



阿尔·卡西 代数学研究

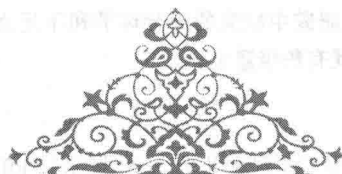
The Research on Algebra of Al-Kāshī

郭园园 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS





阿尔·卡西 代数学研究

The Research on Algebra of Al-Kāshī

郭园园 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书首先梳理了阿拉伯代数学的源流,随后着重分析了卡西的三本现存数学著作(《论弦与正弦》《论圆周》和《算术之钥》)中的主要代数学内容,将涉及相关算法的早期阿拉伯数学著作中的内容全面系统地呈现出来,并尝试性地对部分问题进行了跨文明比较研究,尤其是与中算进行比较,这对于弥补传统相关研究中缺失的部分环节和不足之处,以及重新审视和评价各自的数学成就有积极意义。

图书在版编目(CIP)数据

阿尔·卡西代数学研究 / 郭园园著. —上海: 上

海交通大学出版社, 2017

ISBN 978-7-313-16155-0

I. ①阿… II. ①郭… III. ①代数—研究 IV.
①015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274999 号

阿尔·卡西代数学研究

著 者: 郭园园

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

出 版 人: 郑益慧

印 制: 上海天地海设计印刷有限公司

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

字 数: 267 千字

版 次: 2017 年 1 月第 1 版

书 号: ISBN 978-7-313-16155-0/O

定 价: 78.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021-64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 20

印 次: 2017 年 1 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 021-64366274

序

今日战火纷飞的中东地区，中世纪曾经是繁荣强盛的阿拉伯帝国的舞台，同时也是东西方文化交汇融合的熔炉。在先后兴起的巴格达“智慧宫”、撒马尔罕天文台等学术中心，聚集着来自阿拉伯地区、希腊、印度应该也有中国的学者，他们在大量翻译希腊和东方学术著作的基础上创造了灿烂的伊斯兰科学文化，而在整个伊斯兰科学中，数学占有突出的地位，尤其是代数学——阿拉伯代数学在文艺复兴前夕西传欧洲，成为欧洲近代数学兴起的重要思想来源。在现代西方语言中，连“代数学”这一学科的名称也是直接源于阿拉伯代数学术语 al-jabr（“移项”）。

本书的主角阿尔-卡西（al-Kāshī, 1390—1429）是15世纪初伊斯兰世界最伟大的数学家之一，在世界数学史上亦占有重要地位。阿尔-卡西是著名的撒马尔罕天文台的领头学者之一，并在那里完成了《算术之钥》和其他几部数学著作。《算术之钥》可以说是伊斯兰数学的巅峰之作和谢幕之作，它几乎涵盖了当时全部的初等数学知识，其丰富的数学内容、清晰而详尽的论述使得这本巨著堪称中世纪最好的数学著作之一，并在长达数百年的时间里被多次传抄。另一方面，从文化交流史的角度看，《算术之钥》也是反映古代与中世纪沿丝绸之路数学传播与影响信息最为丰富的一部，融合在其中的东西文化元素引起了学者们的广泛兴趣，其深入探讨对于揭示欧洲近代数学的多元文化来源无疑具有重要意义。

然而长期以来，包括《算术之钥》在内的伊斯兰数学经典，在国内既没有任何完整的中文译本，更谈不上真正基于阿拉伯原始文

献的有深度的研究。国内学者只能利用一些数学通史和原著选集中摘录的片段。这不能不说是我国数学史研究的一大缺憾。可喜的是，近年来在吴文俊数学与天文丝路基金的推动下，这种状况有所改变。吴文俊院士在 2001 年设立的“数学与天文丝路基金”（简称“丝路基金”），旨在鼓励支持有潜力的年轻学者深入开展古代与中世纪中国与其他亚洲国家数学与天文沿丝绸之路交流传播的研究，努力探讨东方数学与天文遗产在近代科学主流发展过程中的客观作用与历史地位，为我国当前的科技自主创新提供历史借鉴。十余年来，吴文俊丝路基金赞助支持了一批相关的研究项目并产生了丰硕的成果，郭园园博士的这部《阿尔·卡西代数学研究》，既是他本人的心血，也是吴文俊丝路基金的结晶。本书在释读阿拉伯一手文献的基础上，首次全面系统地讨论了卡西三部数学著作中的代数学内容（除了以上所说《算术之钥》外，另外两部是《论弦与正弦》和《论圆周》。前者所载卡西求解 $\sin 1^\circ$ 值的方法，长久以来一直是学界关注和研究的热点；后者则被认为是中世纪近似计算的优秀代表作，尤以其中具有 17 位准确数字的圆周率数值彪炳于史）。值得一提的是，本书在部分考察中采用跨文明比较研究方法，弥补了传统数学史研究中缺失的重要内容。

本书可以说是国内第一部根据阿拉伯原始文献进行的伊斯兰数学研究专著，作者郭园园则是在吴文俊丝路基金激励下国内第一位掌握阿拉伯语、能直接解读翻译相关数学文献的青年数学史专家。通过赞助与沿丝绸之路数学、天文交流传播相关的项目逐步培养出能从事这方面研究的年轻骨干和专门人才，正是吴文俊丝路基金更深远的考虑。因此，当这部《阿尔·卡西代数学研究》书稿出现在我眼前时，欣慰之情油然而生。笔者还清楚记得十年前与郭园园第一次见面谈论学习阿拉伯语和丝路基金课题的情景，此后他一如初衷，学习并掌握了阿拉伯语，攻读数学史学位并完成了博士论文，其间还有机会获得国家留学基金赴法国巴黎国家科研中心交换学习，获得博士学位后进入中科院自然科学史研究所坚守伊斯兰数学史研

究阵地，到如今将这部《阿尔·卡西代数学研究》交付出版，整整十年，诚可谓“十年磨一剑”！这是学问之剑，更是意志之剑。数学史是一片广阔的天地，但数学史研究绝非平坦之途。设想一下郭园学习阿拉伯语的过程，如果半途畏难而退，那就绝不可能有他今天亮出的这把好剑。在《阿尔·卡西代数学研究》付梓之际，我赞赏这把剑，同时愿借此机会寄语年轻的数学史同行：淡泊名利，知难而进，潜心历练，功成亮剑！

中科院数学与系统科学研究院 李文林

2016年12月20日于北京中关村

目 录

1 绪论	1
1.1 世界数学史上的阿拉伯数学	1
1.2 阿拉伯数学史研究的现状	4
1.3 阿尔·卡西生平及成就	5
2 阿拉伯代数学的源流	11
2.1 阿拉伯代数学的开端——花拉子米的《代数学》	11
2.2 方程化简的突破——算术化代数	19
2.2.1 代数多项式的定义	22
2.2.2 算术化代数中的乘除法运算	31
2.2.3 算术化代数中的开方运算	40
2.3 方程求解的突破	46
2.3.1 奥马尔·海亚姆关于三次方程的几何求解	46
2.3.2 海亚姆的增乘开方法	55
2.3.3 萨玛瓦尔的增乘开方法	59
2.3.4 萨拉夫·丁·图西三次方程数值解	63
3 《算术之钥》之代数学研究	80
3.1 《算术之钥》的主要内容及研究现状	80
3.2 《算术之钥》第5卷——代数学部分的主要内容	90
3.2.1 还原与对消算法及算术化代数	90
3.2.2 传统一元方程理论	106

3.2.3	双试错法	107
3.2.4	在求解未知数过程中涉及的其他算法	109
3.2.5	典型例题分析	119
3.3	《算术之钥》开方算法研究	137
3.3.1	《算术之钥》中高次开方法	137
3.3.2	阿拉伯高次开方法中无理根近似算法	143
3.3.3	阿拉伯数表开方法与算术三角形	150
3.3.4	中算相关算法	153
3.4	小结	160
4	《论圆周》之代数学研究	162
4.1	问题的源起——《论圆周》的介绍部分	165
4.2	迭代算法	168
4.3	精巧的开平方算法	178
4.3.1	精巧的开平方算法	181
4.3.2	开方法中的估商方法	183
4.3.3	算表结构的调整	184
4.3.4	检验算法之一：“准数”(mijān)法	185
4.3.5	检验算法之二：平方复原法	186
4.4	《论圆周》的剩余部分	191
4.5	小结	198
5	《论弦与正弦》之代数学研究	199
5.1	方程的建立	202
5.2	方程中相关数值精度的选取与系数 $\sin 3^\circ$ 的取值	206
5.2.1	$\sin 1^\circ$ 、 $\sin 3^\circ$ 高精度的选取	207
5.2.2	方程系数 $\sin 3^\circ$ 的取值	208
5.3	方程的求解	212
5.4	小结	220

6 结语	223
附录 《论圆周》中阿对照	227
参考文献	298
索引	304
后记	308

1 绪 论

1.1 世界数学史上的阿拉伯数学

中世纪的阿拉伯数学,指的是公元8—15世纪在伊斯兰教及其文化占主导地位的地区产生、发展和繁荣起来的数学理论和数学实践。从地理疆域上看,中世纪伊斯兰世界的范围从伊比利亚半岛开始,穿过北非和中东,到达亚洲的中部,即今天的阿富汗、伊朗,甚至还包括印度的一部分。尽管这一时期的数学著作由包括波斯语和土耳其语在内的众多语言形式写成,但是绝大多数著作仍采用阿拉伯语书写^①。

公元727年,阿拔斯帝国将首都迁往巴格达,其第二任哈里发曼苏尔(Caliph al-Mansūr,公元754—775年在位)仿效波斯旧制,建立起了完整的行政体制,在其建立后的最初100年的时间里,特别是第五任哈里发哈伦·拉希德(Harun al-Rashid,公元786—809年在位)和第七任哈里发马蒙(al-Māmūn,公元813—833年在位)时期,是阿拉伯帝国的极盛时期,同时阿拉伯的科学文化也进入了繁荣昌盛阶段。

哈里发哈伦·拉希德在巴格达建立了一座图书馆,并从近东地区各类学术机构收集了大量手稿,这些手稿中包括了许多古希腊数

^① Berggren, J. Lennart. Mathematics in Medieval Islam [M] // Victor J. Katz. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2007: 515.

学和科学的文献，随后将其翻译成阿拉伯语。哈伦·拉希德的继承人哈里发马蒙创建了一个名为“智慧宫”的研究所，它一直保存了200多年。其间大批叙利亚、伊朗、美索不达米亚和印度等地的学者被邀请或聚集在这里，其中不乏相当出色的翻译人员，他们把大量的文献译成阿拉伯文。在翻译过程中，对许多文献重新进行了校订、考证、勘误、增补和注释，其中包含欧几里得（Euclid，约公元前325—265年）、阿基米德（Archimedes，公元前287—212年）、阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga，约公元前262—190年）、托勒密（Ptolemaeus，约公元90—168年）和丢番图（Diophantus，约公元210—290年）等希腊著名学者的数学和天文学著作，还有印度数学家和天文学家的著作。这些阿拉伯译本成为后来欧洲人了解古希腊数学的主要来源。因此，阿拉伯人在希腊和印度科学知识的保存工作方面功不可灭。霍华德·伊夫斯（Howard Eves）指出：

对于阿拉伯人在数学发展中……公正的评价应当是：一方面，必须承认他们至少做了小的改进；另一方面，当考虑到那个时代世界其他地方在科学上的贫瘠背景，他们的这些成就又显得比较大了。权衡他们的好处，还有这么个突出的事实：值得赞美的是他们充当世界上的大量精神财富的保存者；在黑暗时代过去之后，这些精神财富得以传给欧洲人^①。

特里克维奇（Trifkovic）指出：

中世纪大部分生活在伊斯兰世界的思想家和科学家，无论他们是名义上的还是实质上的穆斯林，都在将希腊、印度及伊斯兰之前的文明成果传递给西方人方面起到了重要的作用。他们使西方人知道了亚里士多德，但是在这一过程中他们仅仅是

①（美）霍华德·伊夫斯，数学史概论（第六版）[M]，欧阳绛，译，哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009：237—238。

将他们所吸收的非穆斯林文明进行了传播^①。

然而阿拉伯数学家们既非希腊、印度数学的收藏家，也非缺乏独创精神的模仿者。事实上，他们在代数学、几何学和三角学等领域都做出了重要贡献。伴随着欧洲文艺复兴运动的推进，阿拉伯人将保留和发展的东西方数学传入欧洲，为现代数学的形成打下了坚实的基础。在代数学方面，他们首次将代数学作为一门独立的科学，给出了一次、二次方程的一般解法，一般三次方程的几何解法，建立了高次方程的数值解法，系统地讨论了代数多项式理论等；在三角学方面，他们在前人工作的基础上补全了我们今天仍在使用的所有的三角函数，建立了他们之间的关系，给出了若干重要三角公式的证明，使三角学开始脱离天文学而成为独立的学科。随着研究的深入，数学史界对于阿拉伯数学的认识有所转变。约瑟夫（G. G. Joseph）指出：

仅仅认为阿拉伯人是希腊知识的保管者和传播者的观点是片面的和歪曲的^②。

卡兹（V. Katz）指出：

由于众多的阿拉伯手稿还没有被系统研究，所以还无法写一本全面的有关中世纪伊斯兰数学史的著作……但是它的轮廓……我们还是可以勾勒出来的。尤其是伊斯兰数学家们全面发展了十进制位值制体系和十进制小数；系统地研究了代数学并开始考虑代数与几何的关系；重新修订了他们从印度人那里学到的组合数学知识并将其系统化、抽象化；将希腊学者欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯的几何学著作不断拓展，在平

① Trifkovic, Serge, The Golden Age of Islam is a Myth [M] //The Sword of the Prophet: A Politically-Incorrect Guide to Islam; reproduced in www.frontpagemag.com, 2002-11-15.

② Joseph, George Gheverghese. The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics [M]. Harmondsworth: Penguin Books, 1992: 344.

面几何和球面三角学领域取得了重要成就^①。

1.2 阿拉伯数学史研究的现状

16—18 世纪,阿拉伯数学帮助欧洲人完成了数学的近代化;与此同时,阿拉伯数学停滞并且衰退,大多数阿拉伯文抄本在世界各地的图书馆被束之高阁。直至 19 世纪初,欧洲学者才开始实施一个庞大的计划来翻译它们,伴随着这场翻译计划的开展这些古代数学文明才为现代人所知。如果将罗森(F. Rosen)于 1831 年在伦敦出版的花拉子米《代数学》的英译本^②作为近代阿拉伯数学史研究的时间起点,欧美学者在此领域内的研究已经接近 200 年,他们搜集、整理、编译了大量的史料,涉及的主要数学家有:花拉子米(al-Khwarizmi, 约公元 780—850 年)、塔比·伊本·库拉(Thabit Ibn Qurra, 公元 826—901 年)、阿布·卡米尔(Abu Kamil, 公元 850—930 年)、乌格里迪西(Al-Uqlidisi, 公元 920—980 年)、库西(Al-Quhi, 公元 940—1000 年)、凯拉吉(Al-Karaji, 公元 953—约 1029 年)、海什木(Al-Haytham, 公元 965—1040 年)、伊本·拉班(Kushyar ibn Labban, 公元 971—1029 年)、伊本·西拿(Ibn Sinan, 公元 980—1037 年)、奥马尔·海牙姆(Omar Khayyam, 公元 1048—1131 年)、萨拉夫·丁·图西(Sharaf al-Din al-Muzaffar al-Tusi, 公元 1135—1213 年)、纳西尔·丁·图西(Nasir al-Din al-Tusi, 公元 1201—1274 年)、伊本·班拿(Ibn al-Banna, 公元 1256—1321 年)、法雷西(al-Farisi, 公元 1260—1320 年)和阿尔·卡西(al-Kāshī, 公元 1390—1429 年)等。这些数学家们所著的阿拉伯文、波斯文、希伯来文等多种语言形式的抄本部分已被高质量

① Katz, Victor J. A History of Mathematics: an Introduction [M]. Reading MA: Addison-Wesley, 1998: 240.

② Al-Khwarzmi's Algebra, A Reprint of the Rosen's Translation of 1831, Pakistan Hijra Council, Islamlabad, 1989, No. 80 of the "Great Books Project".

地译为德文、俄文、法文、英文等欧美语言，这些是今天数学史工作者了解和研究阿拉伯数学史的重要来源，欧洲学者在此基础上已经取得了大量的研究成果。

早期关于阿拉伯数学著作翻译与研究的进度是缓慢的，得到的信息也是零散的，直至 20 世纪 60 年代，随着研究的全面深入，这种情况才有所好转。在现代欧美多位阿拉伯数学史专家中不得不提到的是尤什克维奇和拉希德。阿道里夫·安德烈·巴夫洛维奇·尤什克维奇（Adolf Pavlovitch Youschkevitch，公元 1906—1993 年）是苏联数学史界的领袖，他在俄罗斯数学史、中世纪数学史、欧拉研究等领域做出了巨大贡献。凭借其卓越的组织、管理才能，尤什克维奇建立了出色的数学史研究团队，使苏联的数学史研究工作走在了世界前列。此外，尤什克维奇对推动数学史研究的国际交流与合作也做出了重要贡献^①。罗山·拉希德（Roshdi Rashed）是目前阿拉伯科技史与科学哲学领域的权威，他曾担任法国国家科研中心科学史与科学哲学研究所（CNRS UMR-7219）主任，同时也是东京大学外聘教授。

国内在此领域内的研究起步较晚，但仍然有多位学者在掌握语言和搜集史料极为困难的环境下做过努力和尝试，如早期的钱宝琮先生、杜石然先生、梁宗巨先生等，后来有辽宁师大杜瑞芝教授，新疆大学阿米尔教授、伊力哈姆教授等。虽然到目前为止这些前辈们的研究均是从二手文献入手，但是他们的科研精神一直影响着笔者，他们的工作对笔者有很好的借鉴作用。客观上国内外的研究差距非常大，对于国内学者而言需要走的路还很长。

1.3 阿尔·卡西生平及成就

吉亚斯丁·贾姆希德·麦斯欧德·阿尔·卡西（Ghiyāth al-Dīn

^① 杨淑辉，张妍．数学史家尤什克维奇的杰出贡献 [J]．辽宁师范大学学报（自然科学版），2010，2（4）：161—164．

Jamshīd Mas'ūd al-Kāshī 或 al-Kāshānī) 约公元 1380 年生于卡尚 (Kāshān, 位于今伊朗), 1429 年 6 月 22 日卒于撒马尔罕 (Samarkand, 位于今乌兹别克斯坦), 数学家、天文学家。现存关于卡西生平的各种信息零散残缺, 有些甚至相互矛盾。按照苏特 (H. Suter) 的观点, 卡西卒于约公元 1436 年; 但是肯尼迪 (E. S. Kennedy) 根据一本《哈加尼历》(*Khaqānī zīj*) 抄本标题页的注释指出, 卡西卒于公元 1429 年 6 月 22 日 (伊历 832 年 9 月 19 日)^①。

阿尔·卡西出生时正逢帖木儿 (Timur, 公元 1336—1405 年) 帝国迅速崛起阶段。1383 年, 帖木儿占领波斯并定都于哈烈 (Heart, 位于今阿富汗)。1405 年, 帖木儿去世, 其帝国被他的两个儿子分裂为两个国家, 其中一个儿子是沙鲁克 (Shāh Rukh)。连年的征战和帖木儿生前所推行的铁血军事政策, 导致帝国的经济严重衰退, 卡西从小便生活于贫困之中。当沙鲁克继位后, 他改变了帖木儿的政策, 大力开展经济建设, 并支持人文、艺术、科技的发展, 社会环境有了明显改观。与此同时, 发生了在卡西生平中第一件有确切日期记载的事件。由《哈加尼历》可知, 他于 1406 年 6 月 2 日在卡尚进行了一次月食观测^②。此后的一段时间, 他一直在卡尚从事天文观测和天文书籍的编写工作。

据现有史料, 卡西在 1407—1416 年间完成了 5 本天文学著作。1407 年 3 月 1 日, 他在卡尚写成了《天堂的阶梯》(*The Sullam al-samā', The Stairway of Heaven*) 一书, 此书主要论述天体的距离与大小, 并将其献给了一位名为卡马尔丁·马哈茂德 (Kamāl al-Dīn Mahmūd) 的高官。他于 1410—1411 年间完成一本名为《天文学纲要》(*Mukhtaṣar dar 'ilm-I hayat, Compendium of the Science of Astronomy*) 的书, 并将其献给苏丹伊斯坎达尔 (Sultan

① B. A. Rosenfeld, A. P. Youshkevitch, 'Ghiyath al-din Jamshid Masud al-Kashi (or al-Kashani) [M] // Gillispie. Dictionary of Scientific Biography. New York: Scribner's, 1970—1978, Vol. 7: 256.

② E. S. Kennedy. The Planetary Equatorium of Jamshid Ghiyath al-Din al-Kāshī [M]. Princeton: Princeton University Press, 1960: 1.

Iskandar)。1413—1414 年，卡西完成了《哈加尼历》，巴托尔德 (Bartold) 认为卡西可能将此书献给了当时的统治者沙鲁克，但肯尼迪 (E. S. Kennedy) 指出卡西应该将此书献给了沙鲁克的儿子，也就是当时撒马尔罕的统治者乌鲁伯格 (Ulugh Bēg, 公元 1394—1449 年)。《哈加尼历》的序言部分表明卡西很早就开始在卡尚从事天文学研究，且生活清贫，如果没有乌鲁伯格的资助，他不可能完成此书，因此他有可能将这本书献给了乌鲁伯格。1416 年 1 月，卡西完成了《观象仪器的说明》(*Risāla dar sharḥ-i ālāt-i raṣd, Treatise on Observational Instruments*) 一书，书中介绍了包括浑仪 (armillary sphere) 在内的 8 种天文仪器的构造，其中有些是卡西的独创，他将此书献给了土库曼王朝苏丹伊斯坎达尔 (Sultan Iskandar, 与前面提到过的苏丹同名)。同年 2 月 10 日，卡西在卡尚完成了一本名为《花园游览》(*Nuzha al-ḥadāiq, The Garden Excursion*) 的书，他在其中描述了一种他发明的名为“天象盘” (Plate of heavens) 的天文仪器，其形状像“星盘” (astrolabe)，可以确定行星的黄经、黄纬、留 (station)、逆行 (retrogradation) 以及到地球的距离等。1426 年 6 月，他在撒马尔罕对这本书进行了补充。

与其他的中世纪科学家类似，卡西也将其科学著作献给君主或权贵以获得经济上的资助和社会地位。卡西还有另一份职业——医生，但是他仍将大部分的时间和精力用于数学与天文学的研究。经过一段时间徘徊之后，他最终在撒马尔罕找到了自己的归宿。卡西的后半生是在撒马尔罕度过的，但他是何时到此地的尚无法考证。

撒马尔罕是中亚的一座古城，它后来成为帖木儿帝国的首都，沙鲁克及其子乌鲁伯格成为该城的统治者。乌鲁伯格是一位伟大的科学家，精通天文，而且是科学、艺术的倡导者与保护人，试图将撒马尔罕建设成为一个巨大的文化中心。事实上，直至 1449 年乌鲁伯格被杀之前，在长达四分之一个世纪的时间里它一直是东方最重要的科学中心。乌鲁伯格于 1417 年至 1420 年在撒马尔罕创办了一

所教授科学和神学的学校——马德拉萨（Madrasa）。19世纪史学家阿布·塔希尔·霍集占（Abū Tāhir Khwāja）指出，马德拉萨建成后4年，乌鲁伯格开始修建一座天文台，其遗址于1908年至1948年被发掘。为了马德拉萨和天文台工作的开展，乌鲁伯格邀请了包括阿尔·卡西、卡迪·扎达·鲁米（Qadi Zada al-Rumi，公元1364—1436年）在内的众多当时最优秀的科学家在此工作。霍集占记录了1424年乌鲁伯格与卡西、鲁米及另一位来自卡尚的科学家穆恩丁（Mu'in al-Dīn）讨论天文台的修建事宜。在撒马尔罕，卡西继续他在数学和天文学领域的研究，并且参与天文台的组建与《乌鲁伯格历》（*Ulugh Beg's Zij*）的准备工作，但是此书直至卡西去世后才得以完成。卡西应该在乌鲁伯格的科学家团队中占有最显赫的地位，15世纪史学家密尔宽德（Mirkhwānd，公元1433—1498年）在涉及撒马尔罕天文台修建过程的评述中指出，除了乌鲁伯格之外，只有卡西可以称得上是“第二个托勒密”；18世纪史学家赛义德·拉基姆（Sayyid Raqīm）细数了天文台的主要建造者，并将他们均称为 maulanā（“毛拉纳”，一种阿拉伯语中科学家的称法），但是他还指出卡西是 maulanā-i ālam（即“世界的毛拉纳”）。

目前为止，已经发现了在此期间卡西给居住于卡尚的父亲写的两封信^①。第一封信大约写于1423年，可能是卡西认为这封信丢了，所以写了另一封信。在第二封信中包含了与第一封信相似的内容，除此之外还有一些其他信息^②。在两封信中卡西均高度评价了乌鲁伯格的博学及其数学才能，尤其是他具有较强的心算能力。卡西还

① E. S. Kennedy. A Letter of Jashid al-Kāshī to His Father. *Scientific Research and Personalities at a Fifteenth Century Court*. *Orientalia* 29, 1960: 191—213. Reprinted in E. S. Kennedy et al., . *Studies in the Islamic Exact Sciences*, David A. King & Mary Helen Kennedy, Eds. Beirut: American University, 1983: 722—744.

M. Bagheri. A Newly Found Letter of al-Kāshī on Scientific Life in Samarkand. *Historia Math*, 1997, 24 (3): 241—256.

② Petra G. Schmidl, Kāshī; Ghiyāth (al-Milla wa-) al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Maḥmūd al-Kāshī [al-Kāshānī] [M] // Thomas Hockey et al. (eds.). *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*. New York: Springer, 2007: 613—615.