普通高等教育“十二五”规划教材
工科数学精品丛书

高等数学学习与提高

（第三版）

杨建华　孙霞林　王志宏　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
工科数学精品丛书

高等数学学习与提高

（第三版）

杨建华　孙霞林　王志宏　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据教育部制定的《工科类本科数学基础课程基本要求》，并参考全国研究生入学统一考试数学考试大纲，结合全国数学竞赛具体要求，为学习高等数学以及有志于"考研"和参加"数学竞赛"的读者编写的.

本书的侧重点在对学习中疑难点的解析，剖析一些常见错误，通过例题精讲，对高等数学各种典型题型分析，介绍各种解题思路、方法和运算技巧，帮助读者把高等数学中的基本概念融会贯通，拓展解题思路，提高独立分析问题、解决问题的能力，掌握解题技巧.

本书第三版具有内容新、观点新、针对性强、适用面广、由浅入深、便于自学等特点，适宜于理工、农林、财经、管理等各专业的大学生、研究生学习，也可供教师及科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与提高/杨建华，孙霞林，王志宏主编. —3版. —北京：科学出版社，2016.6

(工科数学精品丛书)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-049234-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… ②孙… ③王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第147281号

责任编辑：吉正霞 王 晶 / 责任校对：孙寓明

责任印制：彭 超 / 封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2016年6月第 三 版 印张：26

2016年6月第一次印刷 字数：523 000

定价：55.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

PREFACE

前言

高等数学是高等学校中理工、农林、财经、管理等各专业的必修课程，其重要性是众所周知的，它不仅为众多后续课程提供必要的基础，而且在现代科学技术和经济建设中的应用也越来越广泛.数学知识与能力是当代大学生知识能力结构中不可缺少的重要部分.然而，学生普遍感觉学好高等数学较困难.事实上，要想学好高等数学，不仅要有强烈的求知欲望和坚韧的毅力，还要有一套行之有效的学习方法；另外，由于近年来教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间的限制，课堂上，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响，这对高等数学知识的深入学习带来了一定的困难.一本实用性强、具有参考价值的高等数学辅导书是必不可少的.

本书是根据教育部制定的《工科类本科数学基础课程基本要求》，并参考全国研究生入学统一考试数学考试大纲，结合全国大学生数学竞赛具体要求编写而成，旨在为参加“考研”、参加全国大学生数学竞赛的学生以及数学教师提供参考.本书内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程共十一章.各章分基本要求、内容提要、疑难解析、例题精讲、综合练习五部分，其中疑难解析分析疑点难点，剖析常见错误.例题精讲是本书的主要部分，精选出一些具有启发性、典型性和针对性的例题，通过这些例题的分析和解答，对解题方法进行分类，为读者运用所学知识去独立解决数学问题起到了有效的引导和示范作用.读者通过综合练习，达到巩固所学知识、掌握解题方法的目的.例题精讲和综合练习分为A、B两类，A类适合教学大纲基本要求，B类适合加深提高、数学竞赛

以及考研.附录部分有第一学期、第二学期期末模拟试卷、近几年全国硕士研究生入学统一考试高等数学的部分试题、全国大学生数学竞赛模拟试题和全国大学生数学竞赛预赛试题.

本书第三版面向创新、开放的大平台具有内容新、观点新、针对性强、适用面广、由浅入深、便于自学等特点,适宜于理工、农林、财经、管理等各专业的大学生、研究生,也可供教师及科技工作者参考.

本书由杨建华、孙霞林、王志宏主编,杨建华、张忠诚负责拟定编写大纲并统稿.参与编写的人员有:熊德之编写第一章,杨雪帆编写第二章,余荣编写第三章,宁小青编写第四章,柳翠华编写第五章,曾华编写第六章,孙霞林编写第七章,杨建华编写第八章,王志宏编写第九章,熊晓龙编写第十章,伍建华编写第十一章,张忠诚等编写附录.

由于编者水平所限,时间紧迫,难免有错误和不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2016 年 4 月

CONTENTS

目录

第一章　函数与极限

一、基本要求

1. 理解函数和复合函数的概念，了解反函数的概念，了解函数的性质（奇偶性、单调性、周期性和有界性）.

2. 学会建立简单实际问题中的函数关系式.

3. 理解极限的概念，了解极限的 $\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 定义.

4. 掌握极限的有理运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

5. 了解极限的性质（唯一性、有界性、保号性）和两个存在准则（夹逼准则与单调有界准则），会用两个重要极限求极限.

6. 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念，会用等价无穷小求极限.

7. 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.

8. 了解函数间断点的概念，会判别间断点的类型.

9. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

二、内容提要

（一）函数概念

定义　设数集 $D\subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记为 D_f，即 $D_f=D$.

（二）函数特性

1. 有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，$X\subset D$. 如果存在 $M>0$，使得 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

$f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 X 上有上界且有下界.

2. 单调性

设 $f(x)$的定义域为 D, $X\subset D$. $\forall x_1, x_2\in X$,且 $x_1<x_2$,若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调增;若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 严格单调增.反之,若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上单调减;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 严格单调减.

3. 奇偶性

设 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.若 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

设 $f(x)$的定义域为 D,若存在 $T\neq 0$,使得 $\forall x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期.

通常把 $f(x)$的最小正周期简称为 $f(x)$的周期.

(三) 极限定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$.

一般地,$\lim f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$ 时刻,从该时刻以后,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

(四) 极限的性质

1. 唯一性

(1) 若数列$\{x_n\}$的极限存在,则极限值唯一;

(2) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则极限值唯一.

2. 有界性

(1) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,则数列$\{x_n\}$有界;

(2) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心 δ 邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有界.

3. 保号性

(1) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,且 $a>0$ (或 $a<0$),则 $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,恒有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$);

(2) 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$ (或 $A<0$),则 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心 δ

邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

(五) 极限的运算法则

1. 设$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$
$$\lim f(x)g(x)=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

2. $\lim f(x)=0$, $g(x)$有界$\Rightarrow \lim f(x)g(x)=0$.

3. 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$且$u=\varphi(x)\neq a\ (x\in\mathring{U}(x_0))$,又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

(六) 无穷小与无穷大

1. 无穷小与极限的关系

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)\quad(\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0).$$

2. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数为无穷小,恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

3. 无穷小的比较

设α,β均为同一过程lim的无穷小.

(1) 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小,记为$\beta=o(\alpha)$,或称$\alpha$是$\beta$的低阶无穷小;

(2) 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\ (c\neq 0)$,则称$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小;

(3) 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$是$\alpha$的等价无穷小,记为$\beta\sim\alpha$;

(4) 若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\ (c\neq 0)$,则称$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

4. 无穷小替换定理

设α,β均为无穷小,$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$,如果$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A$(或$\infty$),则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=A\ (\text{或}\ \infty).$$

5. 常用等价无穷小

当 $x \to 0$ 时,有

$$\sin x \sim x,\quad \tan x \sim x,\quad \arcsin x \sim x,\quad \arctan x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad \ln(1+x) \sim x,\quad e^x - 1 \sim x,\quad a^x - 1 \sim x\ln a,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

(七) 两个准则和两个重要极限

1. 准则 I(夹逼准则)

若数列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$满足 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. 准则 II(单调有界准则)

单调有界数列必有极限.

3. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(八) 函数连续概念

1. $f(x)$在点 x_0 处连续的等价定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\text{当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时,恒有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. 左连续与右连续

左连续:$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$;右连续:$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

$f(x)$在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在点 x_0 处左连续且右连续.

(九) 间断点的类型

间断点
- 第一类间断点:左、右极限均存在的间断点
  - 可去间断点:左、右极限相等的间断点
  - 跳跃间断点:左、右极限不相等的间断点
- 第二类间断点:不是第一类间断点的其他间断点(在间断点处左、右极限至少有一个不存在)

(十) 连续函数的运算

1. 四则运算

若 $f(x)$, $g(x)$在点 x_0 处连续,则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$

在点 x_0 处连续.

2. 复合运算

若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，$f(u)$ 在点 u_0 处连续，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

（十一）闭区间上连续函数的性质

1. 有界性和最大值、最小值定理

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在$[a, b]$上有界，且 $f(x)$在$[a, b]$上必可取得最大值和最小值.

2. 零值定理

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists\,\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

3. 介值定理

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值 c，$\exists\,\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=c$.

三、疑难解析

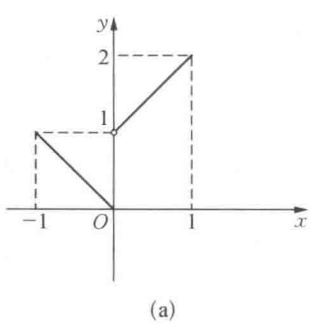
1. 单调函数必存在反函数，不单调的函数是否一定没有反函数？

答 不是的. 函数 f 是否存在反函数，取决于 f 是否为 D 到 $f(D)$的一一映射. 如果是，则存在反函数，否则就不存在反函数. 函数 f 在 D 上单调只是 f 为一一映射的一个充分而非必要条件. 例如，函数

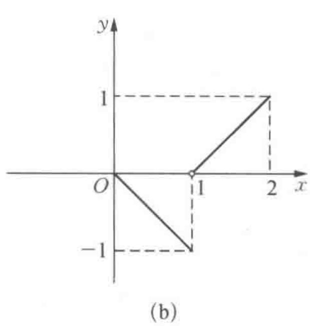
$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1, 1]$上不单调(图 1-1(a))，但它存在反函数(图 1-1(b))

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$



(a)



(b)

图 1-1

2. 如何理解类似 $f(x+2)$，$f(\sin x)$这样的函数记号?

答 $f(x+2)$，$f(\sin x)$ 都是表示复合函数的记号. 如果令 $u=x+2$，则 $f(x+2)$ 表示由 $f(u)$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 例如，

若设 $f(x+2)=x^2-2x+4$，

则

$$x^2-2x+4=(x+2)^2-6(x+2)+12=u^2-6u+12$$

即 $f(u)=u^2-6u+12$. 这就是说，$f(x+2)=x^2-2x+4$ 是由 $f(u)=u^2-6u+12$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 此时 $f(\sin x)=\sin^2 x-6\sin x+12$.

3. 为什么在极限的定义中，ε 要任意给定?

答 以当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限是 A 为例来说明. 因为 ε 是刻画函数 $f(x)$与常数 A 接近程度的量，只有 ε 的任意性(不论它多么小)才能表明 $f(x)$与 A 的无限接近. 又“给定”是指在通过 ε 找 δ 的过程中，ε 是不变的常数，因为只有 ε 暂时不变，才能通过分析 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 找到正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

4. 在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，δ 与 ε 是什么关系?

答 因为 x 与 x_0 无限接近时，$f(x)$才能与 A 无限接近，即只有 x 与 x_0 接近到一定程度，才能保证 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. δ 正是表达 x 与 x_0 接近程度的量. 一般来说，当 ε 变化时，δ 也变化，但 δ 不是由 ε 唯一确定的. 因为 $\forall\varepsilon>0$，找到了一个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则对于所有小于 δ 的正数 δ_1，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，仍然有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，因此 δ 不是唯一的，也不必要找到一个最大的 δ. 所以在利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时，常常将 $|f(x)-A|$ 适当放大，以便于通过 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 较容易找到 δ，这也是用定义证明极限时常用的技巧.

5. 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$的敛散性是否相同?

答 一般说它们的敛散性是不同的.

若数列$\{x_n\}$收敛，则数列$\{|x_n|\}$也收敛，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 这是因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，又因为

$$\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|,$$

从而有 $\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$ 成立.

反之不成立. 例如，数列$\{|(-1)^n|\}$是收敛的，但数列$\{(-1)^n\}$发散.

6. 如何掌握不同极限过程中极限的定义?

答 所谓极限过程，指的是自变量的变化趋势. 一般有 7 种情形：$n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$.

虽然当自变量的变化过程不同的时候，极限定义的表述略有差别，但它们的本

质是相同的. $\lim f(x)=A$，即 $\forall\varepsilon>0$，总存在一个时刻，使得该时刻后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 例如，$\forall\varepsilon>0$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，存在的时刻是指存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，存在的时刻是指存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，存在的时刻是指存在正数 δ，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 掌握了极限定义的实质，在表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

7. 求函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？

答　(1) 若点 x_0 是分段函数的分段点，且点 x_0 的左、右两侧函数的表达式不一样，则求分段点 x_0 的极限时一定要先考察左、右极限是否存在，再确定 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 但是，并不是所有分段函数在分段点的极限都要求左、右极限. 如果分段点 x_0 的左右两侧函数表达式相同，且当 $x\to x_0$ 时，x_0 的左右两侧 $f(x)$ 的变化趋势也一样，则不必求左、右极限，可直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 例如，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

(2) 一般来说，求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，如果 $f(x)$ 在点 x_0 两侧变化趋势一致，则不必分开讨论；如果发现两侧变化趋势可能有差别，则应分别研究左、右极限. 例如，求 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以需要考察左、右极限. 这时 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，所以极限不存在. 类似的例子还有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{1}{x}$ 等.

8. 无穷大量与无界量有什么联系和区别？

答　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则根据无穷大的定义，$\forall M>0$（不论 M 多么大），$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$. 这表明对于点 x_0 的去心邻域里的一切点 x，都必有 $|f(x)|>M$.

若 $f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内无界，则对于无论多么大的正数 M，在该去心邻域内存在点 x，使得 $|f(x)|>M$. 这表明 $\exists x_1\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得 $|f(x_1)|>M$，但不是 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得 $|f(x)|>M$.

对比上述定义可知，在自变量的同一变化过程中，无穷大量一定是无界量，但

无界量未必是无穷大量.例如,当 $x\to 0$ 时,$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是无界量,但不是无穷大量.

9. 利用等价无穷小代换求极限时,应该注意什么问题?

答 根据等价无穷小代换定理,用等价无穷小代换求极限时,是将分子和分母的整体分别代换成与它们各自等价的无穷小.若将分子(或分母)中的和(或差)中的某项用与之等价的无穷小作代换,则不能保证代换后的新分子(或分母)与原来的分子(或分母)是等价无穷小.例如,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$,若将 $\tan x$, $\sin x$ 分别换成 x,则分子为 0,从而极限为 0,显然 0 与 $\tan x-\sin x$ 不等价,所以这个极限结果是错误的.事实上,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2/2}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

这说明,当 $x\to 0$ 时, $\tan x-\sin x$ 与 $\frac{1}{2}x^3$ 是等价的.

特别指出的是,若分子(或分母)为若干因子的乘积,则可对其中的一个或多个无穷小因子作等价无穷小代换,这时可保证所得的新分子(或分母)的整体为原分子(或分母)整体的等价无穷小.

10. 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续时,则它具有几个重要性质.如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续,或是在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上连续,这些性质还能成立吗?

答 一般来说不一定成立.例如,函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内连续,但它在该区间内无最大值和最小值,且无界.又如,函数 $y=x$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,但它在该区间上无最大值,也无界.

对于无穷区间,有时通过适当加强条件,可以使某些性质成立.例如,设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.又如,$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且与 $f(a)$ 异号,则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内必存在零点.

四、例题精讲

A 类

(一) 求函数的定义域

例 1.1 求函数 $f(x)=\arccos\frac{x}{[x]}$ 的定义域,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大

整数.

解　要使 $f(x)$有意义,x 应满足

$$-1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1\quad 且\quad [x]\neq 0.$$

由于 $x-1<[x]\leqslant x$,因此,当 $x<0$ 时,$0<\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$;当 $0\leqslant x<1$ 时,$\dfrac{x}{[x]}$ 无意义;当 $x\geqslant 1$ 时,$1\leqslant\dfrac{x}{[x]}$ (当 $x\in\mathbf{N}^{+}$ 时,等号成立). 故

$$D_f=\{x\mid x<0 或 x=1,2,3,\cdots\}.$$

例 1.2　设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^x, & x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\ln x$,求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

分析　求复合函数 $f[\varphi(x)]$定义域的方法是解不等式组 $\begin{cases}x\in D_\varphi,\\ \varphi(x)\in D_f.\end{cases}$

解　由于 $D_f=(-\infty,+\infty)$, $D_\varphi=(0,+\infty)$,因此,$\forall x\in D_\varphi$,即当$0<x<+\infty$ 时,有 $-\infty<\varphi(x)=\ln x<+\infty$,即 $\varphi(x)\in D_f$. 故 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(二) 求函数的表达式

例 1.3　设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}$.

解　因为

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(x/\sqrt{1+x^2})^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f(x)}{\sqrt{1+2[f(x)]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+2(x/\sqrt{1+x^2})^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

由数学归纳法,可得

$$\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n次}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 1.4　求函数 $f(x)$的表达式.

(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+2$,且 $f(x+1)-f(x)=2x-1$;