八十年代国内外高初中数学竞赛试题100份汇解

（上　册）

吴　康　编

华南师范大学数学系

一九八七年七月

八十年代国内外高、初中数学竞赛

试题100份汇解

（上册）

前　　言

中国数学奥林匹克事业，以我国首次参加国际数学奥林匹克（IMO）为里程碑，走上坦途，令人欢欣！广大中学生和数学爱好者，将更有机会以此为导游，倾智慧洒汗水，领略数学王国风光。21世纪，是他们大显身手的时候。这本试题集，谨奉送给他们，期望能为他们的成材道路，多铺一块基石。

近年我国的初等数学和数学竞赛研究，群星闪烁，百花芬芳。本题集原拟撷名家之精华，呈数学之瑰丽，让各种奇思妙解，荟萃一堂，争奇斗艳，各显神通，使人开卷拍案叫绝，静思回肠荡气，岂非精神美多？可惜笔者空有热血，功力未足，欲达以上目标，谈何容易？现在试题尚缺十之一二（祈盼各位赠题送解，"填补空白"）部分题解亦无处可觅，只好独力勉为其难。错漏、欠缺、繁杂、蹩脚之处，则更在所难免，先此致歉，如蒙识者赐教，则不胜感激之至！

吴　康

1987 年 7 月 30 日

于华南师范大学数学系

上 册 目 录

第一章 国际数学竞赛

A. 国际中学生奥林匹克数学竞赛

1. 第22届国际数学竞赛

（1981.07.13～14. 考9小时，分2天进行）

一. P为$\triangle ABC$内一点，D、E、F分别为P到BC、CA各边所引垂线的垂足，求所有使$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$为最小的P点.

二. 设$1 \leqslant r \leqslant n$. 考虑集合$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有含$r$个元素的子集及每一个这样子集中最小的数. 用$F(n, r)$表示这些最小数的算术平均数.

证明：$F(n, r) = (n+1)/(r+1)$.

三. 确定 $m + n^2$ 的最大值. 其中 m, n 为整数, 且 $m, n \in \{1, 2, \cdots, 1981\}$, $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

四. 1. 对什么样的 $n > 2$ 的整数，有一个由 n 个连续正整数组成的集合，集合中最大一个数是其余的 $n-1$ 个数的最小公倍数的约数？

2. 对什么样的 $n > 2$ 的整数，恰有一个集合具有上述性质？

五. 三个全等的圆有一个公共点 O，并且都在一个已知的三角形内，每一个圆与三角形的两边相切. 证明这个三角形的内心，外心与 O 点共线.

六. 函数 $f(x, y)$ 对所有的非负整数 x、y，满足 (1) $f(0, y) = y + 1$,

(2) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$,

(3) $f(x+1, y+1) = f[x, f(x+1, y)]$.

试确定: $f(4, 1981)$.

2. 第23届国际数学竞赛

（考7小时，分2天考）

一、设$f(n)$是定义在所有正整数n上并取非负整数值的函数，并且满足：对于所有的m、n：

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{或} 1.$$

又已知$f(2)=0$，$f(3)>0$，以及$f(9999)=3333$

求$f(1982)$。

二、设$A_1A_2A_3$为一个给定的不等边三角形，其三边为a_1，a_2，a_3（a_i为与A_i相对的边），对于$i=1,2,3$，设M_i是边a_i的中点，T_i是内切圆与边a_i相切的切点，又T_i在A_i的内角平分线内的反射点是S_i，求证直线M_1S_1，M_2S_2和M_3S_3共点。

三、考虑具有下述性质的正实数无穷序列$\{x_n\}$：

$x_0=1$，对于所有$i\geqslant 0$，$x_{i+1}\leqslant x_i$，

1. 证明对于所有这样的序列，存在一个$n\geqslant 1$，使得：$\dfrac{x_0^2}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3.999$

2. 求这样的序列，满足：

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4，\text{对于所有}n.$$

四．证明：如果n是一个正整数，使得方程

$x^3-3xy^2+y^3=n$ 有一个整数解(x,y)，则这个方程至少有三个这样的解．

证明当$n=2891$时上述方程没有整数解．

五．设正六边形$ABCDEF$的对角线AC与CE分别被内点M与N分割，并且有$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$．

又设B，M与N共线，求r的值．

六．设S是一个边长为100的正方形，又设L是一条在S内部由线段A_0A_1，A_1A_2，…，$A_{n-1}A_n$，$A_0\neq A_n$，组成的自身不相交的路，设对于S的边界上的每一个点P，在L上存在一个点．它与P的距离不大于$1/2$．证明在L上存在两个点X与Y，满足：X与Y的距离不大于1，L上介于X与Y间的部分的长度不小于198．

3．第24届国际数学竞赛

（1983.07.01.～11. 法国．考9小时，分2天进行）

一. 找出满足条件 (i) $f(xf(y))=yf(x)$; (ii) 当 $x\to\infty$ 时, $f(x)\to 0$ 的所有定义在正实数集中取正值的函数 f.

二. 已知 A 为平面上两半径不等的圆 O_1 和圆 O_2 的一个交点，外公切线 P_1P_2，切点为 P_1、P_2，另一外公切线 Q_1Q_2，切点为 Q_1，Q_2，M_1、M_2 分别为 P_1Q_1、P_2Q_2 的中点. 求证 $\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$

三. 设 a、b、c 是两两互质的正整数，证明 $2abc-ab-bc-ba$ 是不能表示为 $xbc+yca+zab$ 形式的最大整数（其中 x，y，z 是非负整数）.

四. 设 ABC 是等边三角形，E 是三边 AB，BC，CA（包括 A，B，C）的所有点的集合，E 的每一次划分为两个不相交的子集中，是否至少有一个子集中含有一个直角三角形的三个顶点；并证明你的论断.

五. 能否选择 1983 个不同的正整数都小于或等于 10^5，且其中没有三个正整数是算术级数中的连续项？并证明你的论断.

六. 设 a、b、c 是三角形的边长，证明：

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$. 并说明何时等

号成立．

4．第25届国际数学竞赛

（1984.07.04～05 考9小时，分2天进行．捷克布拉格．）

一．证明：$0 \leq YZ + ZX + XY - 2XYZ \leq \frac{7}{27}$，其中 X，Y，Z 为非负实数，满足 $X + Y + Z = 1$。

二．求一对正整数 a，b，满足

1．$ab(a+b)$ 不被 7 整除；

2．$(a+b)^7 - a^7 - b^7$ 被 7^7 整除。

验证你的答案．

三．平面上已给两个不同的点 O、A，对这平面上的每一个不同于 O 的点 X，将从 OA 依反时针转到 OX 时所转过的角的大小（用弧度制表示）记为 $a(X)$（$0 \leq a(X) < 2\pi$）．令 $C(X)$ 为以 O 为圆心，长 $OX + \frac{a(X)}{OX}$ 为半径的圆，已知这平面上每一个点都被涂上颜色，而颜色的种数是有限的．证明一定存在一点 Y，$a(Y) > 0$，并且点 Y 的颜色在圆 $C(Y)$ 的圆周上出现。

四．设在凸四边形 ABCD 中，直线 CD 与以 AB 为直径的圆相切．证明当且仅当直线 BC∥AD 时，直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切．

五．设一个有 $n\ (n>3)$ 个顶点的平面凸多边形的所有对角线的长度之和为 d，周长为 P，证明：

$$n-3<\frac{2d}{P}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

六．设 a, b, c, d，为奇整数，$0<a<b<c<d$，并且 $ad=bc$，证明如果有整数 k，m 使得

$a+d=2^k$，$b+c=2^m$，那么 $a=1$．

5．第26届国际数学竞赛

（1985.07.04~05．考9小时，分2天进行．芬兰赫尔辛基）

一．设凸四边形 ABCD 的顶点在一个圆周上．另一个圆，它的圆心在边 AB 上，且与四边形的其余三个边相切，

求证：$AD+BC=AB$．

二. n为正整数，整数k与n互素，$0<k<n$，由1，2，……$(n-1)$组成的集记为M，M中的每个数染上蓝、白二色中的一种，染法如下：

1. 对M中的每个i，i和$(n-i)$同色，

2. 对M中的每个i，$i\neq k$，i和$|i-k|$同色.

求证：M中所有的数必为同色.

三. 对任意整系数的多项式 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots a_kx^k$，令$W(P)$表示$P(x)$中系数为奇数的个数. 考虑多项式

$Q_i(x)=(1+x)^i$，$i=0, 1, 2\cdots\cdots$ 若i_1，$i_2\cdots i_n$都是整数，而且$0\leq i_1<i_2<\cdots<i_n$.

求证：$W(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots Q_{i_n})\geq W(Q_{i_1})$.

四. 设M是由1985个不同的正整数组成的集，其中每个元素的素数因子不大于26，求证：从M中至少可以找到一个由四个不同元素(数)组成的子集，使得这四个数的乘积等于某个整数的四次方.

五. 设ABC为三角形，一个以O为圆心的圆经过顶点A和C，又和线段AB及线段BC分别交于点K及N，K与N不同. 三角形ABC和三角形KBN的外接圆恰相交于B和另一个点M. 求证：$\angle OMB$为直角.

六. 对于每个实数x_i，按下列方式构造序列