超级通俗 考研数学

神准押题（数学三）

潘鑫◆著

考研数学的传言
麒麟才子百难见

超级无敌阅读组合

（按如下顺序进行阅读）

《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》

＋

《超级通俗 考研数学 习题伴侣》

＋

《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》

＋

《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》

＋

《超级通俗 考研数学 神准押题》

中国商业出版社

超级通俗考研数学

神准押题（数学三）

潘鑫◆著

中国商业出版社

图书在版编目（CIP）数据

超级通俗　考研数学．神准押题．数学三／潘鑫著．—北京：中国商业出版社，2016.5
ISBN 978－7－5044－9421－4

Ⅰ．①超…　Ⅱ．①潘…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－习题集　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 095632 号

责任编辑：唐伟荣

中国商业出版社出版发行
010－63180647　www.c－cbook.com
（100053　北京广安门内报国寺 1 号）
新华书店总店北京发行所经销
北京市书林印刷有限公司印刷

*

787×1092 毫米　16 开　15.75 印张　300 千字
2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
定价：38.00 元

＊　＊　＊　＊

（如有印装质量问题可更换）

“超级通俗”系列丛书
出版说明

本套丛书简介

本套丛书由五部分组成，它们分别是：

1.《超级通俗　考研数学　三大攻坚战》（包括高等数学、线性代数、概率统计共三本）。

2.《超级通俗　考研数学　习题伴侣》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。

3.《超级通俗　考研数学　绝密解题套路总结》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。

4.《超级通俗　考研数学　历年真题无敌解析》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。

5.《超级通俗　考研数学　神准押题》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。

本套丛书阅读顺序

本套丛书应按照以上从“1”到“5”的顺序进行阅读。首先，《超级通俗　考研数学　三大攻坚战》三本书中给大家讲解考研数学所要求的所有知识点；其次，《超级通俗　考研数学　习题伴侣》中给大家选取了大量习题，用以巩固“攻坚战”中学到的知识点；接着，通过《超级通俗　考研数学　绝密解题套路总结》给大家总结考试的一些固定题型（和“攻坚战”的区别就在于：攻坚战讲的是考点，而本书讲的是题型，只会考点不会题型的话那么做题速度提高不了，而只会题型不会考点的话那么知识学得并不全面）；再接着，大家就要通过《超级通俗　考研数学　历年真题无敌解析》来大量地练习考研数学真题；最后，大家通过《超级通俗　考研数学　神准押题》来检测自己的学习效果。

本套丛书定位

本套丛书的定位是：一套完全适合准备研究生入学考试的读者自学的书籍（无论读者基础如何）。本套丛书与传统教材大不相同，语言非常通俗易懂，逻辑十分严谨，所涉及到的每个知识点（无论多简单的知识点）几乎都有举例，这“三斧子”使得读者完全不用担心有看不懂的地方。所以，本套丛书定位为自学用书。

本套丛书特色

1. 充满趣味

本套丛书从书名到内容处处充满着趣味性，如书中大量使用了“攻坚战”“发动进攻”等词语，使得原来枯燥的数学知识变得生动形象起来。

2. 语言非常通俗易懂

大部分考研数学类书籍，都是十分规范化的，有点儿像古代的“八股文”，读者需要

一个字一个字地去琢磨到底是什么意思。而最为高级的表达方式就是：用最能让人理解的文字，去讲解最难让人理解的知识，但不需要读者再去琢磨如此规范化的语言到底是什么意思。这正是本套丛书的最大亮点。本套丛书的所有语言，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到习题的解析，都非常地通俗易懂，让人感觉就像是在读童话故事或者武侠小说。这样一来，读者不仅能看懂本书的所有内容，更乐于去阅读，从而使得读者不仅掌握了相应的知识，也节省了学习时间。

3. 逻辑非常清晰

本套丛书的逻辑从头到尾都是非常清晰的。具体来说，本套丛书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且几乎所有题目的每一步解答都注明了来源。另外，大家知道，做一道题可能会同时用到很多个不同章节的知识点。笔者见过的很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完知识点一，然后下面有配套的例题，而此例题中不但用到了刚讲完的知识点一，而且还用到了没讲的知识点二（题中并没有注明用到了还没有讲的知识点二）。这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是之前的某个知识点自己忘了，后来才知道原来用到的是后续的知识点。这样的话很浪费时间，而本套丛书对这一点高度重视，所有的习题中极少存在上述现象。

4. 例题非常丰富

本套丛书的例题非常丰富。本套丛书所涉及到的知识点（无论再简单的知识点）几乎都有配套的例题。

本套丛书读者对象

以下三类读者最适合阅读本套丛书：

1. 正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）。
2. 正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是什么样的基础）。
3. 工作后需要补学或温习高等数学、线性代数、概率统计的读者（无论读者是什么样的基础）。

感谢

本套丛书能够和大家见面，是多方努力的结果。笔者做了很多努力和大量工作，参与本套丛书编写的人员还有：陈翔宇、郑祺、刘坤、王一川、王一珉、洪晓雪、李桐、和家乐、张梅艳、谢思思、潘建平、禹贞余、王剑博、赵政。

要感谢为本套丛书做出贡献的中国商业出版社的各位辛勤的工作者，没有他们的付出，就没有本套丛书的顺利出版。

另外，我还要感谢我的各位讲授考研课程的同行，他们在我写作本套丛书的过程中给了我很多的指导。

在此向所有帮助与支持我的朋友道一声：谢谢！

潘鑫

2016 年 1 月于北京

超级无敌导读　向押题试卷发起进攻（必看）

麒麟才子给大家的温馨提示：

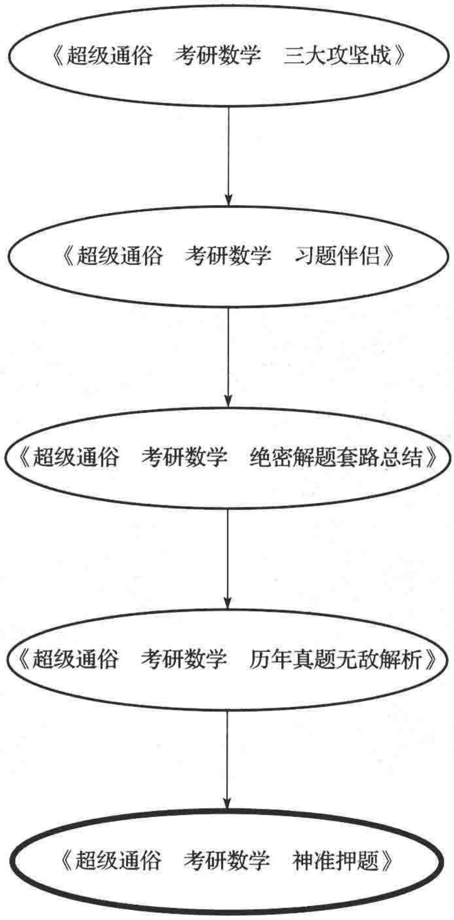
本部分是导读，虽不涉及具体的习题，但地位是相当重要的，因为本部分会告诉大家本书在丛书中的阅读顺序以及本书的使用方法。因此，为了能更有效地进行战斗，请大家一定要阅读本部分内容。

1　阅读顺序

本书在丛书中的阅读顺序是：在阅读完《超级通俗　考研数学　历年真题无敌解析(数学三)》之后。

为了能够让大家对整套丛书阅读顺序更加一目了然，我画一个框图，大家按照框图中的顺序来阅读就可以了。

本套丛书的阅读顺序



以上就是本套丛书的阅读顺序，从框图中我们可以清晰地看出本书在本套丛书中的阅读时间。不要小看这个阅读顺序，大家只有按照此顺序来进行阅读，方能达到最好的学习效果。

2 绝密攻略

书中共有四套押题试卷，为了达到最好的效果，本书应该这样使用：

① 严格按照考试的时间来做试卷，每套试卷至少要做三遍。

② 等做完一整套试卷后再统一对答案，不要做一道题对一道题的答案。

3　战前赠言

麒麟才子给即将向押题试卷发起进攻的同学们的战前赠言：

有志者，事竟成。破釜沉舟，百二秦关终属楚

苦心人，天不负。卧薪尝胆，三千越甲可吞吴

目　　录

第一套神准押题卷

麒麟才子给大家的三点提示

① 对于有两问或三问的大题来说，如果上一问是要证明某结论，那么即使你没有证出来，在做下一问的时候也仍然可以用此结论。

② 正式开始做题时，并不是要按着顺序从选择题第一题开始做，也并不是要按着高数——线代——概率的顺序做，而是先挑第一眼看上去就会的来做(比如大家现在可能已经看过并背过《超级通俗　考研数学　绝密解题套路总结(数学三)》，那本书里面所总结的题型，大家应该是第一眼看上去就会的，因为我总结的套路都非常固定，所以大家就先做它们，这就保证了基本分数90分)，这样心里就会踏实很多，然后再做别的。

③ 建议大家在发下考卷后，在草稿纸上采用速记的形式迅速把《超级通俗　考研数学三大攻坚战》中的所有核心考点和《超级通俗　考研数学　绝密解题套路总结(数学三)》中所总结的所有题型都默写下来，大概花上10分钟左右。这不是浪费时间，而是为了以防真正做题时因紧张而忘记一些之前背过的东西。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y=x+\sin x$。　　(B) $y=x^2+\sin x$。

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$。　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$。

(2) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$。

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$。

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$。

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$。

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$。

(B) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$。

(C) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$。

(D) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$。

(4) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k，c 为常数，且 $c\neq 0$，则

(A) $k=2$，$c=-\frac{1}{2}$。

(B) $k=2$，$c=\frac{1}{2}$。

(C) $k=3$，$c=-\frac{1}{3}$。

(D) $k=3$，$c=\frac{1}{3}$。

(5) 设 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1，c_2，c_3，c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

(A) $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$。

(B) $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_4$。

(C) $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_3$，$\vec{\alpha}_4$。

(D) $\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$，$\vec{\alpha}_4$。

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。若 $P=(\vec{\alpha}_1，\vec{\alpha}_2，\vec{\alpha}_3)$，$Q=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2，\vec{\alpha}_2，\vec{\alpha}_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.3\varphi(x)+0.7\varphi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $E(X)=$

(A) 0。　　(B) 0.3。

(C) 0.7。　　(D) 1。

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$，Y 的概率分布为 $P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$。记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0。　　(B) 1。　　(C) 2。　　(D) 3。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$______。

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$______。

(11) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x, xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______。

(12) 由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为______。

(13) 设 A，B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$______。

(14) 设 X_1，X_2，…，X_m 为来自二项分布总体 $X(X\sim B(n, p))$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差。记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $E(T)=$______。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) **(本题满分 10 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$。

(16) **(本题满分 10 分)**

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

(Ⅱ)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$。

(17) **(本题满分 11 分)**

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，则存在 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0, \delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$。

(18) **(本题满分 10 分)**

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性($\eta>0$)。

(Ⅰ)证明定价模型为 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

(Ⅱ)若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由(Ⅰ)中的定价模型确定此商品的价格。

(19) **(本题满分 11 分)**

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1, y)=0$，$f'(x, 1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$，其中 $D=\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

(20) **(本题满分 11 分)**

已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=\vec{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\vec{x}$ 的秩为 2。

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)求正交变换 $\vec{x}=Q\vec{y}$，将 f 化为标准形。

(21) **(本题满分 11 分)**

设向量组 $\vec{\alpha}_1=(1,0,1)^T$，$\vec{\alpha}_2=(0,1,1)^T$，$\vec{\alpha}_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\vec{\beta}_1=(1,1,1)^T$，$\vec{\beta}_2=(1,2,3)^T$，$\vec{\beta}_3=(3,4,a)^T$ 线性表示。

(Ⅰ) 求 a 的值。

(Ⅱ) 将 $\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_3$ 用 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$ 线性表示。

(22) **(本题满分 11 分)**

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球。现有放回地从袋中取两次，每次取一个球。以 X，Y，Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

(Ⅰ) 求 $P\{X=1|Z=0\}$；

(Ⅱ) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

(23) **(本题满分 11 分)**

设 X_1，X_2，…，X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知。$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差。

(Ⅰ) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；

(Ⅱ) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$。