高职高专“十二五”规划教材

GAOZHIGAOZHUAN "SHIERWU" GUIHUAJIAOCAI

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

• 主编 宋立温 宋学林

中国传媒大学出版社

高职高专“十二五”规划教材
GAOZHIGAOZHUAN“SHIERWU”GUIHUAJIAOCAI

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

•主　编　宋立温　宋学林
•副主编　安伯香

中国传媒大学出版社

内 容 简 介

本书在编写过程中力求做到条理清晰，通俗易懂，基本内容表述清楚，层次分明，结构合理，重点突出，例题、习题、案例针对性强；特别注意培养学生用概率的概念、方法和思想消化吸收概率概念、概率问题的能力；侧重培养学生将实际问题转化为数学模型的能力，突出学生概率应用技能的训练与培养。本书取材合理，深度适宜，富有启发性，有利于激发学生的学习兴趣。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 宋立温，宋学林 主编．—北京：中国传媒大学出版社，2013.6
ISBN 978－7－5657－0726－1
Ⅰ．①概…　Ⅱ．①宋…②宋…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ．①O21
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 128412 号

概率论与数理统计

作　　者：宋立温　宋学林
责任编辑：曹　辉　田　洁
责任印制：曹　辉
封面设计：雨 & 寒
出 版 人：蔡　翔

出版发行：中国传媒大学出版社
社　　址：北京市朝阳区定福庄东街 1 号　　邮编：100024
电　　话：65450532 或 65450528　　传真：010－65779405
网　　址：http://www.cucp.com.cn
经　　销：全国新华书店
印　　刷：北京市科星印刷有限责任公司

开　　本：787×1092 毫米　1/16
印　　张：14.25
字　　数：262 千字
版　　次：2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5657－0726－1/O・0726　　定价：29.00 元

前　　言

本书是在参考国内外同类教材的基础上，认真分析、总结、吸收高等职业院校概率论与数理统计教学、教改经验，并融入在教改中对课程的目的和任务、内容体系、教学方法和手段的探索与实践编写而成。

本书在编写过程中力求做到条理清晰，通俗易懂，基本内容表述清楚，层次分明，结构合理，重点突出，例题、习题、案例针对性强；特别注意培养学生用概率的概念、方法和思想消化吸收概率概念、概率问题的能力；侧重培养学生将实际问题转化为数学模型的能力，突出学生概率应用技能的训练与培养。本书取材合理，深度适宜，富有启发性，有利于激发学生的学习兴趣。

本书每节都配有一定数量的习题和案例。这些习题可以帮助学生加深对基本内容的理解，提高学生分析问题的能力，逐步培养学生自学的能力。

本书具有以下特色：

1. 每章均采用目标导学的方法，有利于学生对学习目标的把握。

2. 精选例题、案例和习题，注重结合专业特点，理论联系实际，突出学科之间的交叉性。

3. 注重教学概念与实际应用问题的联系，给出了许多问题的经济解析。

4. 减弱了理论推导与证明，不追求理论上的系统性。

5. 教材内容涵盖面广，为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间。

6. 引入了数学软件 Mathematica，有利于培养学生利用计算机及相关数学软件求解数学模型的能力。

本书由宋立温、宋学林担任主编，安伯香担任副主编。其中第一章、第二章由安伯香

编写；第三章、第四章由宋学林编写；第五章、第六章由宋立温编写。全书由宋学林负责统稿工作，由宋立温负责主审工作。

限于我们的研究能力、学术水平及教学经验，书中难免有疏漏和欠缺之处，恳切期望读者批评指正，以便进一步修改和完善。

编　者

2013 年 5 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

学习目标：

□ 了解随机试验与随机事件的概念，理解并掌握事件的关系与运算.

□ 理解概率的定义和基本性质.

□ 了解古典概型的定义，能够计算简单的古典概率.

□ 理解条件概率的定义，掌握概率的乘法公式.

□ 了解全概率公式并会简单计算.

□ 理解事件独立性的概念，熟练掌握相互独立事件的性质及相关概率的计算方法.

□ 会计算产品的合格率，能预测某些简单经济现象及其组合发生的可能性.

□ 会用数值或字母表示经济现象变化的各种状况.

§1.1　随机事件

在自然界与经济领域内普遍存在着两种现象：一种是条件完全决定结果的现象，如当边长为 2m 时，正方形的面积一定等于 $4m^2$；树上苹果成熟后，在地心引力作用下一定会下落；在标准大气压下，水被加热到 100℃ 时必然沸腾等. 另一种是条件不能完全决定结果的现象，称为非确定性现象或随机现象，如掷一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能不出现正面；从一批产品中任取一件产品，可能是次品，也可能不是次品；从一本书中任取一页，其印刷错误可能是 3 个，也可能不是 3 个；从一批日光灯管中任取一只日光灯管，使用 1200 个小时，可能需要更换，也可能不需要更换等. 随机现象都带有不确定性，但这仅仅是随机现象的一个方面，随机现象还有规律性的另一个方面，如在相同条件下，对随机现象进行大量观测，其结果就会出现某种规律性等. 概率论与数理统计

是研究随机现象规律性的一门科学.

随着本章的学习和对大量案例的分析,对于随机现象,你会有更深刻的认识.

对随机现象只做个别试验或观测,看不出明显的规律性,但在相同的条件下,对随机现象进行大量的重复试验或观测,就会发现各种结果的出现是有一定规律性的.

为了寻求随机现象的内在规律性,需要对其进行观察,我们把一次观察称为一次随机试验,简称“试验”,如每抛一次硬币,就是一次试验. 试验具有以下 3 个特点:

(1)在相同条件下可以重复进行.

(2)每次试验的可能结果不止一个,而且事先能明确所有可能的结果.

(3)每次试验出现什么样的结果事先不能确定.

1.1.1 随机事件的概念

随机试验的每一个可能发生的结果称为随机事件,简称事件. 通常用大写字母 A、B、C…表示;不能再分解的随机事件称为基本事件,在一定条件下肯定要发生的事件称为必然事件,常用 Ω 表示;在一定条件下不可能发生的事件称为不可能事件,常用 ϕ 表示. 必然事件和不可能事件都属于确定性现象,但为了研究问题方便,我们仍然把它们当做随机事件,是随机事件的两个特殊情形.

例 1 做实验:投掷一颗均匀骰子一次.

(1)这个试验可以在相同情况下重复进行,且每次试验的可能结果为 6 个:出现 1 点、出现 2 点、出现 3 点、出现 4 点、出现 5 点及出现 6 点;不能准确预言每次试验所出现的点数,但知道可能出现的全部点数. 由于具有以上两个特点,因此这个试验是随机试验.

(2)这个试验共有 6 个基本事件:设基本事件 ω_1 表示出现 1 点,基本事件 ω_2 表示出现 2 点,基本事件 ω_3 表示出现 3 点,基本事件 ω_4 表示出现 4 点,基本事件 ω_5 表示出现 5 点,基本事件 ω_6 表示出现 6 点,于是基本事件空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$$

(3)设事件 A 表示出现偶数点,它是基本事件 $\omega_2,\omega_4,\omega_6$ 的集合,于是事件

$$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$$

若试验的结果是 ω_4,则事件 A 发生;若试验的结果是 ω_1,则事件 A 不发生.

(4)设事件 B 表示出现点数大于 4,它是基本事件 ω_5,ω_6 的集合,于是事件

$$B=\{\omega_5,\omega_6\}$$

若试验的结果是 ω_5，则事件 B 发生；若试验的结果是 ω_4，则事件 B 不发生.

(5)在每次试验中，由于出现点数一定小于 7，因此出现点数小于 7 这个事件一定发生，它是必然事件.

(6)在每次试验中，由于出现点数不可能大于 6，因此出现点数大于 6 这个事件一定不发生，它是不可能事件.

例 2　做实验：在装有 1 个红球、1 个白球及 1 个黄球的口袋里任取两个球.

(1)这个试验在相同条件下可以重复进行，且每次试验的可能结果为 3 个：取到红球和白球、取到红球和黄球及取到白球和黄球；不能准确预言每次试验所取到 2 个球的颜色组合，但知道所取到 2 个球的全部颜色组合. 由于具有以上两个特点，因此这个试验是随机试验.

(2)这个试验共有 3 个基本事件：设基本事件 ω_1 表示取到红球和白球，基本事件 ω_2 表示取到红球和黄球，基本事件 ω_3 表示取到白球和黄球，于是基本事件空间

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$$

(3)设事件 A 表示取到的 2 个球中恰好有 1 个红球，它是基本事件 ω_1,ω_2 的集合，于是事件

$$A=\{\omega_1,\omega_2\}$$

若试验的结果是 ω_2，则事件 A 发生；若试验的结果是 ω_3，则事件 A 不发生.

(4)在每次试验中，由于取到 2 个球中至多有 1 个白球，因此取到 2 个球中至多有 1 个白球这个事件一定发生，它是必然事件.

1.1.2　事件间的关系及运算

从集合论的观点来看，随机事件实际上是一种特殊的集合，必然事件 Ω 相当于全集，每一个事件 A 都是 Ω 的子集. 所以我们可以用集合的观点来讨论事件之间的关系与运算，为直观起见，有时，可借助图形：我们用平面上的矩形区域表示必然事件 Ω，该区域中的一个子区域表示随机事件 A.

1. 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 或称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，如图 1－1 所示.

2.相等关系

如果 $A\subset B$,$B\subset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

3.事件的积(交)

由事件 A 与 B 同时发生构成的事件,称为事件 A 与 B 的积(交),记作 AB 或 $A\cap B$,如图 1—2 阴影部分所示.

对任意事件 A,有 $A\cdot A=A$,$A\cdot \Omega=A$,$A\cdot \phi=\phi$.

4.事件的(和并)

由事件 A 与 B 至少有一个发生构成的事件,称为事件 A 与 B 的和(并),记作 $A+B$ 或 $A\cup B$,如图 1—3 阴影部分所示.

对任意事件 A,$A+A=A$,$A+\Omega=\Omega$,$A+\phi=A$.

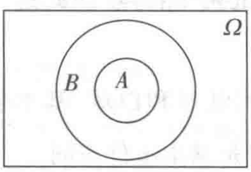

图 1—1

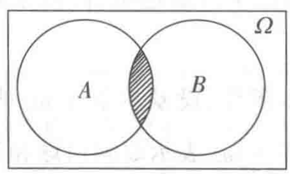

图 1—2

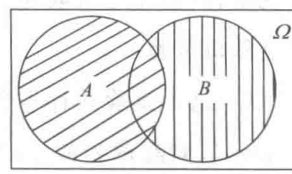

图 1—3

在随机事件的表述中,应特别注意一些关键词语,如“或者”、“同时”、“至少”、“至多”等,它们表述了不同的运算 .

5.事件的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生构成的事件,称为事件 A 与 B 的差,记作 $A-B$,如图 1—4 阴影部分所示.

6.互不相容事件(互斥事件)

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\phi$,则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥),如图 1—5 所示.

7.互逆事件(对立事件)

若事件 A 与 B 满足:$A+B=\Omega$,$AB=\phi$,则称事件 A 与 B 互逆(或对立),如图 1—6 所示.事件 A 的逆事件记作 $\overline{A}$,即 $B=\overline{A}$,由图 1—6 知,对任意事件 A,有 $A+\overline{A}=\Omega$,$\overline{A}\overline{A}=\phi$,$\overline{\overline{A}}=A$.

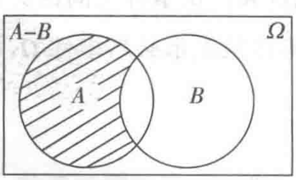

图 1—4

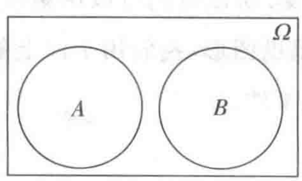

图 1—5

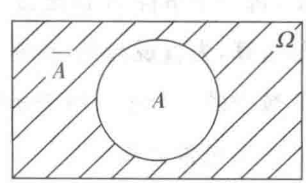

图 1—6

事件的运算满足以下规律：

(1)交换律：$AB=BA$，$A\cup B=B\cup A$.

(2)结合律：$(AB)\cdot C=A(BC)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4)德摩根律：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

例3　甲、乙两炮手同时向一架敌机炮击，各打一发炮弹，设$A_1=\{$甲击中敌机$\}$，$A_2=\{$乙击中敌机$\}$，试用事件A_1，A_2及它们的运算表示下列事件：

(1)$A=\{$敌机被击中$\}$；

(2)$B=\{$甲、乙都击中敌机$\}$；

(3)$C=\{$甲、乙都未击中敌机$\}$；

(4)$D=\{$有一人击中敌机$\}$.

指出事件A与B，A与C，B与C各是什么关系，事件B、C、D的并是何意义.

解

(1)$A=\{$敌机被击中$\}$表示事件A_1，A_2中至少有一个发生，于是$A=A_1+A_2$；

(2)$B=\{$甲、乙都击中敌机$\}$表示A_1，A_2同时发生，于是$B=A_1\cdot A_2$；

(3)$C=\{$甲、乙都未击中敌机$\}$表示$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$同时发生，于是$C=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$；

(4)$D=\{$有一人击中敌机$\}$表示A_1发生，A_2不发生；或者A_1不发生，A_2发生，于是$D=A_1\cdot\overline{A_2}+\overline{A_1}\cdot A_2$.

从以上分析可知，$A\supset B$，$C=\overline{A}$，$BC=\phi$，$B+C+D=\Omega$.

习　题　1.1

1.写出下列随机试验的样本空间.

(1)同时掷出两颗骰子，记录两颗骰子出现的点数之和；

(2)生产某种产品直到得到5件正品，记录生产这种产品的总件数；

(3)记录某城市110报警电话一个月内接到的求救电话次数.

2.某球迷连续三次购买足球彩票，每次一张，A、B、C分别表示第一次、第二次、第三次所买的彩票中奖的事件，试用A、B、C及其运算表示下列事件.

(1)第三次未中奖；

(2)第一次、第二次中奖，第三次不中奖；

(3)至少有一次中奖；

(4)恰有一次中奖；

(5)至多中奖两次；

(6)三次都不中奖.

3. 设 A、B 是 Ω 中的事件，试说出下列每个事件的意思：

(1)AB；　(2)$\overline{A}B$；　(3)$\overline{A}\cdot\overline{B}$；　(4)$\overline{A}\cup\overline{B}$.

§1.2　随机事件的概率

日常生活中，经常会听到如下陈述：

• 产品的合格率是98%.

• 明天某股票价格上升的可能性不大.

• 有50%的胜率竞标.

以上陈述的每一条都是关于某个随机事件发生的可能性的陈述，用概率来表示随机事件发生的可能性的大小.

1.2.1　概率的统计定义

在给出事件概率的定义前，先了解一下与概率密切相关的频率的概念.

设事件 A 在 n 次重复进行的试验中发生了 m 次，则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的频率，m 称为事件 A 发生的频数.

显然，任何随机事件的频率都是介于0与1之间的一个数.

大量随机试验的结果表明，多次重复地进行同一试验时，随机事件的变化会呈现出一定的规律性：当试验次数 n 很大时，某一随机事件发生的频率具有一定的稳定性，其数值将会在某个确定的数值附近摆动，并且试验次数越多，事件 A 发生的频率越接近这个数值，我们称这个数值为事件 A 发生的概率.

这样的例子是很多的，概括起来，就得到概率的定义.

定义1　在一个随机试验中，如果随着试验次数的增大，事件 A 出现的频率 $\frac{m}{n}$ 在某

个常数 P 附近摆动，且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度是很微小的，则称常数 P 为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=P$.

概率的这种定义，称为概率的统计定义.

由概率的统计定义可知，概率具有如下性质：

性质 1　对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

这是因为事件 A 的频率 $\frac{m}{n}$ 总有 $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$，故相应的概率 $P(A)$ 也有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 2　$P(\Omega)=1, P(\phi)=0$.

性质 3　若 $A\cap B=\phi$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

尽管概率是通过大量重复试验中频率的稳定性定义的，但不能认为概率取决于试验. 一个事件发生的概率完全由事件本身决定，是客观存在的，可以通过试验把它揭示出来.

1.2.2　古典概型

在许多实际问题中，无法根据概率定义得到事件发生的概率，往往采用在大量重复试验中事件发生的频率作为概率近似值. 如在一批产品中任意抽查 100 个产品，其中有 92 个正品，那么正品的频率为 0.92，这个频率可以作为这批产品中正品概率的近似值，即在这批产品中任取 1 个产品是正品的概率可以认为是 0.92.

但是也有一类简单而又常见的实际问题，可以通过逻辑思维直接计算概率，而不必利用频率，这种概率问题的类型是概率论最早研究的内容，称为古典概型. 古典概型具有下列特点：

(1)试验结果的个数是有限的，即基本事件的个数是有限的. 例如，“掷投硬币”试验的结果只有两个，即{正面向上}和{正面向下}.

(2)每个试验结果出现的可能性相同，即每个基本事件发生的可能性是相同的. 例如，“掷投硬币”试验出现{正面向上}和{正面向下}的可能性都是 $\frac{1}{2}$.

(3)每次试验只出现一个结果，即有限个基本事件是两两互斥的. 例如，“投掷硬币”试验中出现{正面向上}和{正面向下}都是互斥的.

根据古典概型的特点，我们可以定义任一随机事件 A 的概率.

定义 2　如果古典概型中的所有基本事件的个数是 n，事件 A 包含的基本事件的个数是 m，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件}}{\text{所有基本事件的个数}}$$

概率的这种定义,称为概率的古典定义.

古典概型具有下列性质:

(1)非负性:$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2)规范性:$P(\Omega)=1,P(\phi)=0$;

(3)可加性:若 $A\cap B=\phi$,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

计算事件 A 的概率时,重要的是弄清基本事件总数 n 是多少,事件 A 包含哪些基本事件,其个数 m 是多少,计算 n 和 m 时经常使用排列与组合的计算公式.

例 1 掷一枚质地均匀的骰子,观察出现的点数.

(1)出现偶数点的概率;

(2)出现点数大于 4 的概率.

解 设 A={出现偶数点},B={出现点数大于 4}

本试验是古典概型,且基本事件的总数 $n=6$,"出现偶数点"的事件含有"出现 2 点、4 点、6 点"3 个基本事件;"出现点数大于 4"的事件含有"出现 5 点、6 点"两个基本事件,所以

(1)$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$;　　(2)$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

例 2 袋中有 a 只黑球,b 只白球,从中依次无放回地取 3 次,每次取一球.求下列事件的概率:

(1)A="只有第二次取得黑球";

(2)B="三次中有一次取得黑球";

(3)C="至少有一次取得黑球".

解 这是一个古典概型问题,抽样方法是无放回的抽取.

(1)从 $a+b$ 只球中无放回地摸 3 次球的排列数为 P_{a+b}^{3},所以基本事件总数为 P_{a+b}^{3},第二次取得黑球有 a 种,其余两次均取得白球有 P_{b}^{2},故事件 A 所包含的基本事件数为 aP_{b}^{2},于是

$$P(A)=\frac{aP_{b}^{2}}{P_{a+b}^{3}}=\frac{ab(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)};$$

(2)不必考虑次序,得

$$P(B)=\frac{aC_{b}^{2}}{C_{a+b}^{3}}=\frac{3ab(b-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)};$$

(3)不必考虑次序，基本事件总数 C_{a+b}^3，事件 C 包含的基本事件数是从总数中扣除 3 次都摸得白球的数，即 $C_{a+b}^3-C_b^3$，于是

$$P(C)=\frac{C_{a+b}^3-C_b^3}{C_{a+b}^3}=1-\frac{b(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}.$$

例 3　甲、乙二人进行一种游戏，规则如下：每掷一次（均匀的）硬币，正面朝上时甲得 1 分乙得 0 分；反面朝上时甲得 0 分乙得 1 分；直到谁先得到规定的分数为赢，赢者获奖品．当游戏进行到甲还差 2 分、乙还差 3 分时就分别达到所规定的分数时，因故游戏停止．问此时应如何分配奖品给甲、乙才算公平？

分析　为了确保公平，设想把游戏进行到能分出输赢为止．在所得到的各种可能结果中看甲赢和乙赢的有利场合数各是多少，按甲、乙所赢的概率之比分奖品是公平的．

解　为了能分出输赢还要掷硬币 $2+3-1=4$ 次（少于 4 次，有些情形分不出输赢），所有可能结果即基本事件总数为 $2^4=16$，这些基本事件发生是等可能的．

甲赢即正面朝上至少 2 次，甲赢的有利场合数为 $C_4^2+C_4^3+C_4^4=11$，故 $P(\text{甲赢})=\frac{11}{16}$；乙赢即反面朝上至少 3 次，乙赢的有利场合数为 $C_4^3+C_4^4=5$，故 $P(\text{乙赢})=\frac{5}{16}$.

按 11∶5 分奖品对甲、乙二人是公平的．

注：此题是历史上有名的得分问题，也称分赌注问题．上述解法是应用古典概率解决实际问题的一个典型例子．

1.2.3　概率的加法公式

考虑任意两个事件 A、B，它们的和事件 $A+B$ 发生的概率与它们本身发生的概率之间有什么关系？

若 $A\cdot B=\phi$，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

证明：略

推论 1　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n),$$

即互斥事件之和的概率等于各事件的概率之和．

推论 2　设 A 为任一随机事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

推论 2 告诉我们：如果证明计算事件 A 的概率有困难，可以先求逆事件 $\overline{A}$ 的概率，然后再利用此推论得其所求．

推论 3 若事件 $B \subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

前面讨论了两个事件互斥时的加法公式，对于一般的情形，有下列结论.

定理 对任意两个事件 A、B 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B).$$

证明 事件 $A+B$，可以表示成两个互斥事件 A 与 $B-AB$ 的和，即 $A+B=A+(B-AB)$，且 $A \cdot (B-AB)=\phi$，$AB \subset B$.

于是 $P(A+B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$.

推论 4 设 A、B、C 为任意 3 个事件，则

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

例 4 某设备由甲、乙两个部件组成，当超载负荷时，各自出故障的概率分别为 0.90和 0.85，同时出故障的概率是 0.80. 求超载负荷时至少有一个部件出故障的概率.

解 设 $A=\{$甲部件出故障$\}$，$B=\{$乙部件出故障$\}$，则 $P(A)=0.90$，$P(B)=0.85$，$P(A \cdot B)=0.80$.

于是

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A)+P(B)-P(A \cdot B) \\ &= 0.90+0.85-0.80=0.95. \end{aligned}$$

即超载负荷时至少有一个部件出故障的概率为 0.95.

例 5 所有两位数逐一写在卡片上，从中任意抽取 1 张卡片，求这张卡片上的两位数能被 2 整除或能被 3 整除的概率.

解 设 $A=\{$两位数能被 2 整除$\}$，$B=\{$两位数能被 3 整除$\}$，则 $AB=\{$两位数能被 6 整除$\}$，所有两位数从 10 到 99 共 90 个，每相邻两个两位数中恰好有一个能被 2 整除，每相邻三个两位数中恰好有一个能被 3 整除，每相邻 6 个两位数中恰好有一个能被 6 整除，因此得到概率

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(A \cdot B)=\frac{1}{6}.$$

两位数能被 2 整除或能被 3 整除，意味着事件 A 发生或事件 B 发生，可用和事件 $A+B$ 表示. 根据加法公式，得到概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

所以任意抽取一张卡片上的两位数能被 2 整除或能被 3 整除的概率为 $\frac{2}{3}$.