准	141

第二篇 实验部分

实验 1	密立根油滴实验	142
实验 2	弗兰克-赫兹实验	147
实验 3	塞曼效应	153
实验 4	微波电子自旋共振实验	160
实验 5	铁磁共振实验	167
实验 6	漫反射全息照相	176
实验 7	光信号的空间频谱与空间滤波	181
实验 8	烧结 2:17 型 Sm-Co 永磁材料的制备及检测	185
实验 9	真空镀膜	189
实验 10	多晶体 X 射线衍射及德拜相的摄取与分析	194
实验 11	用 X 射线衍射仪进行物相分析	205
实验 12	用光栅摄谱仪进行光谱分析	215
实验 13	氢 (氘) 原子光谱	226

第三篇 拓展阅读

阅读 1 密立根油滴实验	231
阅读 2 利用激光冷却原子束测量氢原子精密光谱	234
阅读 3 塞曼效应实验	236
阅读 4 电子自旋共振	242
阅读 5 磁性纳米颗粒系统的铁磁共振和共振线宽分析	253
阅读 6 全息照片的冲洗方法	260
阅读 7 OIP 光学信息处理系统	264
阅读 8 Sm-Co 永磁合金的制备	271
阅读 9 真空镀膜	277
阅读 10 X 射线机的操作规程	289
阅读 11 Fe 含量和粒径对 Fe/Cu 颗粒膜结构和磁性的影响	290
阅读 12 使用摄谱仪的注意事项	296
阅读 13 WGD-8A 型组合式光栅光谱仪	296
附表	298
参考文献	305

第一篇 理论部分

第1章 数据处理

在物理实验中，我们不仅要对实验中所获得的数据进行分析，还要设计模型以及对预期的结果或新的规律做出判断。但困难在于物理量的真值不可能得到，由于物理量本身的性质，测量中随机、偶然因素的存在，导致测量结果或多或少地偏离真值而存在一定的误差。因而，必须合理应用误差知识对测量数据进行分析处理，以便最大限度地减小误差，使实验结果更接近于被测量的真值，从而得出科学的结论。

测量结果是有误差的，也就是说，测量结果与待测量的实际数值（或称真值）是有差异的，这一差异的大小称为测量结果的误差，即某次测量的结果 x 与待测量的真值 μ 之差，定义为这次测量结果的误差 e ，表示为 $e = x - \mu$ 。

为什么测量结果有误差呢？这可以从下列几个方面来看：首先，测量是用各种仪器和设备来进行的，而仪器、设备的精度与科学技术和生产力的发展水平有关。例如，由于技术的原因，我们还不能以 $0.0001\text{ }^{\circ}\text{C}$ 以上的精度来测量物体的温度。其次，在实用中我们允许测量结果有一定误差，并且可以这样说，不给出测量结果的误差的实验结果是没有意义的。当然，提高仪器设备的精度可以减小测量的误差，但这是要付出代价的。所以，在实际工作中，如何对测量工作提出合理的要求是很重要的，也就是说，我们先要根据测量结果允许的误差大小，选定所需要的实验方法，做好实验。

另外，审慎分析和计算测量结果的误差也是很重要的。事实上，在实验中无论是随机误差还是物理量本身实际数值的统计涨落及物理量之间关联等引起的误差，它们都遵从一定的统计规律。实验数据处理的任务就是要在测得的数据中找出规律性的东西。要做好这一工作需要用数学上的“概率论和数理统计”方法来处理，本章就实验中涉及的有关数据处理的概念做简要介绍。

1.1 随机变量与概率（密度）函数

1.1.1 系统误差与偶然误差

测量某一个物理量时，总是先根据测量要求，选定一种测量方法，对所用仪器的规格、操作规程、实验步骤和实验条件等做出规定，然后用上述设备及方法进行测量。因此，测量过程中的误差来源有如下几个方面：

（1）测量方法的不完善：①理论方法误差，所依据的理论本身具有近似性或所用的实验方法不完善；②测量的设备安装不合理，仪器调整不当；③在具体测量过程中，没有满足测量方法中规定的实验条件和操作规程。

- (2) 仪器、设备本身不完善导致的固有误差。
- (3) 观察者本身生理感觉器官或心理特点的限制产生的误差。
- (4) 物理现象的随机性（或称统计起伏）引起的误差。

这就是说，测量结果的误差是由两类误差组成的，即系统误差和随机误差。

系统误差的定义：对某一物理量 x 进行了多次测量，测量结果用它的算数平均值 $\bar{x}$ 来表示，即

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.1)$$

测量结果 $\bar{x}$ 与真值 μ 的差值，称为这一测量结果的系统误差，即

$$e_{\text{系统}} = \bar{x} - \mu \quad (1.2)$$

假设我们进行的是没有系统误差的测量过程，或者对所有的系统误差进行了修正，测量结果还是会有随机起伏的，这类误差称为随机误差（或称为偶然误差）。处理这类误差一般都使用多次测量的方法，当测量次数很多时，可以认为它的算数平均值就是待测量的真值，即

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.3)$$

物理学中称 $x_i - \mu$ 为第 i 次测量结果的随机误差。

1.1.2 随机变量、总体及样本

从概率统计的角度看，测量某一物理量是一个随机事件。即如果每次测量的结果用一个数 x 来表示，那么 x 是一个随机变量，在一定条件下，对某一物理量的测量，测得的值即为该随机变量的随机值。

对一个随机变量进行无限多次的测量，这些无限多个数据组成了该随机变量的总体。但是，在实际工作中，我们只能进行有限次的测量，例如 n 次测量的随机值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，也就是从总体中随机抽出有限个数（ n ）的随机值，这有限个数的随机值的集合称为样本。抽取的随机值的个数，或测量次数 n 称为样本容量。随机样本的容量足够大时，就呈现出随机总体的性质，不同样本所反映的性质是不同的。常遇到的问题是，在有限次测量的情况下去估计总体的性质或处理测量的结果。

随机变量可分为两种类型：①随机变量只能在数轴上取一些孤立的值，称为离散型随机变量。例如，放射源放射出的粒子数只可能是一些整数。②随机变量的随机值在数轴上是连续的，这类随机变量称为连续型随机变量。例如，测量一个谐振腔的谐振频率，它可以是谐振点邻近域内的任何一个值。

1.1.3 概率（密度）函数

1.1.3.1 概率的概念

在同一条件下，对某一物理量进行测量，由于测量中存在无法控制的某些偶然因素或被测对象的随机性，使其测量值 A 可能出现，也可能不出现。设在 n 次的测量中，测量值出现

m 次, 则将测量出现的次数 m 与总的测量次数 n 的比, 称为 n 次测量中 A 出现的概率, 也叫频率。

1.1.3.2 分布函数和概率(密度)函数

如果用 x_i 来表示变量 x 的测量值, 而且对任何实数 α , 若 $x_i < \alpha$ 有确定的概率, 则称 x 为一个随机变量, 它的每一个随机值都以一定的概率出现。各随机值所对应的概率构成了随机变量的概率分布, 用 $P(x)$ 来表示, 概率分布反映了随机变量的全部特征。

对于离散型随机变量 x , 它只能取可数的数值 $x_1, x_2, \dots$, 除了用分布函数外, 还常用概率(密度)函数 $p(x)$ 来描述它的概率分布。概率(密度)函数在某一点 x_i 的值等于随机变量 x 取值 x_i 的概率, 即

$$p(x) \equiv P(x = x_i) \quad (1.4)$$

所以, 有 $P(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$ 及 $\sum_x p(x_i) = P(x = \infty) = 1$ (对 x 的所有可能取值求和)。离散型随机变量概率(密度)函数和分布函数形状如图 1.1(a)所示。

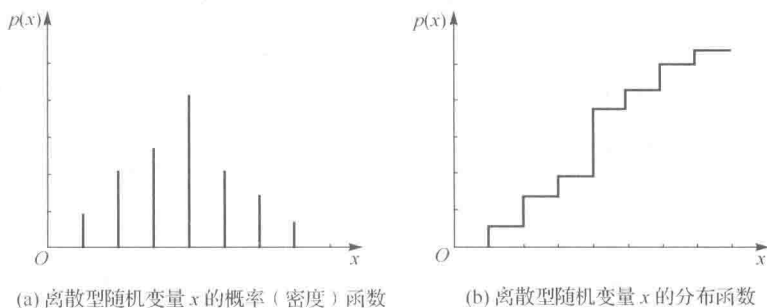


图 1.1 离散型随机变量 x 的概率(密度)函数和分布函数图

随机变量 x 的取值小于或等于 x_i 时的概率 $P(x \leq x_i)$ 定义为随机变量 x 的分布函数, 即

$$P(x) \equiv P(x \leq x_i) \quad (1.5)$$

显然, 分布函数必满足

$$P(x_i = -\infty) = 0, \quad P(x_i = \infty) = 1$$

分布函数 $P(x)$ 与概率(密度)函数 $p(x)$ 之间的关系为

$$P(x) = \sum_{x \leq x_i} p(x_i) \quad (1.6)$$

式中, $\sum$ 表示对所有满足 $x \leq x_i$ 的 $p(x_i)$ 求和。显然, $P(x)$ 是一个单调上升函数, 如图 1.1(b) 所示。

对连续型随机变量的分布函数 $P(x)$ 的定义与离散型的相同, 即式 (1.5)。但是, 它的概率(密度)函数 $p(x)$ 则定义为

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (1.7)$$

或

$$p(x)dx = dP(x) = P(x_i < x \leq x_i + dx)$$

即概率(密度)函数在某一点的值就是随机变量在该点的概率密度。随机变量的值落在某点附近一个无限小的区间内的概率等于该点的概率(密度)函数的值和无限小区间的间距的乘积。 $P(x)$ 与 $p(x)$ 关系可表示为

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (1.8)$$

显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = P(\infty) = 1 \quad (1.9)$$

这就是归一化条件。

如图 1.2(a)所示, 概率(密度)函数 $p(x)$ 在横轴上任一点 x' 左边曲线下的面积, 就是分布函数 $P(x)$ 在该点的值。由归一化条件可知, 密度曲线下的总面积为 1。随机变量 x 的分布函数 $P(x)$ 在概率(密度)函数 $p(x)$ 图上可由式 $P(x') = \int_{-\infty}^{x'} p(x) dx$ 表示, 其曲线如图 1.2(b)所示。 $P(x)$ 是一条单调上升的曲线, 其最大值趋于 1。

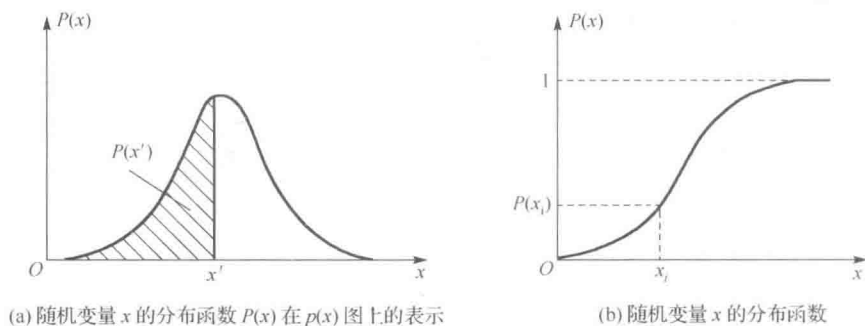


图 1.2 分布函数 $P(x)$ 在 $p(x)$ 图上的表示及曲线下面积的意义

1.1.4 随机变量分布的数字特征量

随机变量 x 的概率(密度)函数 $p(x)$ 全面地描述了随机变量的性质(为了方便起见, 以后不再区分 x 和 x_i , 即用 x 表示随机变量或随机值)。如果已知一个概率(密度)函数的形式, 那么只要给出函数式中参数的数值, 则随机变量的分布就完全确定了。而随机变量的性质更多地是用相关的特征数字来描述。在各种特征量中最重要的有期望值、方差和协方差, 下面分别予以介绍。

1.1.4.1 期望值

随机变量 x 的期望值 $\langle x \rangle$ (或记为 $E\{x\}$), 对于连续型随机变量 x , 定义为

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \quad (1.10)$$

期望值是随机变量概率密度曲线的重心位置。它与实验中测量结果的平均值的概念有相似之处, 但又不完全相同。对于单峰、对称的概率密度曲线, 期望值就是与曲线峰值对应位置处的值。

随机变量 x 的 n 次幂的期望值称为 x 的 n 次矩, 即

$$\langle x^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx \quad (1.11)$$

对于离散型随机变量, 期望值定义为

$$\langle x \rangle \equiv \sum x_i p(x_i) \quad (1.12)$$

$$\langle x^n \rangle \equiv \sum x_i^n p(x_i) \quad (1.13)$$

式中, $p(x)$ 为随机变量 x 的概率 (密度) 函数。

1.1.4.2 方差

随机变量 x 的方差 $\sigma^2(x)$ (或记为 $\text{Var}(x)$) 定义为

$$\sigma^2(x) \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \equiv \int (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx \quad (1.14)$$

即 $\text{Var}(x)$ 为 x 与其期望值 $\langle x \rangle$ 之差的平方的期望值。

离散型随机变量的方差表示为

$$\text{Var}(x) = \sum_x (x - \langle x \rangle)^2 p(x_i) \quad (1.15)$$

方差的平方根取正值称为随机变量的标准误差, 即

$$\sigma(x) = [\text{Var}(x)]^{1/2} \quad (1.16)$$

方差反映了随机变量的离散程度, 它的值越大意味着随机变量 x 在期望值 $\langle x \rangle$ 附近分布越广, 也就是随机值的分布范围越大。

方差或标准误差和期望值都是总体的分布参量。

1.1.4.3 协方差

N 维随机变量 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 中, 任意两个随机变量 x_i 、 x_j 之间的相关程度用协方差 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 来表示。协方差定义为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_j) &\equiv \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &\equiv \iint (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) p(x_i, x_j) dx_i dx_j \end{aligned} \quad (1.17)$$

如果一个随机变量 x_i 的概率分布与另一个随机变量 x_j 的取值没有任何关联, 也就是说, 这两个随机变量是相互独立的, 根据概率公式

$$p(x_i, x_j) = p(x_i) p(x_j) \quad (1.18)$$

可见, 当 x_i 和 x_j 相互独立时, 协方差 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 的值为 0; 反之, 当 $\text{Cov}(x_i, x_j) = 0$ 时, x_i 和 x_j 可能相互独立, 也可能不相互独立; 当 $\text{Cov}(x_i, x_j) \neq 0$ 时, 则称它们是相关的。 x_i 和 x_j 的相关性越大, 则 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 的绝对值越大, 但是, $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 的大小不只与它们的相关程度有关, 还与方差 $\sigma^2(x_i)$ 、 $\sigma^2(x_j)$ 的大小有关。因此, 为了更确切地反映两个随机变量的相关程度, 需引入相关系数 $\rho(x_i, x_j)$ 的概念, 即

$$\rho(x_i, x_j) \equiv \frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{\sigma(x_i) \sigma(x_j)}$$

其中 $\sigma(x_i)$ 、 $\sigma(x_j)$ 分别为 x_i 和 x_j 的标准误差。可以证明

$$|\rho(x_i, x_j)| \leq 1 \quad (1.19)$$

当 $\rho(x_i, x_j) = 0$ 时, x_i 和 x_j 互不相关; 当 $\rho(x_i, x_j) \neq 0$ 时, 表明 x_i 和 x_j 之间存在一定程度的线性相关; 当 $\rho(x_i, x_j) > 0$ 时, 一个随机变量增加, 另一个随机变量有按线性增大的趋势, 这时称 x_i 和 x_j 正相关; 当 $\rho(x_i, x_j) < 0$ 时, 称 x_i 和 x_j 负相关; 当 $\rho(x_i, x_j) = +1$ (或 -1) 时, 则称为正 (或负) 全相关, 这时 x_i 和 x_j 之间存在线性关系。

1.2 物理量中几种常见的概率分布

概率 (密度) 函数是随机变量最重要的属性, 不同的随机变量可以有不同或相同的概率 (密度) 函数。在物理实验中, 各个观测量是随机变量, 这些观测值有连续的也有离散的, 如核物理中离子的分布是离散的。故对这些测量数据的分析处理, 必须应用建立在概率论和数理统计基础上的误差理论。通常实验中只能进行有限次观测, 不可能对随机变量的全部进行研究, 但必须知道各种可能值的概率, 即随机变量的分布。本节将讨论几种常用的概率 (密度) 函数; 同时, 还讨论一些统计量 (实测数据的函数) 所服从的概率分布。

1.2.1 二项式分布

设某随机事件 x 进行独立测量时出现的概率为 p , 不出现的概率为 q ($q = 1 - p$), 则在 n 次独立试验中 x 出现 k 次的概率为

$$p(x) = p_k = p(x = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1.20)$$

式中, 系数 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 是在 n 次独立试验中 x 出现 k 次, 而有 $n-k$ 次不出现的组合数。

由于 $p(k)$ 恰好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中的第 $k+1$ (一般) 项, 故称它为二项式分布。二项式分布是离散型分布, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots, n$, n 为有限值。服从二项式分布的随机变量的期望值 $\langle x \rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为 $\bar{k} = np$ 和 $\sigma^2(k) = np(1-p)$, 所以也常将式 (1.20) 称为随机变量 x 服从参数为 n, p 的二项式分布。

1.2.2 泊松分布

泊松分布是离散型分布, 当二项式分布中的 n 很大而事件出现的概率 p 又很小, 且它们的乘积 $np = \lambda > 0$ 是一个常数时, 则有

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n}{n} \right) \left(\frac{n-1}{n} \right) \cdots \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$p(x = k) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (1.21)$$

服从式 (1.21) 的分布称为泊松分布。可以证明, 服从泊松分布的随机变量的期望值 $\langle x \rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为

$$\langle x \rangle = \bar{k} = \lambda, \quad \sigma^2(x) = \sigma^2(k) = \lambda \quad (1.22)$$

式(1.22)表示的泊松分布还可图1.3表示, 随着参数 λ 的增大, 由图可见泊松分布逐步趋向对称。在实际应用中, 当 $n \geq 10$ 、 $p \leq 0.1$ 时, 就可选用泊松分布来描述。在物理问题中, 例如, 对有 n 个原子核的体系, 单位时间内 n 个原子核发生衰变 p 和不发生衰变 q 的事件, 是服从二项式分布的。当系统中的原子核数 n 很大而单位时间内的衰变 p 又很小时, 此时 $np = \lambda > 0$ 。在核衰变中 λ 的意义是明确的, 即在单位时间内, n 个原子核中发生衰变的概率 p 为 λ/n , n 是事件的总数, 因此 λ 是单位时间内发生核衰变的事件数。

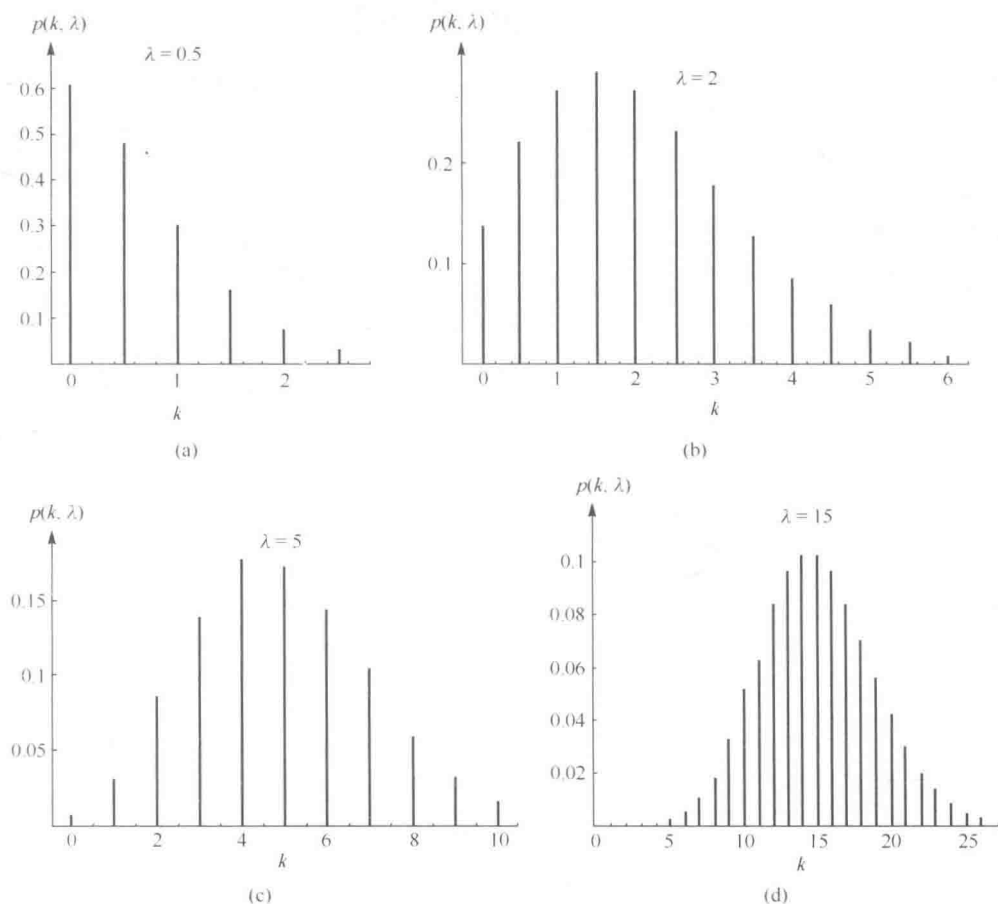


图 1.3 泊松分布

假设对每秒核衰变数 x 进行很多次测量(例如100次以上), 得到平均值 $\bar{x} = 2$, 那么, 可以近似地认为它的期望值 $\langle x \rangle = \lambda \sim 2$ 、方差 $\sigma^2(x) = \lambda \sim 2$ 。由式(1.21), 可计算得 x 取值0, 1, 2, 3, 4, 5时的概率分别为

$$p(0) = 0.135, \quad p(0.5) = 0.216, \quad p(1) = 0.271, \quad p(1.5) = 0.288, \quad p(2) = 0.271, \quad p(2.5) = 0.230, \\ p(3) = 0.180, \quad p(3.5) = 0.132, \quad p(4) = 0.090, \quad p(4.5) = 0.059, \quad p(5) = 0.036, \quad p(5.5) = 0.021$$

因此, 出现 $x > \bar{x}$ 的概率与出现 $x < \bar{x}$ 的概率是不同的, 即概率函数是不对称的, 图1.3(b)就是上述概率分布的图形表示。如果测得的平均值 $\bar{x} = 15$, 则有 $\langle x \rangle = \lambda \sim 15$, $\sigma^2(x) = \lambda \sim 15$ 。从图1.3(d)可看出, 这时的概率分布已近似地呈现对称形, 它与正态分布十分相似。