

国防科学技术大学惯性技术实验室优秀博士学位论文丛书

无人机地磁辅助定位及 组合导航技术研究

Research on
Geomagnetism Aided Localization and Integrated
Navigation Techniques for UAVs

刘颖 曹聚亮 吴美平 著 



国防工业出版社
National Defense Industry Press

国防科学技术大学惯性技术实验室优秀博士学位论文丛书

无人机地磁辅助定位及 组合导航技术研究

**Research on Geomagnetism Aided Localization and
Integrated Navigation Techniques for UAVs**

刘颖 曹聚亮 吴美平 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

无人机地磁辅助定位及组合导航技术研究/刘颖,曹聚亮,吴美平著. —北京:国防工业出版社,2016.6

(国防科学技术大学惯性技术实验室优秀博士学位论文丛书.地磁导航技术)

ISBN 978-7-118-10267-3

I. ①无… II. ①刘… ②曹… ③吴… III. ①无人驾驶飞机—地磁导航—研究 IV. ①V249.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第093897号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

三河市众誉天成印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 11¼ 字数 200千字

2016年6月第1版第1次印刷 印数 1—1500册 定价 50.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

国防科学技术大学惯性技术实验室
优秀博士学位论文丛书
编委会名单

主任委员 胡小平 吴美平

委 员 杨功流(北京航空航天大学)
陈家斌(北京理工大学)
李四海(西北工业大学)
徐晓苏(东南大学)
蔡体菁(东南大学)
刘建业(南京航空航天大学)
赵 琳(哈尔滨工程大学)
胡柏青(海军工程大学)
王跃钢(火箭军工程大学)
吴文启(国防科学技术大学)

秘 书 练军想

序

大学之道，在明明德，在亲民，在止于至善。

——《大学》

国防科学技术大学惯性导航技术实验室，长期从事惯性导航系统、卫星导航技术、重力仪技术及相关领域的人才培养和科学研究工作。实验室在惯性导航系统技术与应用研究上取得显著成绩，先后研制我国第一套激光陀螺定位定向系统、第一台激光陀螺罗经系统、第一套捷联式航空重力仪，在国内率先将激光陀螺定位定向系统用于现役装备改造、首次验证了水下地磁导航技术的可行性，服务于空中、地面、水面和水下等各种平台，有力地支撑了我军装备现代化建设。在持续的技术创新中，实验室一直致力于教育教学和人才培养工作，注重培养从事导航系统分析、设计、研制、测试、维护及综合应用等工作的工程技术人才，毕业的研究生绝大多数战斗于国防科技事业第一线，为“强军兴国”贡献着一己之力。尤其是，培养的一批高水平博士研究生有力地支持了我军信息化装备建设对高层次人才的需求。

博士，是大学教育中的最高层次。而高水平博士学位论文，不仅是全面展现博士研究生创新研究工作最翔实、最直接的资料，也代表着国内相关研究领域的最新水平。近年来，国防科学技术大学研究生院为了确保博士学位论文的质量，采取了一系列措施，对学位论文评审、答辩的各个环节进行严格把关，有力地保证了博士学位论文的质量。为了展现惯性导航技术实验室博士研究生的创新研究成果，实验室在已授予学位的数十本博士学位论文中，遴选出 23 本具代表性的优秀博士学位论文，分成五个专题，结集出版，以飨读者。这五个专题分别是：(1)激光陀螺惯导系统技术；(2)地磁导航技术；(3)嵌入式组合导航技术；(4)航空重力测量技术；(5)自主导航理论与方法。

结集出版的目的是有三：其一，不揣浅陋。此次以专著形式出版，是为了尽可能扩大实验室的学术影响，增加学术成果的交流范围，将国防科学技术大学惯性导航技术实验室的研究成果，以一种“新”的面貌展现在同行面前，希望更多的

同仁们和后来者,能够从这套丛书中获得一些启发和借鉴,那将是作者和编辑都倍感欣慰的事。其二,不宁为是。以此次出版为契机,作者们也对原来的学位论文内容进行诸多修订和补充,特别是针对一些早期不太确定的研究成果,结合近几年的最新研究进展,又进行了必要的修改,使著作更加严谨、客观。其三,不关毁誉,唯求科学与真实。出版之后,诚挚欢迎业内外专家指正、赐教,以便于我们在后续的研究工作中,能够做得更好。

在此,一并感谢各位编委以及国防工业出版社的大力支持!

吴美平

2015年10月09日于长沙

前 言

无人机因其特殊而优良的战术性能在军事上得到了广泛应用和迅速发展,而高精度的自主导航技术是保障无人机成功完成各项任务的关键技术之一。因此对新的适用于无人机的组合导航方法的研究一直没有停止过。本书编写的目的就是以惯性导航系统为基础,探索一种新的适用于无人机的组合导航模式,力求满足无人机高精度、全自主导航要求。

地磁辅助惯性导航是利用地球物理场进行导航的一种方式,它能够利用地磁数据与运行轨迹的相关性定位载体位置,具有全天时、全天候、全地域、高隐蔽性等优良特征,是实现无人机无源自主导航的有效手段。本书紧密结合无人机导航系统的高精度、高效率等需求,全面系统地介绍了以地磁场为辅助手段实现导航定位的理论和方法。

全书共分为7章。第1章概述了无人机地磁辅助导航系统的工作原理、关键技术和国内外发展现状。第2章在深入分析地磁匹配特征和匹配性能影响因素的基础上,给出了地磁匹配算法研究框架和地磁匹配关键参数选取方法。第3章为实现高效、高精度匹配定位,建立了地磁匹配纯平移模型和仿射模型,并在相应模型下提出了一系列地磁匹配新算法,包括基于等值线约束的地磁匹配算法、迭代多尺度地磁匹配算法、基于约束粒子群的智能地磁匹配算法等。第4章介绍了模糊匹配多值解条件下的批处理组合导航算法。第5章为提高组合导航的观测更新频率,对具有连续修正能力的序贯组合导航技术进行了研究,介绍了基于约束线性化EKF的组合导航算法和基于边缘化粒子滤波的组合导航算法。第6章研究了地磁辅助导航策略并给出了多个实验验证结果。

本书在胡小平教授、吴美平教授和谢红卫教授的指导下完成,在此表示最诚挚的感谢。此外本书写作过程中参考了有关书籍和文献,在此也向作者一并致谢。

由于作者水平有限,难免存在不足之处,敬请读者不吝指正。

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 无人机地磁辅助定位	1
1.2 无人机地磁辅助导航系统工作原理和关键技术	3
1.2.1 地磁辅助导航系统的工作原理	3
1.2.2 地磁辅助导航系统的关键技术	5
1.3 地磁辅助导航技术的国内外研究现状	8
1.3.1 地磁辅助导航系统的发展现状	8
1.3.2 辅助导航技术研究现状	10
第 2 章 地磁匹配问题综合分析	16
2.1 地磁场和地磁特征	16
2.1.1 地磁场和地磁场模型	16
2.1.2 地磁特征	18
2.1.3 实时地磁异常数据的获得	19
2.2 地磁匹配研究框架和性能评估标准	20
2.2.1 地磁匹配原理	20
2.2.2 地磁匹配研究框架	21
2.2.3 地磁匹配性能评估标准	24
2.3 地磁匹配算法中重要参数的选取原则	25
2.3.1 不确定域的选取	26
2.3.2 网格量化值	27
2.3.3 采样频率的选取	28
2.4 地磁匹配长度估计方法	29

2.4.1	匹配长度与虚定位分析	30
2.4.2	基于逐点迭代的匹配长度估计算法	32
2.4.3	仿真验证	35
2.5	本章小结	37
第3章	无人机地磁匹配定位算法及快速检索策略	38
3.1	地磁匹配模型研究	38
3.1.1	纯平移模型	39
3.1.2	地磁匹配仿射模型	40
3.2	基于等值线约束的地磁匹配算法	42
3.2.1	等值线约束匹配	43
3.2.2	匹配算法对地磁测量中随机常值的估计	46
3.2.3	仿真验证	48
3.3	迭代多尺度地磁匹配算法	51
3.3.1	迭代多尺度匹配策略	51
3.3.2	匹配算法细节处理	53
3.3.3	仿真验证	56
3.4	基于约束粒子群的地磁匹配算法	58
3.4.1	粒子群优化算法	58
3.4.2	约束粒子群优化搜索	59
3.4.3	仿真验证	62
3.5	基于检索值的分块插值等值区域快速检索策略	66
3.5.1	IP检索算法	67
3.5.2	改进的分块IP检索算法在地磁等值域提取中的应用	68
3.5.3	仿真验证和结论	72
3.6	本章小结	75
第4章	模糊匹配条件下的组合导航算法	76
4.1	模糊匹配现象及组合导航算法分析	76
4.1.1	模糊匹配成因分析	76
4.1.2	模糊匹配条件下组合导航算法分析	78

4.2	“最优”修正组合导航算法	79
4.2.1	基于阈值参数约束的最优修正策略	79
4.2.2	有效观测待选集的获取	81
4.2.3	仿真验证和分析	82
4.2.4	结论	86
4.3	基于 PDAF 的加权修正算法	86
4.3.1	PDAF 的基本框架	87
4.3.2	基于 PDAF 的地磁辅助导航算法	89
4.3.3	仿真验证	92
4.3.4	结论	95
4.4	基于混合高斯模型的地磁辅助导航算法	95
4.4.1	非线性滤波模型和非线性估计理论	96
4.4.2	混合高斯滤波器	97
4.4.3	地磁辅助导航中的混合高斯逼近方法	99
4.4.4	仿真验证和分析	103
4.5	三种修正算法的性能比较	104
4.5.1	最优修正与 PDAF 修正的比较	104
4.5.2	PDAF 修正与混合高斯算法的比较	109
4.5.3	算法比较结论	111
4.6	本章小结	111
第 5 章	无人机地磁辅助导航中的序贯滤波算法	113
5.1	基于约束线性化 EKF 的组合导航算法	113
5.1.1	EKF 模型细化	114
5.1.2	约束线性化 EKF	116
5.1.3	仿真验证	121
5.2	基于边缘化粒子滤波的组合导航算法	125
5.2.1	问题提出	125
5.2.2	粒子滤波算法	125
5.2.3	边缘化粒子滤波算法及其在地磁辅助导航中的应用	130
5.2.4	仿真验证和分析	133

5.3	本章小结	136
第6章	地磁辅助导航策略研究和系统实验验证	137
6.1	组合导航策略设计	137
6.1.1	间歇式组合导航策略	137
6.1.2	多频率组合导航策略	138
6.2	地磁辅助导航原理样机	139
6.3	实验验证	140
6.3.1	实验简介	140
6.3.2	地磁匹配算法实验验证	140
6.3.3	模糊匹配条件下的组合导航算法验证	143
6.3.4	序贯组合导航实验验证	144
6.3.5	间歇式组合导航实验结果和分析	145
6.3.6	多频组合导航实验结果和分析	148
6.3.7	实验分析和总结	149
6.4	本章小结	150
第7章	总结与展望	151
7.1	内容总结	151
7.2	研究展望	152
附录A	常用坐标系	153
附录B	组合导航系统状态方程	154
附录C	贝叶斯估计公式推导	158
	参考文献	160

第1章 绪 论

1.1 无人机地磁辅助定位

无人机因其独特而优异的战术性能,在近几年现代局部战争中得到了广泛的应用。在海湾战争、科索沃战争、阿富汗战争、伊拉克战争中,无人机执行了多项重要军事任务,包括摄像侦察、通信干扰、预警、目标动态监视、投放炸弹攻击地面目标等。未来高技术信息化战争,更是要求无人机具有优异的隐身性能、高动态性能,能够全航程、高精度自主导航和精确探测。可以预言,无人机将在21世纪的战争或局部冲突中显示出更加强大的威力,也是未来实现“零伤亡”战争的首选武器之一。无人机相关技术的研究和发展已经成为各国军事部门密切关注的焦点。

高精度自主导航技术是保障无人机战术性能、成功完成既定任务的关键技术之一。目前无人机常用的机载导航系统有捷联惯性导航系统(Inertial Navigation System, INS)、全球卫星定位系统(Global Positioning System, GPS)、地形辅助导航系统等^[1]。其中,惯性导航系统因其能提供连续的、高动态全导航信息和其完全的自主性,已成为目前各航行体上的主要导航设备。但是惯性导航系统的误差随时间积累。实际应用中,为保证导航精度,需借助其他导航方式对其进行实时校正,这就是组合导航的概念。组合导航能够充分利用多传感器提供的互补导航信息,实现高精度定位定姿。但是,现有的GPS、地形匹配等辅助导航系统仍存在很多缺陷。例如,GPS易受干扰,存在失锁等问题;更重要的是GPS主权受控于他国,极大地限制了其在军事领域的应用。地形辅助导航系统虽然能借助高速的无人机在短时间内积累丰富的地形特征并实现辅助定位,但是,无线电高度表测高不具备隐蔽性,破坏了无人机的隐身性能;另外,在沙漠、平原、水面等地形特征不明显的地区,地形辅助导航性能会显著下降,甚至无法正常使用。那么,是否存在一种组合模式既能代替GPS实现高精度导航,又能满足无人机的高隐身要求,并实现全天候、全地域自主导航呢?本书以惯性导航系统为基础,探索了新的适用于无人机的组合导航模式,力求满足无人机高精度、全自主导航要求。

基于地球物理场(Geophysical Fields of the Earth, GFE)的辅助惯性导航系统是一种新型导航手段。GFE 全球可测,而且相对稳定,部分的物理场信息已经绘制成图(如重力场图、重力梯度图等),用以提供可靠的导航信息。地磁场(Geomagnetic Field, GF)是 GFE 的一种。当前,地磁图、地磁模型已广泛应用于商业和军事领域,但大都用于提供方向信息。而实际上,在地球近地空间内,地磁数据间的相关性与运行轨迹的连续性之间存在着一定的对应关系。在惯导提供的初始导航信息的基础上,通过地磁测量值与预存地磁图的关联计算,即可实现高精度的导航定位。文献[2]指出,地球上 98% 的地域都可以用地磁场来进行导航。

本书以无人机为背景,主要讨论地磁场在导航定位领域的应用。选用地磁场作为定位的辅助手段,主要基于以下考虑:

(1) 相比于其他辅助导航手段,地磁场具有一些显著的优势:①与地形、卫星等辅助导航手段相比,地磁辅助导航具有优良的隐蔽性能。地磁测量是完全被动的,不向外发射任何能量,适合无人作战平台高隐蔽性要求,对于军事应用意义重大。②地磁场是地球固有的矢量场,无论在高空、地上还是水下,都可以探测到地磁信息。地磁导航系统在水面、冰面等“平坦”区域可照常运行,具有全天候、全地域、中高精度、连续导航的特点。③与重力导航相比,磁力计成本低,应用背景更为广泛。

(2) 无人机这一应用背景能够凸显地磁场的优势,为地磁导航提供了更为广阔的发展空间。目前,制约地磁辅助导航系统应用的瓶颈是地磁测量中的干扰问题。研究者们在磁干扰补偿方面做了一些研究^[3-5],但相关成果的可推广性不大。空中平台给地磁导航提供了一个相对“干净”的环境,避开了干扰场建模难的问题,可以实现地磁场的高精度测量。另外,我国现有的地磁总场图和异常图大都是低空航测数据^[6],在无人机上使用,引入的延拓误差小,地磁基准图更为精确。因此,以无人飞行器为平台研究地磁导航技术可行性较强。

(3) 将地磁信息与惯性导航信息融合,可以充分发挥地磁场和惯性系统各自的优势,实现二者性能的互补。一方面,地磁匹配误差不随时间积累,这种误差有界性是惯导系统进行位置修正的理想观测依据。通过组合手段,观测参数可以连续实时或者间或地提供给惯导系统,可有效提高无人机的导航精度。另一方面,由于地磁测量设备灵敏度有限,存储的地磁信息又是离散的,直接应用会造成多值解和精度可靠性差等问题。而惯导系统可以将地磁匹配区域限定在一定的范围内,减少了匹配和信息处理的计算量。

本书构建的地磁辅助导航系统在有图区域作为全局的导航系统存在,用以提供长航时的导航定位参数,对无人机飞行任务的完成有着重要的意义。

高精度自主导航任务的完成依赖于很多环节。为保证无人机成功完成预定任务,需要实时获得飞行器的位置、速度、航向等导航参数。其中,飞行器的位置尤为重要,因为只有知道实时位置才能根据路径规划要求完成航行任务并设计下一步运动方案^[7]。在地磁辅助导航过程中,地磁部分的主要任务是在预定区域内实现精确的辅助定位,基本步骤如下:

(1) 磁图装载,即在起飞前将满足路径规划要求并延拓计算好的地磁图装至飞行器数据库。

(2) 地磁数据实时测量,即飞行器航行过程中,地磁传感器实时测量载体位置对应的地磁场值,并与惯导输出时戳对准。

(3) 地磁辅助定位,即将实时测得的地磁序列与地磁图匹配或通过信息融合手段获得飞行器的位置估计。

由上述步骤可知,将地磁场实时测量数据与既有地磁图进行有效匹配定位和融合是实现高精度地磁辅助导航的关键。目前,相关算法的大量成果都集中在地形和重力导航领域。但是,现有算法仍存在参数适应性差、匹配区选择耗时、易产生虚定位等问题,由此导致匹配系统在实际应用中受到诸多限制。另外,现有成果中,鲜见针对地磁场特征和飞行器运动特性的分析和研究。因此,实现精确自主的无人机地磁辅助导航,首先要结合地磁场特征和应用背景设计高效、高适应性、高精度的地磁匹配和组合导航算法。

本书内容结合中高精度惯性导航系统,以信号处理和传感器融合技术为依据,立足于地磁辅助导航系统的工程化实现,重点讨论了地磁辅助导航系统中的地磁匹配定位和组合导航等问题。本书出版得到武器装备探索研究项目的资助,部分研究成果已成功应用于原理样机。

1.2 无人机地磁辅助导航系统工作原理和关键技术

1.2.1 地磁辅助导航系统的工作原理

地磁场是地球的固有资源。在近地空间(几千英尺内),地球外壳中的磁性矿石堆积物可以产生稳定可测的、小尺度变化的地磁场^[8]。每个局部磁场就像是人的指纹一样与空间位置一一对应^[9]。在惯导提供的位置信息基础上,通过各种算法和策略把地磁测量序列和事先存储的地磁图进行配准,即可实现载体的导航定位,这就是地磁辅助导航的基本原理。图 1.1 为导航过程示意图,右方为提供基准信息的地磁图。

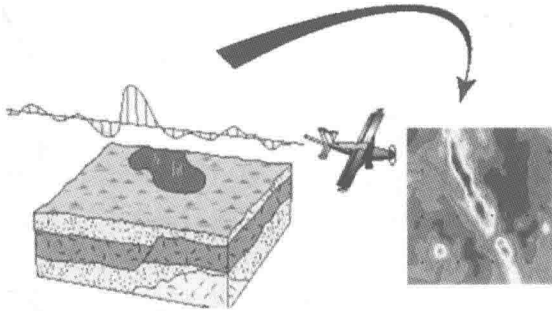


图 1.1 地磁辅助导航示意图

从技术角度分析,地磁辅助导航可以分为两个方面:“定位”和“导航”。利用地磁图进行“定位”,主要是确定航行载体的位置信息,可以看成是单状态估计,称其为地磁匹配。通常所说的组合导航滤波是指利用地磁图进行“导航”,需要确定系统的位置、速度、姿态和惯性器件误差等,属于多状态估计。本书研究的地磁辅助导航系统是二者的结合体。文中充分利用匹配算法简单、断续使用、对初始误差要求低等优点和滤波算法实时性高、处理非线性模型的能力强等优势,组成了复合的地磁辅助导航系统。地磁辅助导航工作的基本流程是:将预先选定区域的地磁值制成参考图,构成地磁数据库;当载体通过相应区域时,地磁探测仪实时测量地磁场强度,通过数据处理转化成所需特征量,并构成实时图输入到匹配模块;在惯导指示位置的基础上,对实时图与参考图进行匹配运算,确定出载体的匹配位置;最后,按照既定规则把匹配位置输入到组合导航滤波器,估计并修正惯导信息,或直接把地磁和惯导数据输入到滤波器进行系统状态估计。整个系统工作在闭环模式下,最终目的是修正惯导系统误差,实现高精度导航。系统的模块框图如图 1.2 所示。

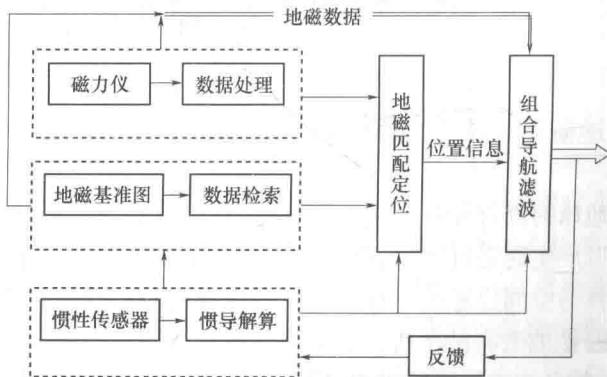


图 1.2 地磁辅助导航系统模块框图

1.2.2 地磁辅助导航系统的关键技术

地磁辅助导航是一个涉及多学科多领域的综合问题。从技术和算法角度考虑,地磁匹配定位和组合导航技术是地磁辅助导航系统的核心,其中涉及地磁特征的选取、地磁数据库的检索、匹配建模、匹配策略设计、组合导航方法和策略等。另外,一个高精度自主导航任务的完成还要依赖于很多其他环节,如地磁探测、地磁图延拓、地磁适配性研究、航迹规划等。下面按照信息处理流程简要介绍各关键技术。

1. 地磁适配性研究

地磁适配性(Geomagnetic Correlation Suitability)是对地磁图能否用于地磁匹配的一个定量衡量。地磁匹配成功的前提是地磁图必须是独特的,或者说地磁图中某一给定剖面不能与其它剖面相似。理论上,特征越丰富,基准图的适配性越强。匹配特征的衡量标准很多,包括矩特征、熵等^[10]。但 Wang Tang^[11]指出,匹配过程是一个复杂的受多种因素影响的过程,用单一的参数来衡量适配性是不完善的;同时还用蒙特卡罗仿真实验结合匹配算法研究了各参数对匹配性能的影响,得到了更为全面的结果。因此,实际应用中可以在定性推断以及大量野外实验的基础上,提炼出地磁特征准则来指导地磁匹配区的选择。地磁适配性研究是航迹规划的前提和匹配性能的保证。

2. 航迹规划

航迹规划是无人机执行任务前必须要做的工作。规划的目的是综合考虑使命任务、航行环境约束、可能威胁、导航精度、地磁图特征等诸多因素,给无人机在出发点和目的地中间选择一条适于飞行的路线。

航路规划问题的核心是使目标函数达到最优。就地磁辅助导航而言,路径规划则是在地磁图的基础上寻找代价函数最小的点间连接。Rouse^[12,13]采用启发式的A*算法对划分为若干正方形栅格的整个区域完成了最优路径规划。Szczerba^[14]利用一种称为稀疏A*搜索的技术实现了二维平面内的航路规划,该算法能有效减小搜索空间直至实时收敛并求得合适的解。Paris^[15]用马尔可夫决策过程(Markov Decision Process, MDP)对航迹进行规划,并成功应用于地形辅助导航系统。

3. 地磁探测技术

高精度的地磁测量信息是地磁辅助导航的基础,是进行地磁定位的前提条件。地磁探测技术中包括载体磁场的误差补偿、磁力仪的适当配置、地磁测量数据的处理和转换等。

地磁测量最大的缺陷是易受干扰,它不仅受环境中干扰源的影响,而且受到载体自身磁场的影响。机载磁力仪的测量输出是地磁场、感应磁场、机上干扰等多个场源的混合叠加。为实现高精度导航,必须从测量数据中把干扰场补偿掉,从而分离出真实的磁场。适当配置传感器的位置,能在一定程度上抵消某些干扰的影响。如把传感器放在无人机尾部的横杆上,远离飞机主体,能降低干扰幅度;另外,通过阵列配置,可以有效地进行载体干扰场建模^[3]。相比于陆上和水下应用,空中无人平台为地磁测量提供了一个相对“干净”的环境,干扰较少,而且针对飞机的干扰磁场建模问题已取得了初步进展^[5],进一步说明了无人机地磁辅助导航的可行性和优势。获取测量结果后,还必须进行必要的的数据校正,包括日变校正、温度校正、零点校正、基点校正等^[16]。经过上述处理之后,才能形成导航所需的地磁测量数据和地磁图。

4. 地磁图延拓技术

航空测量中,为了便于地质分析和矿源搜索,航测飞机一般飞得比较低(50~300m)。实际应用中,无人机飞行高度不定,虽然要求在地磁辅助导航过程中飞行器作等高飞行,但是此高度与基准图制备的高度还会有所差别。当飞行高度超出制图高度一定范围时,必须根据实际海拔对地磁数据进行延拓(Geomagnetic Continuation)计算,统一基准后的导航结果才更可信、更有效。目前,解决这一问题行之有效的方法是位场延拓技术。

如果忽略时间因素,且当空间某一区域没有场源时,地磁场可以用标量位 $U(x, y, z)$ 来描述,它满足拉普拉斯方程,即

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

因此,数据延拓可归结为如下数学问题。已知

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \\ U(x, y, z) |_{z=h} = f(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

求取: $g(x, y) = U(x, y, z) |_{z=H}$ 。其中, $f(x, y)$ 是在高度 h 上的地磁观测值, $g(x, y)$ 是在高度 H 上的地磁场估计值。常用的向下延拓方法有积分—迭代法^[17]、Tikhonov 正则化方法和 Landweber 迭代方法等,向上延拓方法有泊松积分^[18]等。

5. 地磁匹配定位算法

地磁匹配定位算法是根据地磁剖面的相似性进行定位的一种方法,相对于二维图像匹配,称这种剖面匹配为一维匹配。