

国家自然科学基金 (No.11401544) 资助

Daiyou Zhuangtai Yueshu de
Liuti Fangcheng de Zuiyou Kongzhi Lilun

带有状态约束的流体方程的 最优控制理论

黄刚 刘汉兵 黄昌盛 著



中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

带有状态约束的流体方程的 最优控制理论

黄刚 刘汉兵 黄昌盛 著



中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

带有状态约束的流体方程的最优控制理论/黄刚,刘汉兵,黄昌盛著. —武汉:
中国地质大学出版社,2015.12

ISBN 978-7-5625-3777-9

I. ①带…

II. ①黄… ②刘… ③黄…

III. ①最佳控制-数学理论

IV. ①O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 291624 号



带有状态约束的流体方程的最优控制理论 黄刚 刘汉兵 黄昌盛 著

责任编辑:王凤林

责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号) 邮政编码:430074

电 话:(027)67883511 传 真:67883580 E-mail:cbb@cug.edu.cn

经 销:全国新华书店

<http://www.cugp.cug.edu.cn>

开本:787毫米×960毫米

字数:170千字 印张:7.25

版次:2015年12月第1版

印次:2015年12月第1次印刷

印刷:武汉三新大洋数字出版技术有限公司

ISBN 978-7-5625-3777-9

定价:18.00元

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

前 言

流体方程作为一类非常重要的偏微分方程,其最优控制问题自 20 世纪 90 年代以来吸引了众多学者的关注和研究。特别是随着以 20 世纪 60 年代庞特里亚金最大值原理、贝尔曼动态规划方法和卡尔曼二次线性最优控制理论三大理论为标志的现代最优控制理论的建立,以及自此以后无穷维系统的最优控制理论的蓬勃发展,流体方程最优控制问题的研究取得了诸多的突破和进展。

近年来,我们关注了流体方程带有状态约束的最优控制问题的研究。21 世纪初以来,国际知名最优控制理论专家 Barbu V 院士和汪更生教授针对 Navier - Stokes 方程讨论了其带有周期约束、两点边值约束及积分型约束的最优控制问题,并得到了最优解满足的庞特里亚金最大值原理。近年来作者也针对 Navier - Stokes 方程的相关最优控制问题进行了研究并取得了一些结论。针对这些结论,作者以为有必要将相关的方法和结果加以总结梳理,以较为系统完整的形式呈现给相关领域的研究人员和感兴趣的读者。

鉴于目前带有状态约束的 Navier - Stokes 方程的最优控制问题的研究前沿和主要难点集中在点状状态约束、低正则性的 Dirichlet 边界控制、数值计算方法几个方面,本书主要从以下几个方面进行了总结:在简单介绍 Navier - Stokes 方程和一些预备知识后,首先针对 Navier - Stokes 方程带有时间逐点状态约束的最优控制问题,在第 2 章和第 3 章分别介绍了 Moreau 正则化逼近的方法和 Eklund 变分法,并给出了相应的庞特里亚金最大值原理;之后在第 4 章,针对带有周期约束的 Stokes - Oseen 方程的低正则性的 Dirichlet 边界最优控制问题,我们给出了一种利用 Euler - Lagrange 系统改善正则性的方法来处理低正则性问题,并采用 Barbu V 和汪更生教授处理周期约束的方法得到了该问题的庞特里亚金最大值原理以及反馈最优控制;在本书的最后一章,我们简单介绍了静态 Navier - Stokes 方程的带有状态约束的最优控制问题的数值计算问题。

全书共 5 章,第 1、3、5 章由黄刚修订,第 2 章由黄昌盛修订,第 4 章由刘汉兵修订。全书由黄刚策划,刘汉兵统稿。

本书的出版由国家自然科学基金(No. 11401544)资助。

编者

2015 年于南望山

目 录

§ 1	Navier – Stokes 方程及最优控制问题简介	(1)
1.1	Navier – Stokes 方程	(1)
1.2	泛函分析基础	(5)
§ 2	点状状态约束的最优控制问题——Moreau 正则化逼近	(12)
2.1	最优控制问题的描述	(12)
2.2	弱解意义下最优控制问题的解的存在性	(15)
2.3	庞特里亚金最大值原理	(17)
2.4	应用举例	(37)
2.5	文献综述	(39)
§ 3	点状状态约束的最优控制问题——Ekland 变分法	(41)
3.1	问题描述和基本假设	(41)
3.2	主要结论及其应用	(42)
3.3	主要结果的证明	(48)
3.4	文献综述	(58)
§ 4	Stokes – Oseen 方程的带有周期约束的 Dirichlet 边界控制问题	(60)
4.1	问题描述和理论准备	(60)
4.2	最优控制的存在性和一阶必要条件	(64)
4.3	最优解的正则性估计	(71)
4.4	反馈最优控制及其在 Navier – Stokes 方程中的应用	(78)
4.5	文献综述	(90)
§ 5	带有状态约束的最优控制问题的半牛顿算法	(92)
5.1	问题描述及其一阶必要条件	(92)
5.2	正则化的最优控制问题	(96)
5.3	半牛顿方法	(99)
5.4	文献综述	(104)
	参考文献	(105)

§ 1 Navier - Stokes 方程及最优控制问题简介

Navier - Stokes 方程是非常重要的非线性偏微分方程, 三维空间的 Navier - Stokes 方程的解的存在唯一性问题是数学界最重要的难题之一。本章我们将简单介绍 Navier - Stokes 方程解的存在性和正则性的相关结论, 以及其最优控制理论的发展背景。最后我们给出一些泛函分析的相关定理, 以备后续所用。

1.1 Navier - Stokes 方程

经典的 Navier - Stokes 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \nu \Delta y(x,t) + [y(x,t) \cdot \nabla] y(x,t) + \nabla p = f_0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0, & x \in \Omega \\ \nabla \cdot y(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \quad (1-1)$$

描述了一个有界区域 ($\Omega \in R^N, N=2,3$) 的黏性不可压缩的牛顿流体的非滑移运动。方程式 (1-1) 中 $T>0$ 表示终点时刻, 为一给定的正数。 $\nu>0$ 表示黏性常数。向量值函数 $y(x,t) = [y_1(x,t), \dots, y_N(x,t)]$ 表示速度场。 $f_0 \in L^2\{0,T; [L^2(\Omega)]^N\}$ 是一个场源, 数量值函数 p 表示流体压力。在以后关于函数的表述中, 如果不会产生记号上的混淆, 我们有时将会省去自变量 (x,t) 的记号。

由 Leray J 给出的一个经典方法, Navier - Stokes 方程式 (1-1) 可以写成一个抽象的无穷维的微分方程。为此, 我们首先介绍下列函数空间。

$$H = \{y; y \in [L^2(\Omega)]^N, \nabla \cdot y = 0, y|_{\partial\Omega} \cdot n = 0\} \quad (1-2)$$

$$V = \{y; y \in [H_0^1(\Omega)]^N, \nabla \cdot y = 0\} \quad (1-3)$$

这里 $L^2(\Omega)$ 是通常的平方可积的可测函数空间, 索伯列夫空间 $H^m(\Omega)$ 是空间 $L^2(\Omega)$ 中 m 阶以及所有低于 m 阶的导数 (分布意义下) 都属于空间 $L^2(\Omega)$ 的函数的全体。记 $D(\Omega)$ 为全体具有无穷阶光滑导数且紧支集包含在 Ω 中的函数的全体。则 $H_0^m(\Omega)$ 表示空间 $D(\Omega)$ 在索伯列夫空间 $H^m(\Omega)$ 中的闭包。 $W^{m,p}(0, T; X)$ 则表示定义在时空集合 $(0, T) \times \Omega$ 上, 且对于时间的阶数小于或等于 m 的各阶导数都属于空间 $L^p(0, T; X)$ 的函数的全体。我们用 $(X)^N$ 表示向量值函数空间, 向量值函数的每一个分量函数都属于空间 X 。特别地对于空间 $H_0^1(\Omega)$, 我们知道下列的 Poincare 不等式是成立的

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in L^2(\Omega) \quad (1-4)$$

记号 $\|\cdot\|_X$ 表示度量空间 X 中的范数。通常地, $L^2(\Omega)$ 空间中的范数为

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

我们在空间 H 上赋予空间 $[L^2(\Omega)]^N$ 的范数, 并简记为 $|\cdot|$ 。如果根据上下行文不会产生记号上的混淆, 我们有时也用 $|\cdot|$ 表示欧氏空间 R^N 中的范数。同时我们用记号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示空间 H 上的内积, 其定义与 $[L^2(\Omega)]^N$ 中的内积一样。类似地, 在空间 V 上赋予空间 $[H_0^1(\Omega)]^N$ 的范数, 并记为 $\|\cdot\|$ 。由 Poincare 不等式 (1-4) 可知, 其范数可以等价定义为

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |\nabla y_i|^2 dx$$

记 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(V, V')}$ 为空间 V 及其对偶空间 V' 之间的对偶积。

易知空间 H 是 $[L^2(\Omega)]^N$ 的闭子空间, 我们记 $P: [L^2(\Omega)]^N \rightarrow H$ 为 $[L^2(\Omega)]^N$ 在 H 上的正交投影, 通常称之为 Leray 投影。定义 $V \times V$ 上的双线性连续泛函

$$a(y, z) = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z, \forall y, z \in V$$

则 Stokes 算子

$$A = -P\Delta, D(A) = V \cap [H^2(\Omega)]^N$$

可以等价地定义为

$$\langle Ay, z \rangle = a(y, z), \forall y, z \in V$$

从以上的定义容易知道 Stokes 算子是空间 H 上的自伴随算子, 且

$$\langle Ay, y \rangle = \|y\|^2, \forall y \in V$$

最后, 我们定义 $V \times V \times V$ 三元线性函数 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 如下:

$$b(y, z, w) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} y_i D_i z_j w_j dx$$

则非线性算子 $B: V \rightarrow V'$, $By = P(y \cdot \nabla)y$, $\forall y \in V$, 可等价地定义为

$$\langle B(y), w \rangle_{(V', V)} = b(y, y, w), \forall y, w \in V$$

记 $f(t) = Pf_0(t)$, 则方程式 (1-1) 可以等价地写作如下的形式:

$$\begin{cases} y'(t) + \nu Ay(t) + B[y(t)] = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1-5)$$

定义 1.1.1 若 $f \in L^2(0, T; V')$ 且 $y_0 \in H$, 则函数 $y: [0, T] \rightarrow H$ 称之为方程式 (1-1) 的弱解, 如果 $y \in Y_w := L^2(0, T; V) \cap C_w(0, T; H) \cap W^{1,1}(0, T; V')$, 且满足:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle y(t), \Psi \rangle_{(V', V)} + \nu a(y, \Psi) + b(y, y, \Psi) = \langle f, \Psi \rangle_{(V', V)} \text{ a. e. in } (0, T) \\ y(0) = y_0, \forall \Psi \in V \end{cases} \quad (1-6)$$

这里 $C_w(0, T; H)$ 是 $[0, T] \rightarrow H$ 上的弱连续函数的全体。

函数 y 称为方程式 (1-1) 的强解, 如果 $y \in W^{1,1}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; D(A))$, 且式 (1-5) 成立, $\frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; H)$

关于方程式 (1-1) 的强解和弱解的存在性, 我们有如下定理^[1]。

定理 1.1.1 若 $f \in L^2(0, T; H)$, $y_0 \in V$, $0 < T < \infty$ 。则存在 $T^* = T^*(\|y_0\|, \|f\|_{L^2(0, T; H)}) \leq T$, 方程式 (1-1) 在时间区间 $(0, T^*)$ 上存在唯一强解 $y \in W^{1,2}(0, T^*; H) \cap L^2(0, T^*; D(A))$ 。如果 $N=2$, 则 $T^* = T$ 。

若 $f \in L^2(0, T; V')$, $y_0 \in H$ 。则方程式 (1-1) 至少存在一个弱解。且

$$\frac{dy}{dt} \in L^{4/3}(0, T; V'), \text{ 若 } N=3 \quad (1-7)$$

$$\frac{dy}{dt} \in L^{2/(1+\epsilon)}(0, T; V'), \text{ 若 } N=2 \quad (1-8)$$

若 $N=2$, 则方程式(1-1)存在唯一的弱解。

在参考文献[1]中, 上述结论可由一般带有极大单调算子的非线性柯西问题的解的存在唯一性结论得到的。除此之外, 文献[2]、[3]、[4]中也介绍了经典的利用伽辽金逼近的证明方法得到相关结论的过程。

最后我们介绍一些关于三元线性泛函 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的性质^[1~5]。

性质 1.1.1 $1 \leq N \leq 3$, 则

$$b(y, z, w) = -b(y, w, z) \quad (1-9)$$

$$|b(y, z, w)| \leq C \|y\|_{m_1} \|z\|_{m_2+1} \|w\|_{m_3} \quad (1-10)$$

其中 m_1, m_2, m_3 是正实数, 满足:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 \geq \frac{N}{2}, \text{ if } m_i \neq \frac{N}{2}, \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ m_1 + m_2 + m_3 > \frac{N}{2}, \text{ if } \exists i \in \{1, 2, 3\}, m_i = \frac{N}{2} \end{cases}$$

另外, 下列插值不等式也会多次用到

$$\|y\|_m \leq C \|y\|_l^{1-\alpha} \|y\|_{l+1}^\alpha \quad (1-11)$$

这里 $\alpha = m - l \in (0, 1)$, 记号 $\|\cdot\|_m$ 表示索伯列夫空间 $[H^m(\Omega)]^N$ 的范数。

改变控制流体运动, 以达到我们期望的目标, 在许多工程应用中有重大的意义。比如在船舶运输和航空业中, 减少水流和气流带来的阻力将会节约大量的资金成本和自然资源, 同时也可以提高航行速度和续航能力。另外还有许多类似的流体控制的问题, 比如减少流体的不稳定性等。所有诸如此类的改变流体以达到我们的目标的问题都属于流体控制问题。狭义的流体控制是指将数学理论, 比如系统理论、方程理论和最优控制理论运用于 Navier - Stokes 方程, 研究相关的目标最优化问题。我们这里介绍的内容属于后者范畴。

带状态约束的 Navier - Stokes 方程的最优控制问题可以简单描述为

$$(P) \quad \min J(y, u) [\text{或 } \min J(y, v)]$$

(y, u) [或 (y, v)] 是不可压缩 Navier - Stokes 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \nu \Delta y(x,t) + (y \cdot \nabla) y(x,t) + \nabla p(x,t) = \chi_\omega(x) u(x,t) \\ (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ (\nabla \cdot y)(x,t) = 0, (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = v(x,t), (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

(1-12)

的解。其中状态 y 需要满足下列的几种约束之一:

$$(a) (y(\cdot, 0), y(\cdot, T)) \in K_1,$$

$$(b) \int_{\Omega} \int_0^T y^2(x,t) dt dx \in K_2,$$

$$(c) \int_{\Omega} y^2(x, \cdot) dx \in K_3.$$

开集 $\Omega \in \mathbb{R}^N, N=2,3$, 输入控制是 u 或者是 v 时分别对应的是内控制问题和 Dirichlet 边界最优控制问题。 K_1, K_2, K_3 分别是 $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), R, C[0, T]$ 的子集。以上三种约束分别是典型的初始状态和终端状态约束、积分约束和点状态约束(对时间)。周期约束 $y(x, 0) = y(x, T)$ 可以看作是一种特殊的初始状态和终端状态约束, 也有学者用不同的方法单独考虑这种约束类型下的最优控制问题。正如我们上面所介绍的, Navier - Stokes 方程是描述流体运动的方程, 具有很强的应用背景和实际含义, 其最优控制问题在很多情况下都有一定的状态约束。解决带有状态约束的 Navier - Stokes 方程的最优控制问题是工程应用中的实际需要, 具有重要的意义。理论上, 状态约束会给最优控制问题的解决带来本质的困难, 解决 Navier - Stokes 方程的带状态约束的最优控制问题对非线性分布参数系统的最优控制理论的发展可以起到一定的补充和推动作用。

1.2 泛函分析基础

在本章的最后部分, 我们将选摘一些我们后面章节需要用到的泛函分析中的基本概念和定理。对于相关内容更加完整和详细的介绍, 读者可以参考相关文献。

定理 1.2.1[Aubin^[6]] 设 $1 < p_i < \infty, i=0, 1, X_0, X_1, X_2$ 为满足条件 $X_0 \subset X_1 \subset X_2$ 的 Banach 空间, 且都为自反空间。若 X_0 到 X_1 的嵌入映射是紧的, 则空间

$$W = L^{p_0}([a, b]; X_0) \cap W^{1, p_1}([a, b]; X_2)$$

紧嵌入 $L^{p_0}([a, b]; X_1)$ 。

接下来我们介绍一些关于有界变差泛函的结论。相关内容和结论可以在文献[7]中找到更详细的叙述。

给定 Banach 空间 E 及其对偶空间 E' , 记 $BV([0, T]; E')$ 为 $[0, T] \rightarrow E'$ 上有界变差函数的全体。对于该空间给定的泛函 $\omega \in BV([0, T]; E')$, 我们可以定义连续泛函空间 $C([0, T]; E)$ 上的线性连续泛函 μ :

$$\mu_\omega(z) = \int_0^T (z(t), d\omega(t))_{(E, E')}, \forall z \in C([0, T]; E)$$

这里 $(\cdot, \cdot)_{(E, E')}$ 表示空间 E 与其对偶空间 E' 的对偶积, 上述积分是 Riemann-Steiljes 意义下的积分。我们称线性连续泛函 μ 为测度函数, 并记为 $d\omega$ 。若假设 Banach 空间 E' 是自反的, 则我们有下列的 Lebesgue 分解公式:

$$d\omega(t) = \omega_a dt + d\omega_s(t) \quad (1-13)$$

其中 $\omega_a \in L^1([0, T]; E')$, $\omega_a dt$ 是测度 $d\omega$ 的绝对连续的部分。泛函 $\omega_s \in BV([0, T]; E')$ 是测度 $d\omega$ 的奇性部分。换言之, 存在一个 Lebesgue 测度为 0 的闭子集 $\Theta \in [0, T]$, 使得

$$d\omega_s(t) = 0, t \in [0, T] \setminus \Theta$$

记 $M([0, T]; E')$ 为 $C([0, T]; E)$ 的对偶空间, 即全体取值于空间 E' 的 $[0, T]$ 上的有界变差函数的全体。集合 $\mathcal{K}$ 为空间 E 中的闭凸子集。注意到我们上述定义的 $\mu_\omega \in M([0, T]; E')$ 。记集合

$$\mathcal{K} = \{y \in C([0, T]; E); y(t) \in K, \forall t \in [0, T]\}$$

我们可以定义集合 K 在 y 处的规范锥为:

$$N_{\mathcal{K}}(y) = \{\mu \in M([0, T]; E'); \mu(y-x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}\} \quad (1-14)$$

现在我们给出经典的 Banach 空间中的 Helly 定理的弱形式^[7]。

定理 1.2.2 设 X 是自反的可分的 Banach 空间, 其对偶空间为 X^* 。设序列

$\{\omega_n\} \subset BV([a, b]; X)$, $\|\omega_n(t)\| \leq C$, $\forall t \in [a, b]$, 且 $\text{Var}(\omega_n; [a, b]) \leq C$, $\forall n \in N$, 则存在子序列 $\{\omega_{n_k}\} \subset \{\omega_n\}$ 使得当 $n_k \rightarrow \infty$ 时

$$\omega_{n_k}(t) \xrightarrow{w-X} \omega(t); \forall t \in [a, b] \quad (1-15)$$

$$\int_a^b \varphi d\omega_{n_k} \xrightarrow{w-X} \int_a^b \varphi d\omega, \forall \varphi \in C([a, b]) \quad (1-16)$$

这里, 记号“ $\xrightarrow{w-X}$ ”表示在赋范空间 X 中弱收敛, 下文中我们会用“ $\xrightarrow{X}$ ”表示在赋范空间 X 中强收敛, 用“ $\xrightarrow{w^*-X}$ ”表示在赋范空间 X 中弱收敛。

接下来, 我们简单介绍关于赋范空间和凸函数的一些基本结论。

记 X 为一给定的实赋范空间, 其对偶空间记为 X^* , 它们的范数分别记为 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_*$ 。在赋范空间 X 上定义映射 $J: X \rightarrow 2^{X^*}$:

$$J(x) = \{x^*; (x^*, x) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \forall x \in X \quad (1-17)$$

由 Hahn - Banach 定理可知, $J(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$ 。我们称映射 J 为空间 X 上的对偶映射。通常来说, 对偶映射是多值映射。但是对于一些特殊的空间, 对偶映射是单值的。

定义 1.2.1 赋范空间 X 是严格凸的, 如果空间 X 中的单位球 B 是严格凸的, 也即, 单位球的边界不包含任何线段。

赋范空间 X 是一致凸的, 如果对任给的 $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < 2$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$, 若 $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, 且 $\|x - y\| \geq \epsilon$, 则 $\|x + y\| \leq 2[1 - \delta(\epsilon)]$ 。

由 Asplund E 的结果^[8]可知, 一个自反的 Banach 空间 X 可以赋予等价范数 $\|\cdot\|_0$, 使得空间 X 在此范数下是严格凸的。且其对偶空间 X^* 在对偶范数 $\|\cdot\|_0^*$ 下也是严格凸的。

关于严格凸或一致凸的 Banach 空间的对偶映射的性质, 我们有下列的结论^[9]。

定理 1.2.3 若自反的 Banach 空间 X 的对偶空间 X^* 是严格凸的, 则其对偶映射 $J: X \rightarrow X^*$ 是单值映射, 且该映射是半连续的 (即该映射是 X 到 X_w^* 的连续映射, 这里 X_w^* 是弱* 拓扑下的 X^* 空间)。

若其对偶空间 X^* 是一致凸的, 则其对偶映射 $J: X \rightarrow X^*$ 在空间 X 的任一有界集合上都是一致连续的。

在介绍凸函数之前, 我们还需要介绍单调算子的概念。

定义 1.2.2 集合 $A \subset X \times X^*$

$$A = \{(x, y) \in X \times X^* \mid y \in Ax, x \in X\}$$

称作是单调的, 如果

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0, \forall [x_i, y_i] \in A, i=1, 2$$

单调集合(或单调算子)称作是极大单调的(该单调集合不真包含在 $X \times X^*$ 的任一单调集合中)。

若 $A \subset X \times X^*$ 是极大单调算子, 则对每一个 $x \in X$, 方程

$$0 \in J(x_\lambda - x) + \lambda Ax_\lambda \quad (1-18)$$

存在唯一的解 x_λ , 定义^[9]

$$J_\lambda(x) = x_\lambda, A_\lambda(x) = \lambda^{-1} J(x - x_\lambda) \quad (1-19)$$

算子 $A_\lambda: X \rightarrow X^*$ 称作算子 A 的 Yosida 逼近。下面的定理列出了一些关于算子 A_λ 和 J_λ 的一些基本的性质^[9]。

定理 1.2.3 设赋范 Banach 空间 X 及其对偶空间 X^* 是严格凸且自反的。则下列结论成立

- (i) A_λ 是单值的, 单调的, 有界的, 且为空间 $X \rightarrow X^*$ 的半连续算子;
- (ii) $\|A_\lambda x\| \leq |Ax| := \inf\{\|y\|; y \in Ax\}$, 对任意的 $x \in D(A)$, $\lambda > 0$;
- (iii) $J_\lambda: X \rightarrow X$ 在任意有界集合上都是有界的, 且

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda x = x, \forall x \in \text{conv} D(A) \quad (1-20)$$

我们之所以要在这里介绍极大单调算子, 是因为下半连续的凸函数的次微分是一类特殊的非常重要的极大单调算子, 这也是联系非线性极大单调算子和凸分析的一个桥梁。

定理 1.2.4 设 X 是实 Banach 空间, $\phi: X \rightarrow \bar{R}$ 是下半连续的真凸泛函。则 $\partial\phi$ 是空间 $X \times X^*$ 的极大单调子集。

定义 1.2.3 设 $\phi: X \rightarrow \bar{R}$ 是一个下半连续的真凸函数。由下半连续的凸函数的性质我们知道对每一个 $\lambda > 0$, $\phi_\lambda(x): X \rightarrow \bar{R}$

$$\phi_\lambda(x) = \inf \left\{ \frac{\|x-u\|^2}{2\lambda} + \phi(u), u \in X \right\}, \forall x \in X \quad (1-21)$$

$\phi_\lambda(x)$ 在空间 X 上是有定义的。函数 $\phi_\lambda(x)$ 称作是 $\phi: X \rightarrow \bar{R}$ 的 Moreau 正则化。

关于 ϕ 和 ϕ_λ 之间的关系, 我们有下列的结论。

定理 1.2.5 设空间 X 是自反的且严格凸的 Banach 空间, 其对偶空间也是严格凸的。记 $A = \partial\phi \subset X \times X^*$ 。则函数 ϕ_λ 是凸的, 连续的, Gateaux 可微的, 且

$$\nabla\phi_\lambda = A_\lambda, \forall \lambda > 0$$

且

$$\phi_\lambda(x) = \frac{\|x - J_\lambda x\|^2}{2\lambda} + \phi(J_\lambda x), \forall \lambda > 0, \forall x \in X \quad (1-22)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_\lambda(x) = \phi(x), \forall x \in X \quad (1-23)$$

$$\phi(J_\lambda x) \leq \phi_\lambda(x) \leq \phi(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in X \quad (1-24)$$

若 X 是希尔伯特空间(其对偶空间不必是它本身), 则 ϕ_λ 是 Frechet 可微的。

最后, 我们介绍一些空间插值理论, 这些理论将在 Dirichlet 边界最优控制问题中用到。关于这部分理论, 读者可以参考文献[10]。

定理 1.2.6 设 X 和 Y 是两个可分的希尔伯特空间, 且 $X \subset Y$, X 在 Y 中稠密, 且连续嵌入到 Y 中, 则空间 X 可以定义为某一算子 Δ 的定义域, 该算子是自伴的, 正定的, 且为空间 Y 中的无界算子。空间 X 上的范数等价于算子 Δ 在空间 Y 中的图范数

$$(\|u\|_Y^2 + \|\Delta u\|_Y^2)^{1/2}, u \in D(\Delta) = X \quad (1-25)$$

而且

$$(u, v)_X = (\Delta u, \Delta v)_Y, \forall u, v \in X \quad (1-26)$$

这里带有下标的括号表示相应的空间上的内积。

定义 1.2.4 设 X 和 Y 是两个可分的希尔伯特空间, 且满足条件 $X \subset Y$, X 在 Y 中稠密, 且连续嵌入到 Y 中, 设算子 Δ 是上述定理中定义的算子, 则定义插值

空间

$$[X, Y]_{\theta} = D(\Lambda^{1-\theta}), 0 \leq \theta \leq 1 \quad (1-27)$$

这里 $D(\Lambda^{1-\theta})$ 是算子 $\Lambda^{1-\theta}$ 的定义域。空间 $[X, Y]_{\theta}$ 上的范数定义为算子 $\Lambda^{1-\theta}$ 的图范数。

定理 1.2.7 定义

$$W(a, b) = \left\{ u \mid u \in L^2([a, b]; X), \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2([a, b]; Y) \right\} \quad (1-28)$$

a, b 可以为有限数, $-\infty$ 或者 ∞ 。对于 $u \in W(a, b)$ 我们有

$$u^{(j)} \in B([a, b]; [X, Y]_{(j+1/2)/m}), 0 \leq j \leq m-1 \quad (1-29)$$

且 $u \rightarrow u^{(j)}$ 是从 $W(a, b)$ 到 $B([a, b]; [X, Y]_{(j+1/2)/m})$ 的线性连续映射。这里 $B([a, b]; [X, Y]_{(j+1/2)/m})$ 表示所有取值与空间 $[X, Y]_{(j+1/2)/m}$ 的有界连续函数全体。

定理 1.2.8 假设欧氏空间 R^n 中的开集 Ω 的边界足够光滑, 则映射 $D(\overline{\Omega}) \rightarrow D(\Gamma)^{\mu+1}$

$$u \mapsto \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \mid j=0, 1, \dots, \mu \right\}$$

可以连续的延拓为 $H^s(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$ 上的连续线性映射

$$u \mapsto \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \mid j=0, 1, \dots, \mu \right\}$$

这里 μ 是使得不等式

$$\mu < s - 1/2$$

成立的最大的整数。

最后我们介绍经典的 Ekeland 变分原理, 以及一些针状变分的基本结论。这里的结论可以参考文献[11]。

定理 1.2.9 (Ekeland 变分原理) 设 (V, d) 是一个完备的距离空间, 设函数

$$F: V \rightarrow (-\infty, +\infty), D(F) = \{v \in V \mid F(v) < +\infty\}, D(F) \neq \emptyset$$

是下半连续且有下界的函数。任取 $\delta > 0$, 则存在 $\bar{v} \in V$, 使得

$$\begin{cases} F(\bar{v}) + \delta d(v_0, \bar{v}) \leq F(v_0) \\ F(\bar{v}) < F(v) + \delta d(v, \bar{v}), \forall v \neq v_0 \end{cases}$$

当控制函数空间仅仅是一个距离空间,而没有代数结构时,我们不能采用传统的利用凸性的变分方法。因此,为了得到最优对满足的一阶必要条件,控制函数的变分需要采用一种非常特殊的形式。我们简单的描述如下:设 $u \in \mathfrak{U}$ 是可行控制函数。任取控制函数空间上的另一个函数 $v \in \mathfrak{U}$ 和时间 $[0, T]$ 上的可测集 E , 我们定义变分控制函数

$$u_E = \begin{cases} v, & t \in E \\ u, & t \in [0, T] \setminus E \end{cases}$$

也即我们只在可测集 E 上改变控制函数的值。我们称 u_E 为控制函数 $u \in \mathfrak{U}$ 的针状扰动。

定理 1.2.10 设 X 是 Banach 空间, (Ω, F, μ) 为有限可测函数空间。对任给的 $\rho \in (0, 1)$, 记 $E_\rho = \{E \in F \mid \mu(E) = \rho\mu(\Omega)\}$ 。则对任给的 $h \in L^1(\Omega; X)$, 我们有

$$\inf_{E \in E_\rho} \left| \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho} \chi_E - 1 \right) h d\mu \right| = 0$$

定理 1.2.11 设 $\Delta = \{(t, s) \in [0, T] \times [0, T] \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$, X 是一个 Banach 空间。设函数 $h: \Delta \rightarrow X$ 满足下列性质: 存在 $\varphi(\cdot) \in L^1(0, T)$, 使得

$$|h(t, s)| \leq \varphi(s), \forall t \in [0, T], a. e. s \in [0, t]$$

且对几乎所有的 $s \in [0, T]$, $h(\cdot, s): [s, T] \rightarrow X$ 是连续的。则对任意的 $\rho \in (0, 1)$ 存在集合 $E_\rho \subset [0, T]$, 使得 $|E_\rho| = \rho T$, 且

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \rho \int_0^t h(t, s) ds - \int_{E_\rho \cap [0, t]} h(t, s) ds \right| = o(\rho)$$

§ 2 点状状态约束的最优控制问题—— Moreau 正则化逼近

在本章中,我们将会引入状态约束集合的示性函数,并对其采用 Moreau 正则化逼近的方法来讨论带有关于时间点状状态约束的 Navier - Stokes 方程的最优控制问题。为了得到适定的(qualified)庞特里亚金最大值原理,我们需要给出一个类似于 Slater 类型的假设条件,用这种改进的逼近方法得到的 Lagrange 乘子为 1。

2.1 最优控制问题的描述

我们将考虑最优控制问题

$$(P) \quad \text{minimize } \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |Q[y(t, x) - y^0(t, x)]|^2 \right) dx dt + \int_0^T h[u(t)] dt$$

(y, u) 满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = D_0 u + f_0, (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ y(0) = y_0, x \in \Omega \\ \nabla \cdot y = 0, (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ y = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2-1)$$

且状态函数 y 满足约束

$$y(t) \in K, \forall t \in (0, T) \quad (2-2)$$

这里 K 是空间

$$H = \{y; y \in [L^2(\Omega)]^N, \nabla \cdot y = 0, y \cdot n = 0\} \quad (2-3)$$

的闭凸子集。 Ω 是欧氏空间 R^N ($N=2, 3$) 的有界开集,其边界 $\partial\Omega$ 足够光滑, $T>0$ 是某一给定的终点时刻。函数 $f_0 \in L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^N)$ 。算子 $D_0 \in L(U;$