普通高等教育“十二五”规划教材

Yingyong Shuxue

应用数学

——土建类

主编　王建军

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

029
04

普通高等教育“十二五”规划教材

应用数学

——土建类

主　编　王建军
副主编　杨广峰　任莉丽　于风宏

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 提 要

本书是依据《高职高专教育培训目标的基本要求》，结合高职学生的数学学情编写而成。本书在内容上突破了传统高职数学教材的结构和体系，基于“必需、够用”的原则，将初等数学知识、微积分、线性代数等内容进行整合，通过大量案例，强化知识、技能应用，为工科专业学生学习后续专业课提供最基本的数学基础知识。

本书主要内容包括：初等数学知识；极限；导数、微分及其应用；积分及其应用；定积分在土建工程中的应用；行列式；矩阵；土建中常用的计算方法等。

本书可作为高校工科专业尤其是土建类专业学生学习数学课程的教材或参考书，也可供成人教育相关专业和自学考试的读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学：土建类/王建军主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5635-4507-0

Ⅰ.①应… Ⅱ.①王… Ⅲ.①应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 199141 号

书　　名	应用数学——土建类
主　　编	王建军
责任编辑	马　飞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www3.buptpress.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	16
字　　数	399 千字
版　　次	2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4507-0　　　　**定价：32.00 元**

前　言

本书是高等职业教育工科土建类“高等数学”的课程教材，本书按照教育部《高等数学课程教学基本要求》编写，反映了当前高等职业教育培养高素质技术型人才数学课程设置的发展趋势及教学理念. 全书按照不同篇章分类编写，主要有基础知识补充篇，高等数学知识篇，线性代数知识篇和土建工程中常用计算方法篇.

本书作者均为教学经验十分丰富的一线教师，对高职高专数学教育有较深的体会和认识，在编写的过程中，作者充分考虑到高职学生的数学学情，内容上突破了传统高职数学教材的结构和体系，在适当弱化高等数学的学科性和理论严密性方面作出了积极努力和慎重选择，高度重视概念和基本运算技能的训练，精选例题、习题，充实习题量. 本书在培养方案上，注重对学生基础知识的传授和基本能力的培养，首先对学生在后续专业课中用到的初等数学知识进行复习巩固，同时也对学生学习高等数学知识打下基础，然后在保证“必需，够用”原则的前提下，兼顾高职院校数学学时不太充足的现实基础上，对高等数学、线性代数知识进行整合和提炼，突出专业应用，注重数学思想的渗透，淡化计算技巧和定理的证明，加强数学课与专业课程的有机融合，突出数学工具学科的作用.

本书采用模块化设计，分为基础模块和知识延伸模块，基础模块内容为所有学生的必修部分，知识延伸模块以及带“*”的部分，在教学中可根据课时和不同专业选学. 同时，在每节的后面均突出标明本节的重点及学习要领，有利于学生学习掌握.

本书由王建军担任主编，参编人员有于风宏、杨广峰、任莉丽，李明慧、王立娜. 各章的具体编写分工如下：基础知识补充篇与土建工程中常用的计算方法篇由李明慧编写；高等数学知识补充篇中的第一章与线性代数知识篇中的第五章由任莉丽编写；高等数学知识篇中的第二章由杨广峰编写；第三章由王建军编写；第四章由于风宏编写；线性代数知识篇中的第六章由王立娜编写. 全书由王建军统稿.

教材在编写过程中，得到了内蒙古交通职业技术学院领导的大力支持，并提出很多宝贵意见，在此一并感谢.

编写教材的参考资料已在参考文献中注明，在此对这些专家学者表示深深的谢意. 可能有些资料引用由于疏忽没有指出资料出处，若有此类情况，在此表示歉意.

由于编者水平有限，教材中疏漏、错误之处在所难免，恳请专家和读者批评指正.

编　者

2015 年 5 月

目　　录

线性代数知识篇

土建工程中常用的计算方法篇

基础知识补充篇

第一节　任意三角函数

一、基本概念

1. 角的概念的推广

我们知道，角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

为了将角的概念进行推广，我们做出如下规定：

按逆时针方向旋转所形成的角叫作正角；按顺时针方向旋转所形成的角叫作负角；如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个零角.

角的概念经过这样的推广，包括正角、负角和零角. 今后我们需要在直角坐标系内讨论角，为此我们引进象限角和轴线角(界限角)的概念.

在直角坐标系中，角的顶点与原点重合，始边与 x 轴正半轴重合，那么，角的终边(除端点外)在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 终边落在坐标轴上，就说是轴线角或者称为界限角.

例如，$30°$，$390°$，$-330°$是第一象限的角，而且这三个角的终边是相同的；$0°$，$90°$，$180°$，$270°$是界限角.

角的范围随着概念的推广也有所变化，从原来的 $0°\sim360°$扩展到$-\infty\sim+\infty$. 一般地，我们有：所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in Z\},$$

即任意与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

例如，与 $60°$终边相同的角的集合为$\{\beta|\beta=60°+k\cdot360°,k\in Z\}$.

2. 弧度制

度量角的单位制有两种：一种是角度制，在角度制中规定周角的$\frac{1}{360}$所对的圆心角叫作 1 度的角，记作 $1°$；另一种是弧度制，在弧度制中规定把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫作 1 弧度的角，记作 1 弧度或 1 rad.

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0，角 α 的弧度数的绝对值

$$|\alpha|=\frac{l}{r}(\mathrm{rad}),$$

其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧长，r 是圆的半径.

因为周角的弧度数是 2π，在角度制下是 $360°$，所以

$$360°=2\pi(\mathrm{rad}),\quad 180°=\pi(\mathrm{rad}),$$

$$1°=\frac{\pi}{180}(\mathrm{rad})\approx0.01745(\mathrm{rad}),\quad 1(\mathrm{rad})=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx57.30°.$$

例 1 把下列各角度换算为弧度.

(1)$15°$ (2)$-100°$

解 (1)$15°=15\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$.

(2)$-100°=-100\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5\pi}{9}$.

例 2 把下列各弧度换算为角度.

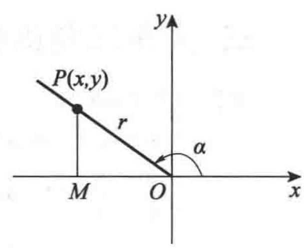
(1)$\frac{3\pi}{5}$ (2)-3.5

解 (1)$\frac{3\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}\times\frac{180°}{\pi}=108°$.

(2)$-3.5=-3.5\times\frac{180°}{\pi}=-\frac{630°}{\pi}$.

二、任意角的三角函数

在锐角的三角函数中，自变量都是锐角，函数值是比值. 下面我们利用平面直角坐标系，研究任意角的三角函数. 如图所示，设角 α 是一个任意角，在角 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$，则 $|OP|=r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$，那么，



比值$\frac{y}{r}$叫作角 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

比值$\frac{x}{r}$叫作角 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

比值$\frac{y}{x}$叫作角 α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$；

比值$\frac{x}{y}$叫作角 α 的余切，记作 $\cot\alpha$，即 $\cot\alpha=\frac{x}{y}$；

比值$\frac{r}{x}$叫作角 α 的正割，记作 $\sec\alpha$，即 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$；

比值$\frac{r}{y}$叫作角 α 的余割，记作 $\csc\alpha$，即 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

例 3 已知角 α 终边经过一点 $P(2,-3)$，求角 α 的六个三角函数值.

解 由 $x=2,y=-3$ 得到 $r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$，于是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{3\sqrt{13}}{13};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{13}}{13};$$

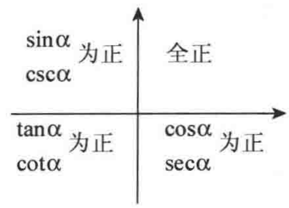
$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2};\quad \cot\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

由三角函数的定义，以及各象限内点的坐标的符号，我们可以得知：

正弦值对于第一、二象限角是正的，对于第三、四象限角是负的；余弦值对于第一、四象限角是正的，对于第二、三象限角是负的；正切值对于第一、三象限角是正的，对于第二、四象限角是负的.

用图表表示为：



由三角函数的定义，我们还可以得知：终边相同的角同名三角函数值相等. 即 $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$，$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$，$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$，其中 $k\in z$.

例 3 确定下列三角函数值的符号.

(1) $\cos 250°$　　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$　　(3) $\tan\frac{11\pi}{3}$

解 (1)因为 250°是第三象限角，所以 $\cos 250°<0$.

(2)因为 $-\frac{\pi}{3}$ 是第四象限角，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$.

(3)因为 $\frac{11\pi}{3}$ 是第四象限角，所以 $\tan\frac{11\pi}{3}<0$.

三、同角三角函数的基本关系

根据三角函数的定义，我们可以得到同角三角函数之间的一些基本关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad \sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1;\quad \csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1;$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha;\quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1;\quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1;\quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1.$$

例 4 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$. 又因为 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，于是，$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，$\cot\alpha=-\frac{3}{4}$.

四、诱导公式

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$；　$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$；　$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$；

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$；　$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$；　$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$；

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$；　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$；　$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$；

$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$；　$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$；　$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$；

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$；　$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$；　$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$.

例 5 求下列三角函数值.

(1) $\cos 225°$　　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$　　(3) $\sin\frac{11\pi}{6}$

解 (1) $\cos 225°=\cos(180°+45°)=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$.

例 6 化简 $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\alpha-\pi)}$.

解 原式 $=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\sin\alpha[-\sin(\alpha+\pi)]}=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\sin\alpha\sin\alpha}=-\frac{1}{\sin\alpha}$.

五、两角和与差、二倍角的三角函数公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

例 7 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，α 是第二象限角，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，β 是第三象限角，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$.

解 由 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，α 是第二象限角，得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

由 $\cos\beta=-\frac{3}{4}$，β 是第三象限角，得 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{-6+\sqrt{35}}{12}.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}.$$

所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{-32\sqrt{5}+27\sqrt{7}}{17}.$$

例 8 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，求 $\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，$\tan2\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}.$$

所以

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{120}{169}.$$

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{119}{169}.$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{-\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}}=-\frac{120}{119}.$$

课 后 习 题

1. 将下列各角从角度制转化为弧度制.

(1)$12°$　　(2)$75°$　　(3)$135°$　　(4)$120°$

2. 将下列各角从弧度制转化为角度制.

(1)$\frac{\pi}{15}$　　(2)$\frac{\pi}{6}$　　(3)$-\frac{\pi}{4}$　　(4)$-\frac{5\pi}{2}$

3. 已知弧长为 500 mm,圆心角为 $200°$,求这条弧所在的圆的半径.

4. 已知 $\tan\alpha=2$,求

(1)$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}$　　(2)$\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}$

(3)$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$

5. 已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,$\alpha-\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,$\alpha+\beta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$,求 $\cos 2\alpha$,$\cos 2\beta$.

6. 已知 $\sin(3\pi-\theta)=-2\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$,求 $\tan 2\theta$ 的值.

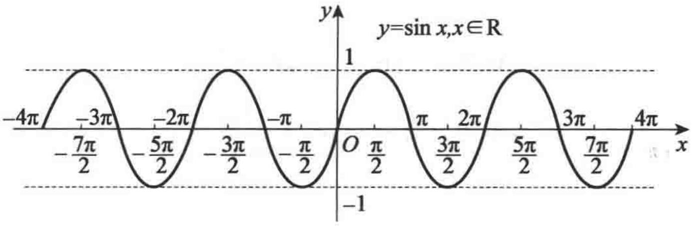
7. 已知$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha}=1$,$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{3}$,求 $\tan(\beta-2\alpha)$的值.

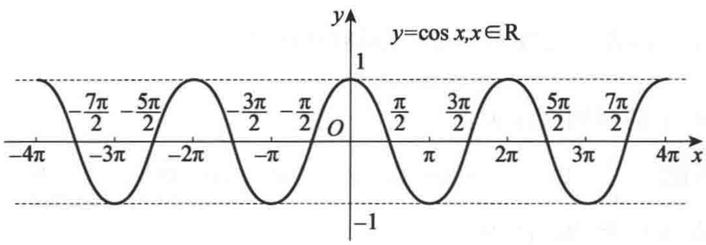
8. 已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,求 $\tan(\alpha+\pi)+\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{5\pi}{2}-\alpha)}$的值.

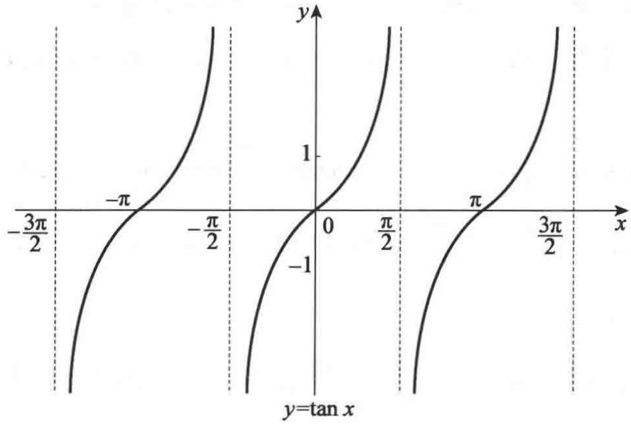
第二节　正弦函数、余弦函数与正切函数

一、图像

正弦函数、余弦函数和正切函数的图像分别如下:







观察以上图像,可以得到正弦函数、余弦函数和正切函数的性质.

二、性质

(1)定义域

正弦函数、余弦函数的定义域都是实数集 R,分别记作

$$y=\sin x,\quad x\in \mathrm{R};\quad y=\cos x,\quad x\in \mathrm{R}.$$

正切函数的定义域是$\left\{x \mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$,记作 $y=\tan x,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in \mathbf{Z}$.

(2)值域

正弦函数的值域是$[-1,1]$,即

$$-1\leqslant\sin x\leqslant1 \text{ 或 } |\sin x|\leqslant1.$$

其中,当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 时,正弦函数取得最大值 1,即 $\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=1$;当且仅当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 时,正弦函数取得最小值-1,即 $\sin(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=-1$.

余弦函数的值域是$[-1,1]$,即

$$-1\leqslant\cos x\leqslant1 \text{ 或 } |\cos x|\leqslant1.$$

当且仅当 $x=2k\pi,k\in Z$ 时,余弦函数取得最大值 1,即 $\cos(2k\pi)=1$;当且仅当 $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ 时,余弦函数取得最小值-1,即 $\cos(2k+1)\pi=-1$.

正切函数的值域是实数集 R.

(3)周期性

正弦函数、余弦函数都是周期函数,$2k\pi(k\in Z,k\neq0)$是它们的周期,最小正周期是 2π.

正切函数的周期是 $k\pi(k\in Z,k\neq0)$,最小正周期是 π.

(4)奇偶性

正弦函数和正切函数都是奇函数,余弦函数是偶函数.

(5)单调性

正弦函数在 R 上的单调区间为:

单调递增区间是$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in Z)$;单调递减区间是$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in Z)$.

余弦函数在 R 上的单调区间为:

单调递增区间是$[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in Z)$;单调递减区间是$[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in Z)$.

正切函数在每一个开区间$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in Z)$内都是增函数.

例 1 比较大小.

(1)$\sin(-\frac{\pi}{18})$和 $\sin(-\frac{\pi}{10})$　　(2)$\cos(-\frac{23}{5}\pi)$和 $\cos(-\frac{17}{4}\pi)$

解 (1)因为$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$,且函数 $y=\sin x,x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$是增函数,所以 $\sin(-\frac{\pi}{18})>\sin(-\frac{\pi}{10})$.

(2)$\cos(-\frac{23}{5}\pi)=\cos\frac{3}{5}\pi,\cos(-\frac{17}{4}\pi)=\cos\frac{\pi}{4}$,因为 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{3}{5}\pi<\pi$,且函数 $y=\cos x,x\in[0,\pi]$是减函数,所以

$$\cos(-\frac{23}{5}\pi)=\cos\frac{3}{5}\pi<\cos(-\frac{17}{4}\pi)=\cos\frac{\pi}{4}.$$

例 2 求函数 $y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$的定义域.

解 设 $z=x+\frac{\pi}{4}$,则 $y=\tan z$ 的定义域是$\left\{z\,|\,z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$,由 $x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 得 $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$,所以 $y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$的定义域是$\left\{x\,|\,x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z\right\}$.

三、正弦型曲线

在物理中,特别是电学中,经常遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数,这类函数叫作正弦型函数,它与正弦函数 $y=\sin x$ 有着密切的关系.

其中 A 称为振幅,$\frac{2\pi}{\omega}$称为周期,$\omega x+\varphi$ 称为相位,当 $x=0$ 时的相位 φ,称为初相位.

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $A>0,\omega>0$)的图像,可以看作下面方法得到:

先把正弦函数图像上的所有点向左(当 $\varphi>0$ 时)或向右(当 $\varphi<0$ 时)平移$|\varphi|$个单位长度,再把图像上所有点的横坐标缩短或伸长到原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变),再把所得各点的纵坐标伸长或缩短到原来的 A 倍.

函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi),x\in \mathrm{R}$(其中,$A,\omega,\varphi$ 为常数,且 $A\neq0,\omega>0$)与正弦型函数的周期相同,都是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi),\omega x+\varphi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$.

例 3 求下列函数的周期.

(1)$y=2\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}),x\in R$　　(2)$y=2\cos(2x-\frac{\pi}{3}),x\in R$

(3)$y=\tan 2x,x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi(k\in Z)$

解 (1)由函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi),x\in R$(其中,$A,\omega,\varphi$ 为常数,且 $A\neq 0,\omega>0$)的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$得到 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

(2)由函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi),x\in R$(其中,$A\omega,\varphi$ 为常数,$A\neq 0,\omega>0$)的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$得到 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(3)函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi),\omega x+\varphi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$,所以 $y=\tan 2x$,$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi(k\in Z)$的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$.

课后习题

1. 比较下列各组中两个三角函数值的大小.

(1)$\sin\frac{15\pi}{8}$ 和 $\sin\frac{14\pi}{9}$　　(2)$\cos 515°$和 $\cos 530°$

(3)$\cos(-\frac{47}{10}\pi)$和 $\cos(-\frac{44}{9}\pi)$　　(4)$\tan\frac{7}{8}\pi$ 和 $\tan\frac{1}{6}\pi$

2. 求函数 $y=-\tan(x+\frac{\pi}{6})+2$ 的定义域.

3. 求下列函数的周期.

(1)$y=\sin\frac{3}{4}x,x\in R$　　(2)$y=\cos 4x,x\in R$　　(3)$y=\tan(3x-\frac{\pi}{6})$

4. 求下列函数的单调区间.

(1)$y=\sin(x-\frac{3}{4}\pi)$　　(2)$y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　(3)$y=3\cos(\frac{\pi}{3}-x)$

5. 已知函数 $y=3\sin(x+\frac{1}{5}\pi),x\in R$ 的图像 C.

(1)为了得到函数 $y=3\sin(x-\frac{1}{5}\pi),x\in R$ 的图像,只需把 C 上所有的点________.

(2)为了得到函数 $y=3\sin(2x+\frac{1}{5}\pi),x\in R$ 的图像,只需把 C 上所有的点________.

(3)为了得到函数 $y=4\sin(x+\frac{1}{5}\pi),x\in R$ 的图像,只需把 C 上所有的点________.

6. 已知向量$\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$,$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1)$,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$,角 A 为锐角.

(1)求角 A 的大小.

(2)求函数 $f(x)=\cos 2A+4\cos A\sin A$ 的值域.

7. 求函数 $y=\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x$ 的最小正周期.

8. 求函数 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$，$x\in(-\pi,\pi)$的单调区间.

9. 已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha,\beta\in(0,\pi)$.

(1)求 $\tan(\alpha+\beta)$的值.

(2)求函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x-\alpha)+\cos(x+\beta)$的最大值.

第三节　正弦定理与余弦定理

一、正弦定理

我们知道，在直角三角形 ABC 中，如图 1 所示，$\frac{a}{c}=\sin A$，$\frac{b}{c}=\sin B$，即

$$\frac{a}{\sin A}=c,\quad \frac{b}{\sin B}=c.$$

由于$\angle C=90°$，所以 $\sin C=1$，于是

$$\frac{c}{\sin C}=c.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

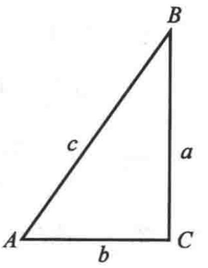


图 1

在任意三角形中，是否也存在类似的数量关系呢？

在锐角三角形 ABC 中，如图 2 所示，作 $CD\perp AB$ 于 D，则 $CD=b\sin A$，$CD=a\sin B$，

于是 $b\sin A=a\sin B$，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

同理有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

故

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

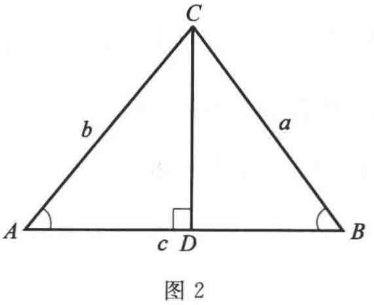


图 2

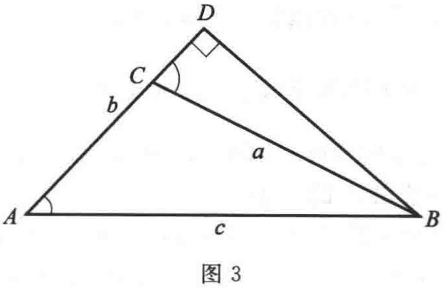


图 3

在钝角三角形 ABC 中，不妨设 $\angle C$ 为钝角，如图 3 所示，作 $BD\perp AC$ 的延长线于 D，则 $BD=c\sin A$，$BD=a\sin(180-C)=a\sin C$. 同样可以得到

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

于是得到正弦定理：

在三角形中，各边与它所对的角的正弦之比相等. 即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

利用正弦定理可以解决下列解三角形的问题：

(1)已知三角形的两个角和任意一边，求其他两边和一角.

(2)已知三角形的两边和其中一边所对角，求其他两角和一边.

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=30^\circ$，$\angle C=135^\circ$，$c=6$，求 b.

分析　这是已知三角形的两个角和一边，求其他边的问题，可以直接应用正弦定理.

解　由于

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

所以

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{6\times \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ}=\frac{6\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{2}.$$

例 2　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=30^\circ$，$a=15\sqrt{2}$，$b=30$，求 $\angle B$.

分析　这是已知三角形的两边和一边的对角，求其他角边的问题，可以首先直接应用正弦定理求出角的正弦值，然后再求出角.

解　由于

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

所以

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{30\times \sin 30^\circ}{15\sqrt{2}}=\frac{30\times\frac{1}{2}}{15\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 $b>a$，知 $\angle B>\angle A$，故 $30^\circ<\angle B<180^\circ$，所以 $\angle B=45^\circ$ 或 $\angle B=135^\circ$.

注意：已知三角形的两边和其中一边的对角，利用正弦定理求另一边的对角时，要讨论这个角的取值范围，避免发生错误.

例 3　一艘船以每小时 36 海里的速度向正北方向航行，如图 4，在 A 处观察灯塔 C 在船的北偏东 30°，0.5 小时后船行驶到 B 处，再观察灯塔 C 在船的北偏东 45°，求 B 处和灯塔 C 的距离(精确到 0.1 海里).

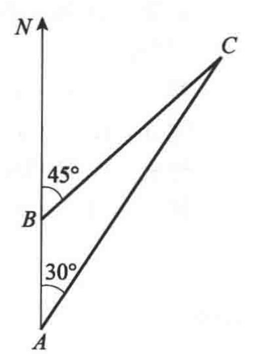


图 4

解　因为 $\angle NBC=45^\circ$，$\angle A=30^\circ$，所以 $\angle C=15^\circ$，则

$$AB=36\times 0.5=18(\text{海里}),$$

由正弦定理得

$$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{18\times\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ}\approx 34.8(\text{海里}).$$

故　B 处和灯塔 C 的距离约为 34.8 海里.

二、余弦定理

问题：如果知道三角形的两条边及它们的夹角，如何求第三条边？