面向“十二五”规划教材

数学建模方法

范丽亚◎编著

吉林大学出版社

数学建模方法

范丽亚　编著

吉 林 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模方法 / 范丽亚编著. — 长春 : 吉林大学出版社, 2015.11

面向“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5677-5180-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①范… Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 290038 号

书名：数学建模方法

作者：范丽亚 编著

责任编辑：朱进 责任校对：甄志忠

封面设计：美印图文

吉林大学出版社出版、发行

北京龙跃印务有限公司 印刷

开本：787×1092 毫米 1/16

2015 年 12 月 第 1 版

印张：12.25 字数：221 千

2015 年 12 月 第 1 次印刷

ISBN 978-7-5677-5180-4

定价：42.80 元

社址：长春市明德路 501 号 邮编：130021

发行部电话：0431-89580028/29

网址：http://www.jlup.com.cn

E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

数学建模(Mathematical Modeling)作为一个词汇问世，不过是近几十年的事情，可是，在数学产生、发展的历史长河中，人们用建立数学模型的方法解决那些需要数量规律的现实问题，并获得巨大的成功，是不乏先例的。进入 21 世纪以来，数学的应用不仅在它的传统领域——工程技术、经济建设等发挥着越来越重要的作用，而且不断地向一些新的领域渗透，形成交叉学科，如：计量经济学、人口控制论、生物数学、地质数学等。数学与计算机计算的结合，形成了一种普遍的、可以实现的技术——数学技术，成为当代高新技术的重要组成部分。

在用数学方法解决现实生活中碰到的实际问题，或与其他学科相结合形成新学科的过程中，首要的和最为关键的一步就是用数学的语言来表述所研究的对象，即建立实际问题的数学模型。在此基础上才能运用数学的理论和方法进行分析和计算，为解决实际问题给出定量的结果或定性的数量依据，计算和建模正在成为数学科学技术转化的主要途径。

数学建模进入大学课堂，既顺应了时代发展的潮流，也符合教育改革的要求。对于数学教育而言，既应该让学生掌握准确快速的计算方法和严密的逻辑推理，也需要培养他们用数学工具分析和解决实际问题的意识和能力。传统的数学教育体系和内容无疑偏重于前者，开设数学建模课程则是加强后者的一种有益的、成功的尝试。目前，数学建模课程已在千余所高校中开设，很多高校已将其设为相关专业的核心必修课.

本书是作者在总结多年教学经验的基础上，参照自编的讲义以及相关教材而编写的。学完本书全部内容约需 64 学时，其中课堂教学 48 学时，上机实验 16 学时。本书针对的主要授课对象是理工科专业的大二本科生。全书共分 7 章，包括绪论、初等模型、简单的优化模型、八种常用的数学建模方法、综合评价法、统计回归方法和微分方程模型等。每章末均编写了适量的习题，以便读者课后复习，巩固所学知识。上机实验内容随着课堂教授内容而确定，主要是完成课堂所讲授的实际问题的计算过程及计算结果。

为了使读者能更好的了解和掌握数学建模的基本思想和方法，提高解决实际问题的能力，在编写本书的过程中，力图做到以下几点：

1. 以实际问题为案例。本书大部分章节都是以实际问题为案例，阐述数学建模方法的基本思想和步骤，用尽可能简洁和直观的语言讲解数学模型的建立和求解过程，力求做到深入浅出，通俗易懂，以方便读者自学。

2. 以“搭桥”为主，兼顾数学理论。数学建模的明显特征和真正魅力在于如何建立实际问题的数学模型，即在实际问题和数学问题之间进行“搭桥”，并提供切实可行的数学求解方法。作为数学建模课程的教材，本书的整体设计以及选材等方面立足于“搭桥”，突出培养学生的数学应用能力。

3. 注重计算机软件的使用。尽管数学建模的方法是教学的主要内容，但从应用的角度出发，更强调培养学生运用计算机软件解决实际问题的能力，并把它视为学生必须掌握的技能。

4. 与国内目前流行的教材相比，本书在内容的取舍上有所不同。由于授课对象主要是理工科专业的大二本科生，且受总学时的限制，所以没有选择整数线性规划方法、非线性规划方法、动态规划方法、排队论方法等运筹学建模方法。

本书的编写和出版，得到了山东省应用型特色名校建设资金的资助，同时也得到了吉林大学出版社朱进先生及有关编辑的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢！

由于作者水平有限，编写时间又较仓促，书中不尽完善甚至错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

范丽亚

2015 年 6 月于聊城大学

目 录

第一章 绪 论

近几十年来，数学模型已经成为一个十分流行的词汇．经济学家经常讨论一个国家的宏观经济数学模型或某一经济行为特有的数学模型；化工企业或钢铁企业的管理人员经常研究用于生产过程自动控制的数学模型；生态专家为了保持生态平衡，经常研究生物种群发展的数学模型等等．随着现代科学技术的发展，数学的应用范围越来越广泛，它已深入渗透到物理、经济、管理、生态、环境、医学、化学、工程技术等领域，民间常称数学模型就是“狗皮膏药”，贴到哪里都好使．很多学科对各自领域中实际问题的研究日益精确化、定量化、数学化，这使得数学模型成为解决实际问题的重要工具．那么究竟什么是数学模型呢？

1.1 什么是数学模型

简单地说，数学模型就是利用数学的语言和方法模拟实际问题的模型，是数学问题与实际问题之间的“桥梁”．在现实生活中经常会遇到这样一些问题，四条腿的椅子在不十分平坦的地面上是否能放稳当，形状不规则的蛋糕能否均分成两块等等．在解决这些问题时往往需要揭示某些数量之间的内在关系或空间形式，而数量之间的内在关系和空间形式常常是隐藏在各种表面现象的背后，为此需要去粗取精，去伪存真，揭开表面现象，从中抽取出问题的本质来．由于实际问题往往比较复杂，从中抽取数学模型时不可能面面俱到，必须抓住主要因素，省略一些次要因素，使所抽取的数学模型可以用适当的数学方法和工具进行求解．因此，称以解决实际问题为目的，从实际问题中抽象、归纳和简化出来的可利用数学方法和工具进行求解的数学表达式或数学问题称为数学模型．

一方面，数学模型是为了解决实际问题而建立起来的，它必须描绘出实际问题中的某些数量关系．另一方面，数学模型只是一种模型，它不是实际问题的一个拷贝，它忽略了问题中许多与相关数量无关的因素，有时也忽略了一些与相关数量有关的次要因素．因此，从本质讲数学模型更加集中地反映了实际问题中的某些数量规律．

构成一个数学模型并非易事，构成一个好的数学模型对解决实际问题至关重

要．一个好的数学模型往往需要进行多次的改进和完善，也就是说，需要对实际问题进行条理性分析，经抽象和简化，应用某些数学方法描述问题的实质，构建初步的数学模型，采用适当的数学方法和工具进行求解，利用各种检验和评价方法对结果进行分析，如果结果不能较为合理地解决实际问题或离实际问题相差较远，则需改进所建模型．这样的过程重复多次才有可能得到一个比较理想的模型．称建立实际问题的较为理想的数学模型的过程为数学建模．也就是说，数学建模不仅包括建立实际问题的数学模型，还包括求解模型、检验模型、修改模型、应用模型等多个过程．

1.2 数学建模的发展与意义

数学建模有着悠久的历史．数学是在实际应用中应运而生的，要想用数学知识解决实际问题，首先需要建立的就是问题的数学模型．从这个意义上讲，数学建模与数学有着同样古老的历史．2000 年前创立的欧几里德几何就是一个古老的数学模型．

作为一门独立的课程，数学建模是 20 世纪 80 年代初进入我国高校的．1987 年，我国出版了第一本数学建模教材，当时只有少数几所高校的数学专业开设了这门课程．1993 年，开设此课程的学校增加到几十所，并且开始推向非数学专业．2003 年，数学建模教学推广到几百所学校，教材也有几十本．到目前，内容、形式不尽相同的数学建模课程已在千余所高校中开设，正式出版的教材和参考书多达 200 多种．

1992 年开始由教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会主办的、每年一届的全国大学生数学建模竞赛，得到了广大学生的热烈欢迎，以及教育部门和教师们的热情关心和支持，成为我国高校规模最大的课外科技活动．在全国竞赛的推动下，许多学校、地区也纷纷组织了竞赛．不少学校的同学自发成立了数学建模兴趣小组、数学建模协会等组织，举办了各种形式的课外活动．竞赛促进了数学建模教学的发展，教学又扩大了受益面，为竞赛奠定了坚实的基础．

进入 21 世纪以来，随着数学以空前的深度和广度向一切领域的渗透，以及电子计算机的出现与飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，过去很少应用数学的领域，如生物、医学、化学等自然科学领域，现在迅速走向定量化、数学化，建立了大量的数学模型，如分子结构模型、化学反应过程模型、人体器官模型、遗传基因模型等．同时，这些领域中还有大量的实际问题有待于建立数学模型．另一方面，在数学已经得到广泛应用的传统领域，如工程技术领域、经济学领域

等，由于新技术、新工艺的蓬勃兴起，又提出了许多新问题，而这些新问题中又有许多需要用数学的方法去解决，需要建立新的数学模型．譬如：

1．产品的分析、设计与制造．众所周知，制造业是国民经济的支柱产业之一，许多高新技术都是从这个产业中萌发出来的．数学在这个产业中的应用已经非常广泛，通过建立适当的数学模型，进行数学上的分析和数值计算，在产品的分析与设计阶段无需经过大量昂贵的实验就可准确地预知产品的性能．如描述药物浓度在人体内的变化规律用以分析药物的疗效；建立超音速流和激波的数学模型，用数值模拟设计波音 767 飞机翼型等．

2．质量的控制与生产过程的优化．质量控制是企业的存亡保证，也是一个国家国民经济的存亡保证．如何保证产品的质量以及电力、化工生产过程的最优控制都需建立数学模型．还有产品设计中的参数优化也要以数学建模为前提．

3．预报与决策．生产过程中产品质量指标的预测、气象预报、人口预报、经济增长预报等，都要有预报模型．使经济效益达到最大的价格策略、使费用达到最少的设备维修策略等都是通过数学建模来确定的．

4．规划与管理．生产计划、资源配置、运输网络配置、交通工具的优化调度、以及排队策略、物资管理等，都可以用数学模型得以解决．

此外，在高新技术领域，数学建模几乎是必不可少的工具．不论是发展通信、航天、微电子、自动化等高新技术本身，还是将高新技术用于传统工业去创新工艺、开发新产品，计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的手段．数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件，已经被固化于产品中，在许多高新技术领域起着核心的作用．

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透，一些新的交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生，当用数学方法研究这些领域中的定量关系时，数学建模就成为首要的、关键的步骤．在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的空间相当大，为数学建模提供了广阔的新天地．

总之，建立自然科学、社会科学、工程技术、经济管理等众多领域中的实际问题的数学模型，并用适当的数学方法和工具进行求解，在利用求解结果，分析、预报、预测、控制许多自然现象和社会现象，以及帮助人们作出决策都具有重大作用．

1.3 数学建模的特点与分类

数学建模是利用数学的方法和工具解决实际问题的重要手段，得到的模型有

许多优点，同时也有一些缺点，归纳一下可以得到以下几个特点.

数学建模的特点

1. 模型的逼真性与可行性. 一般说来，总是希望所建模型能尽可能的逼近研究对象，但是越逼真的模型常常是越复杂的模型，通常在在数学上是难以处理的，即使能处理，应用这样模型的“成本”也会相当高，因此建模时往往需要在模型的逼真性与可行性之间作出折中的选择.

2. 模型的渐进性. 建立稍微复杂一点的实际问题的模型通常不会一次成功，要经过反复的修改和完善，包括由简到繁，也包括删繁就简，以期获得越来越满意的模型.

3. 模型的稳定性. 模型的结构和参数常常是由模型假设和研究对象的信息如观测数据等所确定的，而假设不可能太精准，观测数据等信息也是允许有误差的. 一个好的模型应该具有下述意义的稳定性：当模型假设改变时，可以导出模型结构的相应变化；当观测数据等信息有微小改变时，模型参数也只有相应的微小变化.

4. 模型的可转移性. 模型是实际问题抽象化、理想化的产物，它不为实际问题所属的领域所独有，可以转移到其他领域. 如在生态、经济等领域内建立的模型常常是借用于物理领域中的模型。

5. 模型的非预制性. 虽然已经建立了很多应用广泛的数学模型，但是实际问题各种各样、变化万千，不可能要求把每种模型都做成预制品共你在建模时使用. 模型的这种非预制性使得模型本身常常是事先没有答案的问题，在建立新模型的过程中甚至会伴随着新的数学方法或数学概念的产生.

6. 模型的条理性. 从建模的角度考虑实际问题，可以促使人们对研究对象的分析更全面、更深入、更具有条理性，即使所建的模型由于种种原因未能达到实用的程度，但对问题的研究也是非常有利的.

7. 模型的技艺性. 数学建模的方法与其他一些数学方法如数学分析方法、高等代数方法、微分方程方法等有根本的不同，它无法归纳出若干条通用的准则和技巧. 有人说，与其说建模是一门技术，不如说是一门艺术，是技艺性很强的技巧，经验、想象力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等在建模过程中起的作用往往比一些具体的数学知识和工具更强大.

8. 模型的局限性. 通过数学建模得到的结论虽然具有适用性和精准性，但是因为模型是实际问题的简化、理想化产物，所以一旦将模型的结论应用于实际问题，就回到了现实世界，那些被忽略、被简化的因素必须加以考虑. 因此，模型

的适用性和精确性只是相对的和近似的.

数学模型的分类

数学模型是实际问题的抽象结果. 不同领域中的实际问题经过数学抽象，有可能得到类似的数学模型，也就是说，数学模型不受其研究对象所在的领域所限制，同一个模型可能解决不同领域中的不同问题. 另一方面，对同一个实际问题，由于对主要因素和次要因素的取舍和简化不同，以及所使用的数学方法不同，有可能得到不同的数学模型. 因此，根据所研究的实际问题和所采用的数学方法，数学模型大致可分为以下几类：

1. 按照模型的应用领域分. 如人口模型、生态模型、交通模型、环境模型、城镇规划模型、水资源模型、污染模型等.

2. 按照建立模型的数学方法分. 如初等模型、微分方程模型、概率论模型、运筹学模型、几何模型等.

3. 按照模型的表现形式可分为：

(1)静态模型和动态模型：主要取决于所考虑的问题是否随时间的变化而变化；

(2)离散模型和连续模型：主要取决于所考虑的变量是离散的，还是连续的；

(3)确定性模型和随机性模型：主要取决于所考虑的变量是确定性变量还是随机性变量；

(4)线性模型和非线性模型：主要取决于所考虑的变量间的关系是否为线性关系；

(5)解析模型和数值模型：主要取决于是用数学的理论方法求解，还是用数值方法求解；

4. 按照建模目的分. 描述模型、分析模型、预测模型、决策模型、控制模型等.

5. 按照对模型结构的了解程度分. 有白箱模型、灰箱模型、黑箱模型. 白箱模型的机理大都十分清晰，主要研究的是优化设计与优化控制等问题. 灰箱模型描述的是机理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面还有许多工作可做. 黑箱模型描述的是机理很不清楚的现象，在建立模型方面还有很多工作可做.

1.4 数学建模的基本方法与步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的，建模的目的不同、分析的方法不同、

采用的数学工具不同，所得模型的类型也不同，我们不能指望归纳出若干条准则，适用于一切实际问题的数学建模方法. 下面所谓的基本方法不是针对具体问题的，而是从方法论意义上讲的.

数学建模的基本方法

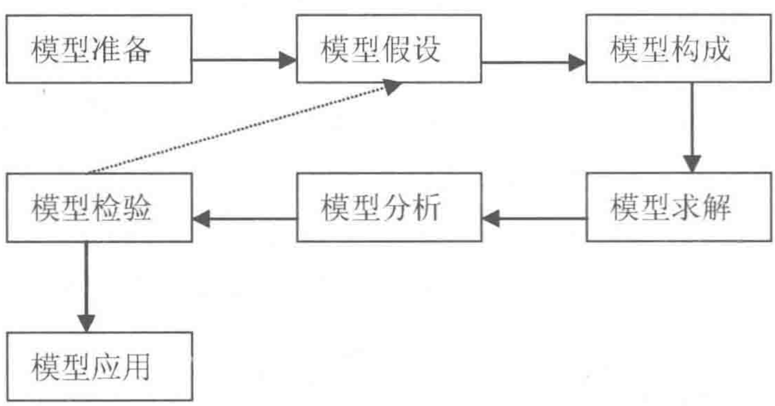
一般来说，数学建模的方法大体上可分为机理分析和测试分析. 机理分析是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数学规律，所建立的模型常常有明确的现实意义. 测试分析是把所研究的问题看作一个“黑箱”系统，通过对系统输入数据、输出数据的测量和统计分析，按照一定的准则找出与数据拟合最好的模型.

面对一个实际问题，用哪种方法建立模型，主要取决于人们对所研究的实际问题的了解程度和建模目的. 如果掌握了一些内部机理的知识，模型也要求具有反映内在特征的物理意义，建模就应以机理分析为主. 如果实际问题的内部规律基本上不清楚，模型也不需要反映内部特征，那么就可以用测试分析.

对于许多实际问题，常常是将两种方法结合起来使用，用机理分析建立模型的结构，用测试分析确定模型的参数.

数学建模的基本步骤

建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与问题的性质、建模的目的有关. 下面介绍的是机理分析方法建模的一般步骤，应当指出的是，并不是所有的问题的建模都要经过这些步骤，有时各步骤间的界限也不那么分明，建模时要采用灵活的表现形式.



模型准备　了解问题的实际背景，明确建模目的，收集必要的信息，尽量弄

清楚研究对象的主要特征，对研究对象形成一个比较清晰的认识，由此初步确定用哪一类模型，用哪种数学方法.

模型假设　根据研究对象的特征和建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，作出必要的、合理的简化假设，对于建模的成败是非常重要和困难的. 假设做得不合理或太简单，会导致错误的或无用的模型；假设做得过于详细，试图把复杂对象的众多因素都考虑进去，会使你很难或无法进行下一步工作.

模型构成　根据所做的假设，用数学的语言、符号描述所研究对象的内在规律，建立包含常量、变量等的数学模型，这不仅需要一些相关的数学知识，还需要较为广阔的应用数学方面的知识，要善于发挥想象力，注意使用类比法.

模型求解　可以采用解方程、画图形、数值计算、统计分析等各种数学方法，特别是数学软件和计算机技术.

模型分析　对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的稳定性分析等.

模型检验　把求解和分析所得的结果翻译回到实际问题中，与实际问题的现象、数据进行比较，检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符，问题常常出现在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模. 这一步对于模型是否真的有用至关重要，要认真对待，有些模型要经过多次的反复修改，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意为止.

模型应用　应用的方式与问题性质、建模目的及最终结果有关，一般不属于本课程讨论的范围.

第二章 初等模型

如果研究对象的机理比较简单，基本上可以用静态、线性、确定性模型进行描述就能达到建模目的，用简单的数学方法就可以进行求解，这样的问题称为初等问题，所建的模型称为初等模型. 需要强调的是，衡量一个模型的优劣全在于它的应用效果，而不是采用了多么高深的数学方法. 进一步说，如果对于某个实际问题我们用初等的方法和所谓的高等的方法建立了两个模型，它们的应用效果所差无几，那么受到人们欢迎并采用的一定是前者，而不是后者.

本章主要是通过几个案例来介绍如何运用简单的数学方法，如分析法、作图法、表格法等，去解决一些饶有兴趣的实际问题.

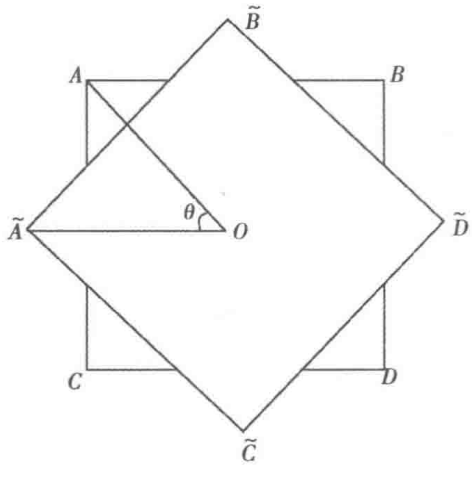
2.1 椅子问题

问题：在不十分平坦的地面上，一把四条腿的椅子能否放稳当？为什么？

模型准备. 椅子能否放稳当是指椅子的四条腿能否同时着地.

模型假设. 假设地面是连续的，无台阶、陡坡和坑，椅子是正方形的，四条腿一般长，任何时候均有三条腿着地.

模型构成. 可把椅子的四条腿看成是四个点 A,B,C,D ，O 是正方形 $ABCD$ 的中点，当椅子从初始位置 $ABCD$ 沿逆时针方向旋转到 $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ 时，角 $\angle AO\tilde{A} = \theta$. $\theta = 0$ 是初始位置，$\theta = \pi/2$ 又回到了初始位置. 故 θ 的取值范围为 $[0, \pi/2]$.



设$f(\theta)$表示点$\tilde{A}$和$\tilde{D}$距地面的距离之和，$g(\theta)$表示点$\tilde{B}$和$\tilde{C}$距地面的距离之和，则$f(\theta)\geqslant 0$，$g(\theta)\geqslant 0$．这时椅子问题可转化为数学问题：是否存在$\theta_0\in[0,\pi/2]$使得$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$．

模型求解．根据假设，$f(\theta)$和$g(\theta)$都是连续函数且

$$f(\theta)\cdot g(\theta)=0,\ \forall\theta\in[0,\pi/2]. \tag{2.1}$$

若$f(0)=g(0)=0$，则在初始位置$ABCD$椅子已放稳当．若在初始位置椅子不稳当，则$f(0)$和$g(0)$中必有一个大于0，一个等于0．不妨设$f(0)=0$，$g(0)>0$，则

$$f(\pi/2)=g(0)>0,\ g(\pi/2)=f(0)=0.$$

令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则由$f(\theta)$和$g(\theta)$的连续性知$h(\theta)$在$[0,\pi/2]$上连续且

$$h(0)=f(0)-g(0)<0,$$
$$h(\pi/2)=f(\pi/2)-g(\pi/2)>0.$$

根据介值定理，至少存在一点$\theta_0\in[0,\pi/2]$使得$h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$，从而有$f(\theta_0)=g(\theta_0)$．根据(2.1)式可推出$f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=(f(\theta_0))^2=0$，因此$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$．

模型应用．当椅子旋转到θ_0位置时可放稳当．

用类似的方法还可研究蛋糕问题和爬山问题．

2.2 蛋糕问题

问题：能否将一个形状不规则但厚度相同的蛋糕均分成两块？为什么？

模型假设．将蛋糕看成是一个扁饼，用Γ表示蛋糕的边缘，蛋糕上没有洞．

模型构成．在蛋糕内部任取一点P，以点P为原点建立水平坐标轴（x轴），过点P任意作一条有向直线l，它与x轴正向的夹角为θ．