

八十年代国内外高初中
数学竞赛试题 100 份汇解
(上 册)

吴 康 编

华南师范大学数学系

一九八七年七月

八十年代国内外高、初中数学竞赛

试题100份汇编

(上册)

前 言

中国数学奥林匹克事业，以我国首次参加国际数学奥林匹克(IMO)为里程碑，走上坦途，令人欢欣！广大中学生和数学爱好者，将更有机会以此为导游，倾智慧，洒汗水，领略数学王国风光。21世纪，是他们大显身手的时候。这本试题集，谨奉送给他们，期望能为他们的成材道路，多铺一块基石。

近年我国的初等数学和数学竞赛研究，群星闪烁，百花芬芳。本题集原拟撷名家之精华，呈数学之瑰丽，让各种奇思妙解，荟萃一堂，争奇斗艳，各显神通，使人开卷拍案叫绝，静思回肠荡气，岂非精神美事？可惜笔者空有热血，功力未足，欲达以上目标，谈何容易？现在试题尚缺十之一二（祈盼各位赠题送解，“填补空白”）部分题解亦无处可觅，只好独力勉为其难。错漏、欠缺、繁杂、蹩脚之处，则更在所难免，先此致歉，如蒙识者赐教，则不胜感激之至！

吴 康

1987年7月30日
于华南师范大学数学系

上 册 目 录

前言

第一章 国际数学竞赛

A. 国际中学生奥林匹克数学竞赛(IMO)

1. 第22届IMO

2. 第23届IMO

3. 第24届IMO

4. 第25届IMO

5. 第26届IMO

6. 第27届IMO

7. 第28届IMO (暂缺)

B. 其它国际数学邀请赛

8. 1980年芬兰国际数学邀请赛

9. 1980年卢森堡国际数学邀请赛

第二章 国内高中数学竞赛

A. 全国高中联合数学竞赛

10. 1981年25省市自治区联合数学竞赛

11. 1982年28省市自治区联合数学竞赛

12. 1983年省市自治区联合数学竞赛

13. 1984年省市自治区联合数学竞赛

14. 1985年省市自治区联合数学竞赛

15. 1986年全国高中数学联合竞赛

16. 1987年全国高中数学联合竞赛(暂缺)

B. 全国中学生数学冬令营选拔竞赛

17. 首届全国中学生数学冬令营竞赛

18. 第二届全国中学生数学冬令营竞赛

C. 全国数学奥林匹克集训班选拔考试

19. 首届全国数学奥林匹克集训班选拔考试	46
20. 第二届全国数学奥林匹克集训班选拔考试	48
D. 北京市高中学生数学竞赛	49
21. 北京市 1981 年中学数学竞赛	49
22. 北京市 1982 年中学数学竞赛 (暂缺)	
23. 北京市 1983 年中学数学竞赛 (暂缺)	
24. 北京市 1984 年中学数学竞赛	51
25. 北京市 1985 年中学数学竞赛	53
26. 北京市 1986 年中学数学竞赛 (暂缺)	
27. 北京市 1987 年中学数学竞赛	56
E. 上海市高中学生数学竞赛	59
28~29. 上海市 1981 年中学生数学竞赛	59
30~31. 上海市 1982 年中学生数学竞赛	62
32. 上海市 1983 年中学生数学竞赛	65
33~34. 上海市 1984 年中学生数学竞赛	69
35. 上海市 1985 年中学生数学竞赛	74
36~37. 上海市 1986 年高中数学竞赛	79
38~39. 上海市 1987 年中学生数学竞赛 (暂缺)	
F. 其它省市自治区和大中城市高中学生数学竞赛	84
40. 1980 年安徽省中学生数学竞赛	84
41. 苏州市 1983 年中学生数学竞赛	86
42. 苏州市 1984 年中学生数学竞赛	87
43. 1985 年苏州市、镇江市高中数学竞赛	89
44. 1985 年合肥市高中数学竞赛	90
45. 1985 年无锡市高中数学竞赛	93
46. 1986 年苏州市高中数学竞赛	97
47. 1986 年合肥市高中数学竞赛	100
48. 烟台市 1986 年数学竞赛	102

第三章. 国内初中数学竞赛	105
A. 全国初中数学竞赛	105
49. 1985 年自治区联合初中数学竞赛	105
50. 1986 年全国初中数学竞赛	109
51. 1987 年全国初中数学联合竞赛	111
B. 北京市初中数学竞赛	114
52. 北京市 1981 年初中学数学竞赛	115
53. 北京市 1982 年初中学数学竞赛	115
54. 北京市 1983 年初中学数学竞赛	117
55. 北京市 1984 年初中学数学竞赛	120
56. 北京市 1985 年中学生数学竞赛	122
57. 北京市 1986 年中学生数学竞赛	124
58. 北京市 1987 年中学生数学竞赛	125
C. 上海市初中数学竞赛	127
59. 上海市 1982 年初中学数学竞赛	128
60. 上海市 1983 年初中学数学竞赛	130
61. 上海市 1984 年初中学数学竞赛	133
62. 上海市 1985 年初中学数学竞赛	136
63. 上海市 1986 年初中学数学竞赛 (暂缺)	
64. 上海市 1987 年初中学数学竞赛 (暂缺)	
D. 广州、武汉、福州等城市联合初中数学竞赛	138
65. 广州、武汉、福州联合初中数学竞赛 (1984 年)	138
66. 广州、武汉、福州联合初中数学竞赛	141
67. 武汉、重庆、福州、广州联合初中数学竞赛	143
68. 武汉、广州、福州、重庆初中数学联赛	146
E. 其它省市自治区等初中学生数学竞赛	149
69. 福建省 1981 年初中学数学竞赛	149
70. 天津市 1982 年初中学数学竞赛	150

71. 福建省 1982~1983 年度初中数学竞赛	152
72. 湖北省 1982 年初中数学竞赛	155
73. 天津市 1983 年初中数学竞赛	157
74. 福建省 1983~1984 年度初中数学竞赛	159
75. 湖北省 1983 年初中数学竞赛	161
76. 河北省 1983 年初中数学竞赛	163
77. 广西壮族自治区 1983 年初中数学竞赛	165
78. 天津市 1984 年初中数学邀请赛	166
79. 吉林省 1984 年初中数学竞赛	169
80. 吉林省 1985 年初中数学竞赛	172
81. 重庆市第三届“缙云杯”初中数学邀请赛	174
82. 江苏省 1986 年初中数学竞赛	180
第四章. 美国中学生数学竞赛	183
A. 美国初中数学竞赛	183
83. 第一届美国初中数学竞赛 (1985 年) (暂缺)	
84. 第二届美国初中数学竞赛 (1986 年) (暂缺)	
85. 第三届美国初中数学竞赛 (1987 年) (暂缺)	
B. 美国高中数学竞赛	183
86. 第 31 届美国高中数学竞赛 (1980 年)	183
87. 第 32 届美国高中数学竞赛 (1981 年)	189
88. 第 33 届美国高中数学竞赛 (1982 年)	195
89. 第 34 届美国高中数学竞赛 (1983 年)	201
90. 第 35 届美国高中数学竞赛 (1984 年)	205
91. 第 36 届美国高中数学竞赛 (1985 年)	210
92. 第 37 届美国高中数学竞赛 (1986 年)	216
93. 第 38 届美国高中数学竞赛 (1987 年)	222
C. 美国数学邀请赛	228
94. 第一届美国数学邀请赛 (1983 年)	228
95. 第二届美国数学邀请赛 (1984 年)	231

96. 第三届美国数学邀请赛 (1985年)	233
97. 第四届美国数学邀请赛 (1986年)	236
98. 第五届美国数学邀请赛 (1987年)	238
D. 美国中学生奥林匹克数学竞赛	241
99. 第9届美国中学生奥林匹克数学竞赛	241
100. 第10届美国中学生奥林匹克数学竞赛	242
101. 第11届美国中学生奥林匹克数学竞赛	243
102. 第12届美国中学生奥林匹克数学竞赛	244
103. 第13届美国中学生奥林匹克数学竞赛	244
104. 第14届美国中学生奥林匹克数学竞赛	246
105. 第15届美国中学生奥林匹克数学竞赛	246
106. 第16届美国中学生奥林匹克数学竞赛 (暂缺)	
第五章. 苏联中学生数学竞赛	247
A. 全苏中学生数学竞赛	247
107. 第14届全苏中学生数学竞赛	247
108. 第15届全苏中学生数学竞赛	252
109. 第16届全苏中学生数学竞赛 (暂缺)	
110. 第17届全苏中学生数学竞赛 (暂缺)	
111. 第18届全苏中学生数学竞赛	259
112. 第19届全苏中学生数学竞赛	262
113. 第20届全苏中学生数学竞赛 (暂缺)	
114. 第21届全苏中学生数学竞赛 (暂缺)	
B. 全俄中学生数学竞赛	265
115. 第6届全俄中学生数学竞赛	265
116. 第7届全俄中学生数学竞赛	267
117. 第8届全俄中学生数学竞赛 (暂缺)	
118. 第9届全俄中学生数学竞赛	269
119. 第10届全俄中学生数学竞赛	272

120. 第11届全俄中学生数学竞赛	274
121. 第12届全俄中学生数学竞赛 (暂缺)	
122. 第13届全俄中学生数学竞赛 (暂缺)	
第六章、世界其它国家中学生数学竞赛	277
A. 1980年	277
123. 英国第16届奥林匹克数学竞赛	277
B. 1981年	278
124. 澳大利亚中学生数学竞赛	278
125. 西德中学生数学竞赛	280
126. 加拿大第13届奥林匹克数学竞赛	282
C. 1982年	283
127. 加拿大第14届奥林匹克数学竞赛	283
128. 西德中学生数学竞赛	284
129. 英国第18届奥林匹克数学竞赛	285
D. 1983年	286
130. 1983年瑞士奥林匹克数学竞赛	286
131. 1983年澳大利亚奥林匹克数学竞赛	287
132. 1983年瑞典奥林匹克数学竞赛	288
133. 加拿大第15届奥林匹克数学竞赛	290
134. 1983年荷兰奥林匹克数学竞赛	290
E. 1984年	291
135. 加拿大第16届奥林匹克数学竞赛	291
F. 1985年	292
136. 1985年英国奥林匹克数学竞赛	292
137. 加拿大第17届奥林匹克数学竞赛	294
138. 1985年新加坡中学数学竞赛	295

第一章 国际数学竞赛

A. 国际中学生奥林匹克数学竞赛

1. 第22届国际数学竞赛

(1981.07.13~14. 考9+时, 分2天进行)

一. P 为 $\triangle ABC$ 内一点, D, E, F 分别为 P 到 BC, CA 各边所引垂线的垂足, 求所有使 $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ 为最小的 P 点.

二. 设 $1 \leq r \leq n$. 考虑集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有含 r 个元素的子集及每一个这样子集中最小的数. 用 $F(n, r)$ 表示这些最小数的算术平均数.

证明: $F(n, r) = \frac{(n+1)}{(r+1)}$.

三. 确定 $m + n^2$ 的最大值. 其中 m, n 为整数, 且 $m, n \in \{1, 2, \dots, 1981\}$, $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

四. 1. 对什么样的 $n > 2$ 的 ^{整数} n , 有一个由 n 个连续正整数组成的集合, 集合中最大一个数是其余的 $n-1$ 个数的最小公倍数的约数?

2. 对什么样的 $n > 2$ 的 ^{整数} n , 恰有一个集合具有上述性质?

五. 三个全等的圆有一个公共点 O , 并且都在一个已知的三角形内, 每一个圆与三角形的两边相切. 证明这个三角形的内心, 外心与 O 点共线.

六. 函数 $f(x, y)$ 对所有的非负整数 x, y , 满足 (1) $f(0, y) = y + 1$,

$$(2) f(x+1, 0) = f(x, 1),$$

$$(3) f(x+1, y+1) = f[x, f(x+1, y)].$$

试确定: $f(4, 1981)$.

2. 第23届国际数学竞赛

(考试时间: 2天)

一. 设 $f(n)$ 是定义在所有正整数 n 上并取非负整数值的函数, 并且满足: 对于所有的 m, n :

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ 或 } 1.$$

又已知 $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, 以及 $f(9999) = 3333$
求 $f(1982)$.

二. 设 A_1, A_2, A_3 为一个给定的不等边三角形, 其三边为 a_1, a_2, a_3 (a_i 为与 A_i 相对的边), 对于 $i = 1, 2, 3$, 设 M_i 是边 a_i 的中点, T_i 是内切圆与边 a_i 相切的切点, 又 T_i 在 A_i 的内角平分线内的反射点是 S_i , 求证直线 $M_1 S_1$, $M_2 S_2$ 和 $M_3 S_3$ 共点.

三. 考虑具有下述性质的正实数无穷序列 $\{x_n\}$:
 $x_0 = 1$, 对于所有 $i \geq 0$, $x_{i+1} \leq x_i$,

1. 证明对于所有这样的序列, 存在一个 $n \geq 1$, 使得:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999$$

2. 求这样的序列, 满足:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4, \text{ 对于所有 } n.$$

四. 证明: 如果 n 是一个正整数, 使得方程 $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ 有一个整数解 (x, y) , 则这个方程至少有三个这样的解.

证明当 $n = 2891$ 时上述方程没有整数解.

五. 设正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 与 CE 分别被内点 M 与 N 分割, 并且有 $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \gamma$.

又设 B, M 与 N 共线, 求 γ 的值.

六. 设 S 是一个边长为 100 的正方形, 又设 L 是一条在 S 内部由线段 $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n, A_0 \neq A_n$, 组成的自身不相交的路, 设对于 S 的边界上的每一个点 P , 在 L 上存在一个点. 它与 P 的距离不大于 $\frac{1}{2}$. 证明在 L 上存在两个点 X 与 Y , 满足: X 与 Y 的距离不大于 1, L 上介于 X 与 Y 间的部分的长度不小于 198.

3. 第24届国际数学竞赛

(1983.07.01. ~ 11. 法国. 考9小时, 分2天进行)

一. 找出满足条件 (i) $f(\lambda^{-1}(y)) = yf(x)$, (ii) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ 的所有定义在实数集中取正值的函数 f .

二. 已知 A 为平面上两半径不等的圆 O_1 和圆 O_2 的一个交点, 外公切线 P_1P_2 , 切点为 P_1, P_2 , 另一外公切线 Q_1Q_2 , 切点为 Q_1, Q_2 , M_1, M_2 分别为 P_1Q_1, P_2Q_2 的中点. 求证 $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

三. 设 a, b, c 是两两互质的正整数, 证明 $2abc - ab - bc - ca$ 是不能表示为 $xbc + yca + zab$ 形式的最大整数 (其中 x, y, z 是非负整数).

四. 设 ABC 是等边三角形, E 是三边 AB, BC, CA (包括 A, B, C) 的所有点的集合, E 的每一次划分为两个不相交的子集中, 是否至少有一个子集中含有一个直角三角形的三个顶点? 并证明你的论断.

五. 能否选择 1983 个不同的正整数都小于或等于 10^5 , 且其中没有三个正整数是算术级数中的连续项? 并证明你的论断.

六. 设 a, b, c 是三角形的边长, 证明:
 $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$. 并说明何时等

号成立.

4. 第25届国际数学竞赛

(1984.07.04 ~ 05 考7小时, 分2天进行. 捷克斯拉格.)

一. 证明: $0 \leq YZ + ZX + XY - 2XYZ \leq \frac{7}{27}$, 其中 X, Y, Z 为非负实数, 满足 $X + Y + Z = 1$.

二. 求一对正整数 a, b , 满足

1. $ab(a+b)$ 不被7整除;

2. $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ 被 7^7 整除.

验证你的答案.

三. 平面上已给两个不同的点 O, A , 对这平面上的每一个不同于 O 的点 X , 将从 OA 依反时针转到 OX 时所转过的角的大小 (用弧度制表示) 记为 $a(X)$ ($0 \leq a(X) < 2\pi$). 令 $C(X)$ 为以 O 为圆心, 长 $OX + \frac{a(X)}{OX}$ 为半径的圆, 已知这平面上每一个点都被涂上颜色, 而颜色的种数是有限的. 证明一定存在一点 Y , $a(Y) > 0$, 并且点 Y 的颜色在圆 $C(Y)$ 的圆周上出现.

四. 设在凸四边形 $ABCD$ 中, 直线 CD 与以 AB 为直径的圆相切. 证明当且仅当直线 $BC \parallel AD$ 时, 直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切.

五. 设一个有 $n (n > 3)$ 个顶点的平面凸多边形的所有对角线的长度之和为 d , 周长为 P , 证明:

$$n-3 < \frac{2d}{P} < \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

六. 设 a, b, c, d , 为奇整数, $0 < a < b < c < d$, 并且 $ad = bc$, 证明如果有整数 k, m 使得
— $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$, 那么 $a = 1$.

5. 第26届国际数学竞赛

(1935. 07. 04~05. 考9小时, 分2天进行. 考三赫尔辛基)

— 设凸四边形 $ABCD$ 的顶点在一个圆周上. 另一个圆, 它的圆心在边 AB 上, 且与四边形的其余三个边相切, 求证: $AD + BC = AB$.

二. n 为正整数, 整数 k 与 n 互素, $0 < k < n$, 由 $1, 2, \dots, (n-1)$ 组成的集记为 M , M 中的每个数染上兰白二色中的一种, 染法如下:

1. 对 M 中的每个 i , i 和 $(n-i)$ 同色,

2. 对 M 中的每个 i , $i \neq k$, i 和 $|i-k|$ 同色.

求证: M 中所有的数必为同色.

三. 对任意整系数的多项式 $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$, 令 $W(P)$ 表示 $P(x)$ 中系数为奇数的个数. 考虑多项式

$Q_i(x) = (1+x)^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. 若 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 都是整数, 而且 $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

求证: $W(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq W(Q_{i_1})$.

四. 设 M 是由 1985 个不同的正整数组成的集, 其中每个元素的素数因子不大于 26, 求证: 从 M 中至少可以找到一个由四个不同元素(数)组成的子集, 使得这四个数的乘积等于某个整数的四次方.

五. 设 ABC 为三角形, 一个以 O 为圆心的圆经过顶点 A 和 C , 又和线段 AB 及线段 BC 分别交于点 K 及 N , K 与 N 不同. 三角形 ABC 和三角形 KBN 的外接圆恰相交于 B 和另一个点 M . 求证: $\angle OMB$ 为直角.

六. 对于每个实数 x_i , 按下列方式构造序列