工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

高等数学
习题全解

上册

同济大学数学系 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化“十二五”规划教材

同济大学 数学系列教材

高等数学习题全解

上册

同济大学数学系 ◎ 编

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（C I P）数据

高等数学习题全解．上册 / 同济大学数学系编． --
北京 ：人民邮电出版社，2016.9
同济大学数学系列教材
ISBN 978-7-115-42721-2

Ⅰ．①高… Ⅱ．①同… Ⅲ．①高等数学－高等学校－
题解 Ⅳ．①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第199188号

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》（ISBN 978-7-115-42277-4）配套的学习辅导书．按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求，充分吸收当前优秀高等数学教材辅导书的精华，并结合数年来的教学实践经验，针对当今学生的知识结构和习惯特点编写的．全书分为上下两册．本书为上册，是一元函数微积分部分，一共有四章，主要内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，微分方程．每章包含基本要求，主要方法，例题解析与习题详解四个部分．

本书具有相对的独立性，可供高等院校理工类和其他非数学专业学习高等数学的学生提供解题指导，也可供准备报考硕士研究生的人员复习高等数学时参考使用．例题和习题解答还可供高等数学的老师在习题课时选用．

◆ 编　　　　同济大学数学系
责任编辑　许金霞
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.5　　　　2016 年 9 月第 1 版
字数：295 千字　　　2016 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　　言

本书是同济大学数学系编写的《高等数学》(ISBN 978-7-115-42277-4,人民邮电出版社出版)的配套用书，是按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求，以指导学生理解基本概念和掌握基本解题方法为目的而编写的. 本书主要是为学习高等数学的读者提供解题指导的参考书，也可以作为复习高等数学准备报考硕士研究生的人员的辅助用书，还可供讲授高等数学的教师在高等数学习题课和批改作业时参考.

全书分为上、下两册，内容按照《高等数学》的章节顺序设计，本书为上册，是一元函数微积分部分，共有四章，主要内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，微分方程. 下册是多元函数微积分部分，共有四章，主要内容包括空间解析几何，多元函数微分学及其应用，多元函数积分学及其应用，级数. 每章包含基本要求、主要方法、例题解析与习题详解四个部分. 第一部分通过结构图来帮助读者熟悉每章的基本内容、概念关系，使读者明确要求，抓住重点；第二部分总结了本章概念和基本计算中具有一般意义的解题方法；第三部分给出了经典例题及其分析精准的解题过程，使读者能够了解概念中的难点和容易误解的疑点；第四部分是《高等数学》的习题全解,包括各章的习题和章节测试.

本书由同济大学张弢、殷俊锋编写，由张弢统稿. 本书在编写和统稿过程中得到了教师同仁和学生的大量帮助，并提出了许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢.

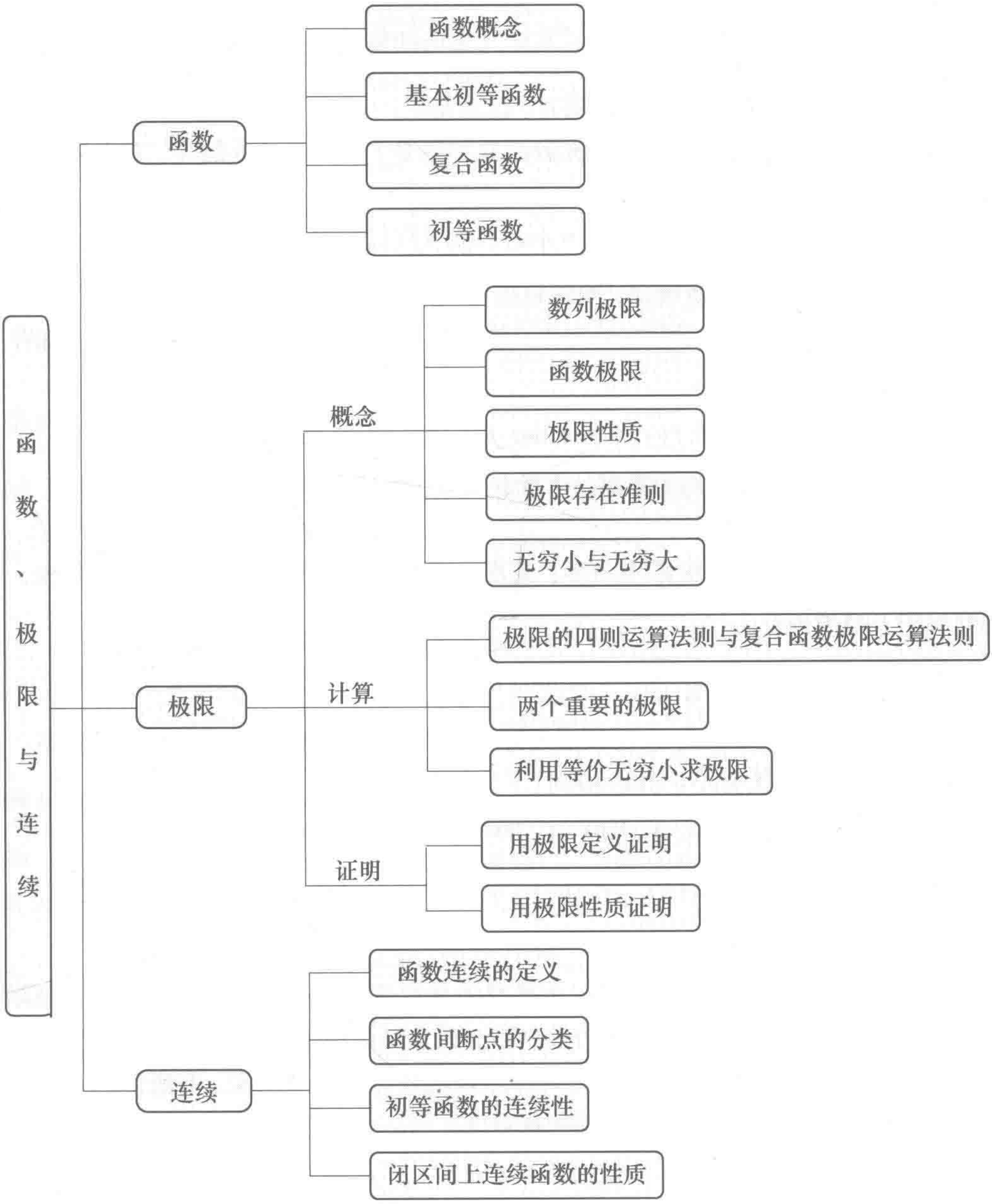
编　者

2016 年 7 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、基本要求



二、主要方法

1. 函数的定义域的确定

在实际问题中，根据问题的实际背景确定函数的定义域. 不考虑函数的实际背景，而抽象地研究用算式表达的函数时，函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数的集合.

2. 极限问题

(1) 若$f(x)$是基本初等函数，则它在定义域内的每个点 x_0 处均有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) 讨论分段函数在分段点的极限时，注意结论：

函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是$f(x)$在 x_0 处的左、右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A.$$

(3) 考虑 $x\to\infty$ 时的函数极限，则注意运用结论：

函数$f(x)$当 $x\to\infty$ 时极限存在的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

(4) 分子、分母的极限均为零时，注意下列方法：

首先，观察所讨论的函数，是否可做恒等变换，是否可消去公因子，是否在分子、分母同乘一个因子时使其分母的极限不为零；其次，注意是否可利用等价无穷小做替换，并注意正确运用下列结论：

(Ⅰ) 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及由它们推出的各类极限；

(Ⅱ) 有限个无穷小的和、差及积是无穷小，局部有界量和无穷小的积是无穷小；

(Ⅲ) 常见的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\ \mathrm{e}^x-1\sim x,\ \sqrt{1+x}\sim\frac{1}{2}x,\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

3. 函数连续性的判断

(1) 判断函数在一点处是否连续，主要看函数在该点处是否有定义、是否有极限，该点处的极限与函数值是否相同；对于分段函数分段点处的连续性，要分别讨论其左右极限.

(2) 可去间断点及跳跃间断点的共同特点是函数在该点处的左、右极限均存在，它们是第一类间断点；无穷间断点是第二类间断点.

三、例题解析

例 1 求函数$f(x)=\ln\ln\ln x+\sqrt{100-x^2}$的定义域.

解　$\ln\ln\ln x$ 要有定义，即 $\ln\ln x>0$，从而 $\ln x>1$，需满足 $x>\mathrm{e}$；

$\sqrt{100-x^2}$ 要有定义，需满足 $x^2\leqslant 100$，$|x|\leqslant 10$，即 $-10\leqslant x\leqslant 10$.

因此，$f(x)$ 的定义域为 $(\mathrm{e},\ 10]$.

例 2　设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域，

解　由 $\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$.

所以，$\varphi(x)$ 的表达式为

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\ x\leqslant 0.$$

例 3　设 $a\neq 0$，$|r|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+ar+\cdots+ar^{n-1})$.

解　利用等比数列的前 n 项和公式，可得

$$\lim_{n\to\infty}(a+ar+\cdots+ar^{n-1})=a\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}.$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$.

解　先利用有理式因式分解法消去零因子，再利用极限的四则运算法则进行计算.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+3}=-\frac{1}{4}.$$

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解　先将无理式有理化，消去零因子，再利用极限的四则运算法则进行计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}&=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+5}+3)=\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}+3=6.\end{aligned}$$

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

解　利用立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，先将无理式有理化，消去零因子，再利用极限的四则运算法则进行计算.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left[(\sqrt[3]{1+x})^2+(\sqrt[3]{1+x})(\sqrt[3]{1-x})+(\sqrt[3]{1-x})^2\right]}=\frac{2}{3}.$$

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+3x}}{x^2+\sin 2x}$.

解　先将分子有理化，再利用第一重要极限的结论进行计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+3x}}{x^2+\sin 2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1+3x})(1+\sqrt{1+3x})}{(x^2+\sin 2x)(1+\sqrt{1+3x})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+3x)}{(x^2+\sin 2x)(1+\sqrt{1+3x})}\end{aligned}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+\sin 2x}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+\frac{\sin 2x}{x}}=-\frac{3}{4}.$$

例 8 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=0$，求常数 a、b.

解法一 由已知极限存在且 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\frac{x^2}{1+x}}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$，知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{1+x}}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$，

故 $$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{1+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1.$$

解法二 由已知极限存在知

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-a(1+x)x-b(1+x)}{1+x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{1+x}\right]=0,$$

故 $\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

例 9 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}(a>0)$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ 可知，

$0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}a^{-\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}a^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{a^{-\frac{1}{x}}}=\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}=0$;

$a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$;

$a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^-}a^{-\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}a^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{a^{-\frac{1}{x}}}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}=1$.

所以，$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ \frac{1}{2}, & a=1,\\ 1, & a>1.\end{cases}$$

例 10 当 $x\to 0$ 时，$4x\tan^3 x$ 与 $\tan x-\sin x$ 哪个是高阶无穷小?

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3=4$，故当 $x\to 0$ 时，$4x\tan^3 x$ 为 x 的四阶无穷小.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\tan x-\sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

故当 $x\to 0$ 时，$4x\tan^3 x$ 为 $\tan x-\sin x$ 的高阶无穷小.

例 11　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x>0.\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

解　$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}=-1$,

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2},$$

故 $f(0^-)\neq f(0^+)$，因而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 12　设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$ 使 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

证明　设 $F(x)=f(x)-f(a+x)$，$F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(a),\ F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)=-[f(0)-f(a)].$$

若 $f(0)=f(a)$，则 $\xi=0$ 即为所求；

若 $f(0)\neq f(a)$，则 $F(0)F(a)<0$，由零点定理知至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

综上，存在一点 $\xi\in[0,a]$，使 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

四、习题详解

习题 1-1　集合与函数

1. 设 A, B 分别为下列两个给定的集合：

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6,8\}$;

(2) $A=Z^+$, $B=N$;

(3) $A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$;

(4) $A=\{x|x^2+x-6<0\}$, $B=\{x|x^2-2x-3\leqslant0\}$;

试求 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

解　(1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$, $A\cap B=\{2,4\}$, $A\setminus B=\{1,3,5\}$, $B\setminus A=\{6,8\}$;

(2) $A\cup B=N$, $A\cap B=Z^+$, $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=\{0\}$;

(3) $A\cup B=\{x|x>3\}$, $A\cap B=\{x|4<x<5\}$, $A\setminus B=\{x|3<x\leqslant4\}$, $B\setminus A=\{x|x\geqslant5\}$;

(4) $A=\{x|-3<x<2\}$, $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$, $A\cup B=\{x|-3<x\leqslant3\}$, $A\cap B=\{x|-1\leqslant x<2\}$, $A\setminus B=\{x|-3<x<-1\}$, $B\setminus A=\{x|2\leqslant x\leqslant3\}$.

2. 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{2,3,4\}$, $B=\{3,6,7\}$, 求 A^C, B^C, $A^C\cap B^C$, $(A\cup B)^C$.

解 $A^C=\{1, 5, 6, 7\}$, $B^C=\{1, 2, 4, 5\}$, $A^C\cap B^C=\{1, 5\}$, $(A\cup B)^C=\{1, 5\}$.

3. 设 A, B 都是集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的子集，且 $A^C\cap B^C=\{1, 3, 7, 9\}$，试求 $A\cup B$.

解 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$，则 $A\cup B=\{2, 4, 5, 6, 8\}$.

4. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$； (2) $|x|<3$； (3) $|x-2|<\dfrac{1}{10}$；

(4) $|x|>100$； (5) $0<|x-1|<0.01$； (6) $0<|x-2|\leqslant 5$.

解 (1) $x\in(2, 6]$； (2) $x\in(-3, 3)$； (3) $x\in(1.9, 2.1)$；

(4) $x\in(-\infty, -100)\cup(100, +\infty)$； (5) $x\in(0.99, 1)\cup(1, 1.01)$；

(6) $x\in[-3, 2)\cup(2, 7]$.

5. 设 $x\in U(1, \delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$，当 ε 分别等于 0.1 和 0.01 时，求领域半径 δ 各等于多少？

解 $\varepsilon=0.1$ 时，$|2x-2|<0.1$，$0.95<x<1.05$，则 $\delta=0.05$；

$\varepsilon=0.01$ 时，$|2x-2|<0.01$，$0.995<x<1.005$，则 $\delta=0.005$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-5x+6}}$； (2) $y=4\sqrt{3x+2}+2\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；

(3) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$； (4) $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$；

(5) $y=\dfrac{2}{|x|-x}+\sqrt{\ln(3+x)}$； (6) $y=\dfrac{1}{[x+1]}$；

(7) $y=f(x^2+1)$，其中 $f(x)$ 的定义域是 $[1, 2]$；

(8) $y=f(\sin x)+f(\ln x)$，其中 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$.

解 (1) $\begin{cases}\sqrt{x^2-5x+6}\neq 0,\\ x^2-5x+6\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $x^2-5x+6>0$，$(x-3)(x-2)>0$，则 $x\in(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$；

(2) $\begin{cases}3x+2\geqslant 0,\\ -1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{2}{3},\\ -1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $x\in\left[-\dfrac{2}{3}, 3\right]$；

(3) $x\geqslant 0$ 且 $x-2\neq 0$，则 $x\in[0, 2)\cup(2, +\infty)$；

(4) $1-x>0$ 且 $x+2\geqslant 0$，则 $x\in[-2, 1)$；

(5) $|x|-x\neq 0$ 且 $\ln(3+x)\geqslant 0$，即 $x<0$，$3+x\geqslant 1$，则 $x\in[-2, 0)$；

(6) $[x+1]\neq 0$，即 $x+1<0$，$x+1\geqslant 1$，则 $x\in(-\infty, -1)\cup[0, +\infty)$；

(7) $1\leqslant x^2+1\leqslant 2$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，则 $x\in[-1, 1]$；

(8) $0\leqslant\ln x<1$ 且 $0\leqslant\sin x<1$，即 $1\leqslant x<\mathrm{e}$，$2k\pi\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 或 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x\leqslant\pi+2k\pi$，

则 $x\in\left[1, \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}, \mathrm{e}\right)$.

7. 设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0,\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求$f(1)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f(-3)$.

解　因为$1\in[0, 2)$，所以对应的函数表达式为$f(x)=1+x^2$，故$f(1)=2$；

同理，$\dfrac{\pi}{2}\in[0, 2)$，所以对应的函数表达式为$f(x)=1+x^2$，故$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\dfrac{\pi^2}{4}$；

而$-\dfrac{\pi}{4}\in(-2, 0)$，所以对应的函数表达式为$f(x)=\sin x$，故$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

因为函数的定义域为$(-2, 2)$，而$-3\notin(-2, 2)$，故$f(-3)$不存在.

8. 设$f(x)=\sqrt{\sin x}+2\cos^2x$，求$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解　因为$\sin x\geqslant 0$，所以定义域为$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$不存在.

9. 设$f(x)=\sqrt{x^2-1}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=f(\sqrt{1-x^2})=\sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2-1}=\sqrt{-x^2}=0$，$x\in\{0\}$；

$g[f(x)]=g(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{1-(\sqrt{x^2-1})^2}=\sqrt{2-x^2}$，$x\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

10. 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq 0, x\neq 1)$，求$f[f(x)]$和$f\{f[f(x)]\}$.

解　$f[f(x)]=f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}(x\neq 0)$；

$f\{f[f(x)]\}=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x(x\in R)$.

11. 设$f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}-1(x\neq 0)$，求$f(x)$.

解法一　$f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}-1=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1}{2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1\right)+1}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-2x+x^2}{x^2}\right)+1}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2+1}$，则$f(x)=x+\dfrac{1}{x^2+1}$.

解法二　令$\dfrac{1-x}{x}=t$，则有$x=\dfrac{1}{1+t}$，代入原等式有

$$f(t)=1+t+\frac{\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^2}{2\cdot\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{1+t}+1}\text{，整理得}f(t)=t+\frac{1}{1+t^2}\text{，}$$

故有$f(x)=x+\frac{1}{x^2+1}$.

12. 设$f(x)=3x^2+4x$, $\varphi(t)=\lg(1+t)$, 求$f[\varphi(t)]$, $\varphi[f(x)]$及其定义域.

解 $f[\varphi(t)]=f[\lg(1+t)]=3[\lg(1+t)]^2+4\lg(1+t)=\lg(1+t)[3\lg(1+t)+4]$, 定义域为$\{t|t>-1\}$;

$\varphi[f(x)]=\varphi(3x^2+4x)=\lg(1+3x^2+4x)$, $1+3x^2+4x>0$, 则定义域为$(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

(1) 写出$f(x)$的定义域, 画出函数$f(x)$的图形;

(2) 求$f(0)$, $f(1.2)$, $f(3)$, $f(4)$.

解 (1) 定义域为$[0,4]$, 作图略;

(2) $f(0)=0^2=0$, $f(1.2)=1$, $f(3)=4-3=1$, $f(4)=4-4=0$.

14. 设$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ e^x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求复合函数$f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ e^{f(x)}, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

由$f(x)<0$可知, 即当$x<0$时, $1+x<0\Rightarrow x<-1$; 当$x\geqslant 0$时, $e^x<0\Rightarrow x\in\varnothing$;

由$f(x)\geqslant 0$可知, 即当$x<0$时, $1+x\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -1$; 当$x\geqslant 0$时, $e^x\geqslant 0\Rightarrow x\in R$;

则$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ e^{1+x}, & -1\leqslant x<0,\\ e^{e^x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

15. 试将函数$f(x)=2|x-2|+|x-1|$表示成分段函数, 并画出它的图像.

解 对于绝对值函数来说, 不同的定义域区间, 函数的表达式不同, 要分段讨论.

因为$|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geqslant 2,\\ 2-x, & x<2,\end{cases}$ $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 所以

$$f(x)=\begin{cases}2(2-x)+(1-x), & x\leqslant 1,\\ 2(2-x)+(x-1), & 1<x<2,\\ 2(x-2)+(x-1), & x\geqslant 2.\end{cases}$$

从而, $f(x)=\begin{cases}5-3x, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x<2,\\ 3x-5, & x\geqslant 2.\end{cases}$

作图略.

习题 1-2 数列极限的定义与计算

1. 下列各题中, 哪些数列收敛, 哪些数列发散? 对于收敛数列, 通过观察得出数列的

极限，并试着用数列的极限定义证明得到的结果.

（1）$x_n=\dfrac{1}{a^n}(a>1)$；　（2）$x_n=2^{\frac{1}{n}}$；　（3）$x_n=(-1)^n n$；　（4）$x_n=\dfrac{n+2}{n+3}$；

（5）$x_n=\dfrac{n}{2^n}$；　（6）$x_n=\ln\dfrac{1}{n}$；　（7）$x_n=\dfrac{n}{n^2+1}$；　（8）$x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$；

（9）$x_n=0.\underbrace{999\cdots9}_{n}$；　（10）$x_n=\dfrac{\sin n}{(n+1)^n}$.

解　（1）数列收敛于 0.

对于任意 $\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<1$. 要使 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{a^n}-0\right|<\varepsilon$，只需 $|a|^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-0|<\varepsilon$，所以该数列收敛到 0.

（2）数列收敛于 1.

对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|=|2^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$，只要使 $\log_2(1-\varepsilon)<\dfrac{1}{n}<\log_2(1+\varepsilon)$，即 $n>\dfrac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\log_2(\varepsilon+1)}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-1|<\varepsilon$，所以该数列收敛于 1.

（3）数列发散.

（4）数列收敛于 1.

对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|=\left|\dfrac{n+2}{n+3}-1\right|=\dfrac{1}{n+3}<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-1|<\varepsilon$，所以该数列收敛到 1.

（5）数列收敛于 0.

由二项式定理可知，$2^n=(1+1)^n>1+n+\dfrac{n(n+1)}{2}>\dfrac{n(n+1)}{2}$

对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=\left|\dfrac{n}{2^n}\right|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{n}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2}{n+1}<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，即

$n>\dfrac{2}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-0|<\varepsilon$，所以该数列收敛到 0.

（6）数列发散.

（7）数列收敛于 0.

对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=\left|\dfrac{n}{n^2+1}\right|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{n}{n^2+1}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即

$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-0|<\varepsilon$，所以该数列收敛到 0.

（8）数列收敛于 1.

对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-1|=\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}\right|<\varepsilon$，只需 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}\right|=\left|\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}\right|<$

$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-1|<\varepsilon$，所以该数列收敛到 1.

(9) 数列收敛于 1.

对于任意 $\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<1$. $x_n=1-\frac{1}{10^n}$，要使 $|x_n-1|=\left|\frac{1}{10^n}\right|<\varepsilon$，只需 $10^n>\frac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[-\lg\varepsilon]$，当 $n>N$ 时，$|x_n-1|<\varepsilon$.

(10) 数列收敛于 0.

对于任意 $\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=\left|\frac{\sin n}{(n+1)^n}\right|<\left|\frac{1}{(n+1)^n}\right|<\varepsilon$，只需

$\left|\frac{1}{(n+1)^n}\right|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，则有 $|x_n-0|<\varepsilon$，所以该数列收敛到 0.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+3n}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}-\frac{n}{2}\right)$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n^2]{2}\cdot\sqrt[n^2]{2^2}\cdot\sqrt[n^2]{2^3}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n^2]{2^n})$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$；(10) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

解　(1) 分子、分母同除以 n^2：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\frac{2n^2+3n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+3}{n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) 分子、分母同除以 3^n：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+1}{3^n}}{\frac{3^n-1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=0.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}.$

(5) 由等差数列的求和公式可知 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}-\frac{n}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(6) 将分子有理化，分子、分母同乘 $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}.$$

(7) 将分子有理化，分子、分母同乘 $\sqrt{n^2+1}+n$,

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n^2]{2}\cdot\sqrt[n^2]{2^2}\cdot\sqrt[n^2]{2^3}\cdot\cdots\cdot\sqrt[n^2]{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}}\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n+1}{2n}}=\sqrt{2}.$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\left[\frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(10) 将分子有理化，分子、分母同乘 $\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\frac{n+3\sqrt{n}}{n}}+\sqrt{\frac{n-\sqrt{n}}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

$$=2.$$

3. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2\,016}}{n^k-(n-1)^k}=\mathbf{A}\neq0$，求 k 的值.

解　根据二项式展开可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2\,016}}{n^k-(n-1)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2\,016}}{n^k-[n^k-kn^{k-1}+\cdots+(-1)^k]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2\,016}}{kn^{k-1}+\cdots+(-1)^k}=A\neq0,$$