

超级通俗 考研数学

三大攻坚战之完爆线性代数

潘鑫◆著

考研数学的传言
麒麟才子百难见

超级无敌阅读组合
(按如下顺序进行阅读)

《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》

《超级通俗 考研数学 习题伴侣》

《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》

《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》

《超级通俗 考研数学 神准押题》



超级通俗 考研数学

三大攻坚战之完爆线性代数

潘鑫◆著

图书在版编目 (CIP) 数据

超级通俗 考研数学. 三大攻坚战之完爆线性代数 /
潘鑫著. —北京: 中国商业出版社, 2016. 5

ISBN 978 - 7 - 5044 - 9408 - 5

I. ①超… II. ①潘… III. ①线性代数-研究生-入
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 095611 号

责任编辑: 唐伟荣

中国商业出版社出版发行

010 - 63180647 www. c - cbook. com

(100053 北京广安门内报国寺1号)

新华书店总店北京发行所经销

北京明月印务有限责任公司印刷

*

787×1092 毫米 16 开 21.5 印张 410 千字

2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷

定价: 56.00 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

“超级通俗”系列丛书

出版说明

本套丛书简介

本套丛书由五部分组成，它们分别是：

1. 《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》(包括高等数学、线性代数、概率统计共三本)。
2. 《超级通俗 考研数学 习题伴侣》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。
3. 《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。
4. 《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。
5. 《超级通俗 考研数学 神准押题》(按数学一、数学二、数学三分为三本)。

本套丛书阅读顺序

本套丛书应按照以上从“1”到“5”的顺序进行阅读。首先，《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》三本书中给大家讲解考研数学所要求的所有知识点；其次，《超级通俗 考研数学 习题伴侣》中给大家选取了大量习题，用以巩固“攻坚战”中学到的知识点；接着，通过《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》给大家总结考试的一些固定题型(和“攻坚战”的区别就在于：攻坚战讲的是考点，而本书讲的是题型，只会考点不会题型的话那么做题速度提高不了，而只会题型不会考点的话那么知识学得并不全面)；再接着，大家就要通过《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》来大量地练习考研数学真题；最后，大家通过《超级通俗 考研数学 神准押题》来检测自己的学习效果。

本套丛书定位

本套丛书的定位是：一套完全适合准备研究生入学考试的读者自学的书籍(无论读者基础如何)。本套丛书与传统教材大不相同，语言非常通俗易懂，逻辑十分严谨，所涉及到的每个知识点(无论多简单的知识点)几乎都有举例，这“三斧子”使得读者完全不用担心有看不懂的地方。所以，本套丛书定位为自学用书。

本套丛书特色

1. 充满趣味

本套丛书从书名到内容处处充满着趣味性，如书中大量使用了“攻坚战”“发动进攻”等词语，使得原来枯燥的数学知识变得生动形象起来。

2. 语言非常通俗易懂

大部分考研数学类书籍，都是十分规范化的，有点儿像古代的“八股文”，读者需要

一个字一个字地去琢磨到底是什么意思。而最为高级的表达方式就是：用最能让人理解的文字，去讲解最难让人理解的知识，但不需要读者再去琢磨如此规范化的语言到底是什么意思。这正是本套丛书的最大亮点。本套丛书的所有语言，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到习题的解析，都非常地通俗易懂，让人感觉就像是在读童话故事或者武侠小说。这样一来，读者不仅能看懂本书的所有内容，更乐于去阅读，从而使得读者不仅掌握了相应的知识，也节省了学习时间。

3. 逻辑非常清晰

本套丛书的逻辑从头到尾都是非常清晰的。具体来说，本套丛书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且几乎所有题目的每一步解答都注明了来源。另外，大家知道，做一道题可能会同时用到很多个不同章节的知识点。笔者见过的很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完知识点一，然后下面有配套的例题，而此例题中不但用到了刚讲完的知识点一，而且还用到了没讲的知识点二（题中并没有注明用到了还没有讲的知识点二）。这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是之前的某个知识点自己忘了，后来才知道原来用到的是后续的知识点。这样的话很浪费时间，而本套丛书对这一点高度重视，所有的习题中极少存在上述现象。

4. 例题非常丰富

本套丛书的例题非常丰富。本套丛书所涉及到的知识点（无论再简单的知识点）几乎都有配套的例题。

本套丛书读者对象

以下三类读者最适合阅读本套丛书：

1. 正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）。
2. 正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是什么样的基础）。
3. 工作后需要补学或温习高等数学、线性代数、概率统计的读者（无论读者是什么样的基础）。

感谢

本套丛书能够和大家见面，是多方努力的结果。笔者做了很多努力和大量工作，参与本套丛书编写的人员还有：陈翔宇、郑祺、刘坤、王一川、王一珉、洪晓雪、李桐、和家乐、张梅艳、谢思思、潘建平、禹贞余、王剑博、赵政。

要感谢为本套丛书做出贡献的中国商业出版社的各位辛勤的工作者，没有他们的付出，就没有本套丛书的顺利出版。

另外，我还要感谢我的各位讲授考研课程的同行，他们在我写作本套丛书的过程中给了我很多的指导。

在此向所有帮助与支持我的朋友道一声：谢谢！

潘鑫

2016年1月于北京

超级无敌导读 打赢线性代数攻坚战（必看）



麒麟才子给大家的温馨提示：

本部分是导读，虽不涉及具体的知识点，但地位是相当重要的，因为本部分会告诉大家本书的使用方法。因此，为了打赢线性代数攻坚战，请大家一定要阅读本部分内容。

1 背景介绍



考研数学线性代数的复习其实就是一场攻坚战。为了能够打赢这场攻坚战，我们一共需要对敌人发动六次进攻。

第一次进攻（本书第1章）是对“行列式”发起的。

第二次进攻（本书第2章）是对“矩阵”发起的。

第三次进攻（本书第3章）是对“向量”发起的。

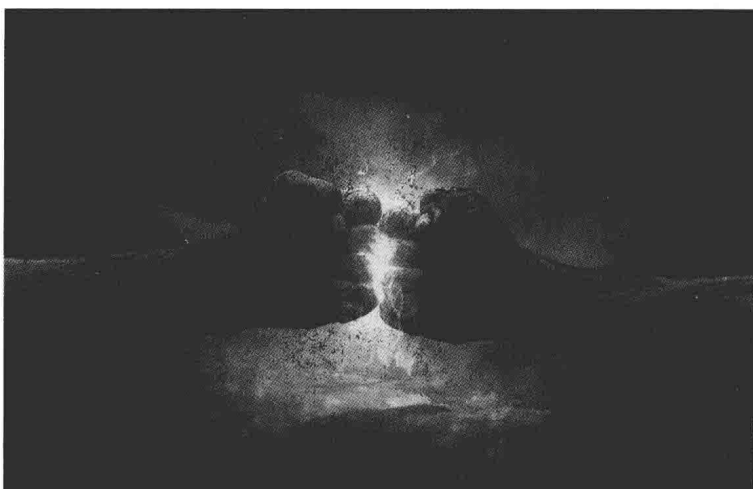
第四次进攻（本书第4章）是对“线性方程组”发起的。

第五次进攻（本书第5章）是对“特征值、特征向量、相似矩阵”发起的。

第六次进攻（本书第6章）是对“二次型”发起的。

这六次进攻胜利结束后，线性代数的复习也就结束了。

2 满分攻略



本书一共有六章，每一章都会分为“基础知识点”和“核心考点”两部分来给大家进行讲解。

例如，第1章的目录是这样的：

第1章 第一次进攻——行列式

- 1.1 基础知识点1——行列式长什么样
- 1.2 基础知识点2——行列式的本质
- 1.3 基础知识点3——行列式的基本计算方法
- 1.4 基础知识点4——行列式的五条性质
- 1.5 基础知识点5——克拉默法则
- 1.6 基础知识点6——什么是矩阵
- 1.7 基础知识点7——矩阵的运算
- 1.8 基础知识点8——矩阵的转置
- 1.9 基础知识点9——方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵
- 1.10 基础知识点10——向量的基本概念

- 1.11 核心考点1——关于代数余子式的两句话
- 1.12 核心考点2——克拉默法则的推论
- 1.13 核心考点3——关于行列式的两种计算题
- 1.14 核心考点4——超级思维定势

考研数学线性代数部分取得满分是每位考生的心愿，那么如何使用本书才能使得线性代数达到满分呢？下面的话是满分攻略！

不管你的数学基础怎么样（或许你大学从没有学过数学、或许你大学的每次数学期末考试全都挂掉了、或许你大学的每次数学期末考试都是靠突击一两天才勉强获得及格的分），只要你做到以下两点，就一定可以使得考研线性代数部分达到满分：

① 书中的每一个知识点都要看，不要遗漏掉任何一个小细节。（放心，麒麟才子的文笔，你们可以完全看懂的！）

② 在看完每一章后，需要把每一章的“核心考点”默写下来。

比如，当你看完第一章后，你需要拿出一张白纸，白纸上这么写：

第一次进攻——行列式

核心考点1——关于代数余子式的两句话

内容如下：

.....

核心考点2——克拉默法则的推论

内容如下：

.....

核心考点3——关于行列式的两种计算题

内容如下：

.....

核心考点4——超级思维定势

内容如下：

.....

3 战前赠言



麒麟才子给即将打响线性代数攻坚战的同学们的战前赠言：

有志者，事竟成。破釜沉舟，百二秦关终属楚
苦心人，天不负。卧薪尝胆，三千越甲可吞吴

目 录

第 1 章 第一次进攻——行列式	1
同学们，做好准备了吧？号角声里，英雄壮志当激烈，让我们披上铁衣，上阵杀敌！	
1.1 基础知识点 1——行列式长什么样	2
什么？行列式长的这么可爱？！	
1.2 基础知识点 2——行列式的本质	3
不能光看长相，要看内涵，看本质！	
1.3 基础知识点 3——行列式的基本计算方法	4
行列式原来有这么多计算方法！	
1.3.1 特殊行列式的计算	5
1.3.2 一般行列式的计算	19
1.4 基础知识点 4——行列式的五条性质	29
行列式有什么性质呢？	
1.4.1 性质 1	30
1.4.2 性质 2	31
1.4.3 性质 3	32
1.4.4 性质 4	34
1.4.5 性质 5	35
1.5 基础知识点 5——克拉默法则	35
做事情要有法则！有规矩！	
1.6 基础知识点 6——矩阵	38
矩阵是啥？	
1.7 基础知识点 7——矩阵的运算	39
给你一个矩阵，你会算吗？	
1.7.1 矩阵与矩阵相加	39
1.7.2 数字与矩阵相乘	40
1.7.3 矩阵与矩阵相乘	40
1.8 基础知识点 8——矩阵的转置	55
转来转去的虽然麻烦，但也得会啊！	
1.9 基础知识点 9——方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵	56
这些矩阵太奇怪了！	

1.9.1	方阵	56
1.9.2	对角矩阵	57
1.9.3	单位矩阵	61
1.9.4	逆矩阵	65
1.10	基础知识点 10——向量的基本概念	73
	向量又是啥玩意？	
1.11	核心考点 1——关于代数余子式的两句话	74
	代数余子式好玩吗？	
1.12	核心考点 2——克拉默法则的推论	88
	什么？克拉默法则还有推论？	
1.13	核心考点 3——关于行列式的两种计算题	94
	大家一定要提高计算能力！	
1.13.1	抽象行列式的计算	94
1.13.2	具体行列式的计算	97
1.14	核心考点 4——超级思维定势	110
	这是本次进攻敌人最后的阵地了，冲啊！	

第 2 章 第二次进攻——矩阵 112

矩阵是什么阵？一字长蛇阵？

2.1	基础知识点 1——初等变换	113
	矩阵还能变换？是长翅膀飞起来吗？	
2.2	基础知识点 2——初等矩阵	115
	初等矩阵有什么意思，要学就学高等！	
2.3	基础知识点 3——矩阵的秩	119
	“秩”这个字读什么？我不会啊！	
2.3.1	矩阵的子式	119
2.3.2	矩阵的秩的定义	124
2.3.3	利用初等行变换来求矩阵的秩	124
2.4	核心考点 1——两组充分必要条件	132
	怎么无敌了？	
2.5	核心考点 2——四条重要结论	133
	有重大结论？	
2.6	核心考点 3——矩阵乘法的两条定律	134
	这个我会！小学时学过！	
2.6.1	矩阵乘法满足结合律	134
2.6.2	矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律	134

2.7	核心考点 4——可交换的矩阵相乘特例	134
	为什么不说“交换律”?	
2.8	核心考点 5——关于矩阵转置的四个公式	135
	公式? 还四个?	
2.9	核心考点 6——关于矩阵可逆的六个公式	135
	又是公式! 烦死了!	
2.10	核心考点 7——可逆矩阵、初等变换、初等矩阵、矩阵的秩之间的关系以及等 阶矩阵	140
	可逆矩阵、初等变换、初等矩阵以及矩阵的秩我都已经给大家讲过了, 现在是把 这几个知识点融会贯通, 使得同学们对于这部分知识的掌握达到考研的要求。	
2.10.1	可逆矩阵与初等矩阵的关系	141
2.10.2	初等矩阵与初等变换的关系	141
2.10.3	初等变换与矩阵的秩的关系	143
2.10.4	初等矩阵的逆矩阵	145
2.10.5	等价矩阵	146
2.11	核心考点 8——对称矩阵、反对称矩阵、求逆矩阵、矩阵的幂	147
	标题怎么这么多字?	
2.11.1	对称矩阵与反对称矩阵	147
2.11.2	求逆矩阵	149
2.11.3	特殊分块矩阵的逆矩阵	153
2.11.4	求一个矩阵的若干次幂	155

第 3 章 第三次进攻——向量 161

同学们, 你们矩阵都能学得那么好, 而从矩阵中抽出一行或一列就是向量。也就是说, 向量也是矩阵, 只不过是特殊的矩阵罢了, 更简单了。你们有理由学不好吗?

3.1	基础知识点 1——向量与向量组的基本概念	162
	我们可以把向量组看成是一个大箱子, 里面装着可爱的“向量们”。	
3.2	基础知识点 2——线性表出的概念	163
	“线性表出”也叫“线性表示”, 是反映一个向量与一个向量组之间关系的一个 专有名词。	
3.3	基础知识点 3——线性相关与线性无关的概念	164
	本节将要给大家讲的是线性相关与线性无关的基本概念。本节的内容如果大家 能掌握好, 本章的后续章节就都不用怕啦!	
3.4	基础知识点 4——最大无关组	166
	“最大无关组”也称“极大无关组”、“最大线性无关组”、“极大线性无关组”。	

3.5	基础知识点 5——“向量组的秩”的概念	167
	啊！又出现了一个带“秩”的词！大家快来看看它是啥玩意儿吧！	
3.6	基础知识点 6——“向量组的秩”与“矩阵的秩”的关系	170
	“向量组的秩”与“矩阵的秩”都带“秩”字，它们到底有没有关系？	
3.7	基础知识点 7——线性表出的推广	172
	百尺竿头，更进一步。让我们将“线性表出”推广开来吧！	
3.8	基础知识点 8——等价向量组	173
	什么？难道不光两个矩阵能等价，向量组也能？	
3.9	核心考点 1——关于线性相/无关要记的几个结论	174
	理科有时也像文科，该记的就记，该背的就背！	
3.10	核心考点 2——方程组的求解	176
	本节我要给大家讲的解方程组的方法与“克拉默法则”有什么区别呢？	
3.10.1	求齐次方程组的通解	178
3.10.2	求非齐次方程组的通解	190
3.11	核心考点 3——四个重要的定理	198
	把这四个定理背下来，必能事半功倍！	
3.12	核心考点 4——线性表出的本质	207
	任何事物我们既要看到现象，还要看到本质。	
3.13	核心考点 5——与秩有关的七个公式	208
	本节要讲的是与秩有关的七个公式。	
3.14	核心考点 6——向量空间	209
	向量空间是什么空间？	
3.14.1	基，向量空间的维数，坐标	210
3.14.2	基变换公式	213
3.15	核心考点 7——正交	215
	正交是啥？	
3.15.1	正交向量	215
3.15.2	正交矩阵	217
3.15.3	正交化	221
3.16	核心考点 8——线性相/无关的证明题	224
	本节我要给大家总结一下线性相/无关的证明题的解题方法。只要大家认真阅读本节，考研题中关于线性相/无关的证明题就能全部搞定啦。	

第 4 章 第四次进攻——解线性方程组 229

小学就学过解方程组，现在只不过是未知数个数多了一点儿。什么？你不会？你不会是在开玩笑吧？

4.1	核心考点 1——求解含参方程组	230
	在第三章中,我们已经了解了如何求解齐次方程组和非齐次方程组。这一节我要告诉大家的是如何求两个方程组的公共解。其实很简单,只要将这两个方程组联立即可。	
4.2	核心考点 2——求两个方程组的公共解	244
	本节要讨论的问题是“同解方程组”。“同解方程组”与上一节所讨论的问题“两个方程组的公共解”有共同点也有不同点。	
4.3	核心考点 3——同解方程组的证明	247
	已知齐次方程组求基础解系这大家肯定是会了,如果反过来呢?已知齐次方程组的基础解系,该如何反求齐次方程组呢?	
4.4	核心考点 4——已知齐次方程组的基础解系,反求齐次方程组	251
	你了解线性方程组解的性质吗?如果不了解,请认真阅读本节的内容。	
4.5	核心考点 5——线性方程组解的性质	252
	既然方程组大家都会求解了,那么现在只不过是带参数的方程组而已,换汤不换药。	
第 5 章	第五次进攻——特征值、特征向量、相似矩阵	257



当大家一看见以上的这三个车标,就知道车一定是“奥迪”,“宝马”和“奔驰”。这三个车标就相当于“特征值、特征向量”。现在大家明白了吧。那相似矩阵呢?大家知道相似三角形是什么意思吧?相似矩阵比相似三角形更简单。你们有理由学不会吗?

5.1	基础知识点 1——特征值、特征向量的基本概念	258
	想知道特征值和特征向量的基本概念吗?本节我将带大家初识特征值和特征向量。	
5.2	基础知识点 2——特征值、特征向量的计算方法	258
	一个方阵的特征值和特征向量可以通过某种计算方法计算出来吗?当然可以!	
5.3	基础知识点 3——对称矩阵、正交矩阵	262
	本节的内容纯属复习,温故而知新嘛。	
5.4	基础知识点 4——特征值 0 的个数	264
	在前面的基础知识点二中,我告诉了大家求特征值的方法。本节,我们要讨论一个矩阵有多少个特征值为 0。	

- 5.5 基础知识点 5——相似矩阵 265
 本节我将带大家感受相似矩阵之美。
- 5.6 基础知识点 6——对角化 266
 如果矩阵 A 可以相似于对角矩阵, 则称矩阵 A 可以对角化。就这么简单!
- 5.7 基础知识点 7——合同矩阵 266
 合同矩阵的定义式与相似矩阵的定义式类似, 所以请大家务必要区分清楚, 千万别记混了。
- 5.8 核心考点 1——证明两个矩阵有相同的特征值 267
 本节将给大家介绍四种证明两个矩阵有相同的特征值的方法。有了这些方法, 大家以后再遇到证明两个矩阵有相同的特征值的题, 就可以轻松应对啦!
- 5.9 核心考点 2——与特征值有关的四个结论 269
 本节将给大家介绍四条与特征值有关的结论, 请大家务必要把这四条结论背下来。大家千万不要觉得背东西很困难, 只要功夫深, 铁杵磨成针!
- 5.10 核心考点 3——通过 A 的特征值、特征向量来推关于 A 的多项式的特征值、特征向量 271
 有时, 从结论出发可能会更好!
- 5.11 核心考点 4——什么样的方阵可以对角化 273
 通过矩阵 A 的特征值、特征向量是可以推出关于 A 的多项式的特征值、特征向量的, 本节将告诉大家到底应该如何来推。
- 5.12 核心考点 5——若方阵可以对角化, 那么 Λ 以及 P 怎么求 277
 在本章的基础知识点六中, 我给大家介绍了对角化的概念。但是, 并不是说任意的一个方阵 A , 就一定可以对角化!
- 5.13 核心考点 6——实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交 285
 本节所要研究的问题是建立在上一节所研究的问题的基础上的。具体来说, 本节所要研究的问题是“若方阵可以对角化, Λ 和 P 到底应该如何去求”。
- 5.14 核心考点 7——实对称矩阵一定可以相似于对角矩阵 287
 本节将给大家介绍关于相似矩阵的五个小结论。小结论, 大用处!
- 5.15 核心考点 8——实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵 295
 我们知道, 任何一个矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必线性无关。而对于对称矩阵来说, 它的两个来自于不同特征值的特征向量不但线性无关, 而且正交。

第 6 章 第六次进攻——二次型 300

二次型就是多项式, 而且是二次多项式。高中时大家连三次和四次多项式都见过, 那么二次多项式又怎么会对大家有难度呢?

6.1	基础知识点 1——二次型的定义	301
	二次型只不过是每项均由“常数 $\times$ 变量 $\times$ 变量”所组成的多项式（大家上初中时就学过多项式）而已，就这么简单。	
6.2	基础知识点 2——二次型的对应矩阵	302
	每个二次型都有对应矩阵。换句话说：我们根据二次型就可以写出二次型的对应矩阵；我们根据二次型的对应矩阵也可以写出二次型。这有点像函数表达式与函数图像的关系。	
6.3	基础知识点 3——利用矩阵乘法来表示二次型	303
	任何一个二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 都可以表示成 $\vec{X}^T A \vec{X}$（其中 $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$A$ 为二次型的对应矩阵）。	
6.4	基础知识点 4——标准形	304
	标准形是特殊的二次型，那么，它到底如何“标准”呢？	
6.5	基础知识点 5——规范形	305
	规范形是特殊的标准形。也就是说，它比“标准形”更“标准”！	
6.6	基础知识点 6——合同二次型	306
	若两个二次型的对应矩阵是合同矩阵，那么称这两个二次型为合同二次型。很简单吧！	
6.7	基础知识点 7——正定二次型、正定矩阵	307
	正定二次型是二次型，而且是特殊的二次型。特殊性体现在：当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 不全为零时，二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 恒大于零。	
6.8	核心考点 1——化二次型为标准形	308
	化二次型为标准形一共有两种方法。一是正交变换法，二是配方法。	
6.9	核心考点 2——两个对称矩阵合同的充分必要条件	318
	在第 5 章的基础知识点 7 中，我给大家介绍了两个矩阵合同的定义。可是实际上，我们很难通过定义来判断两个矩阵是否合同。于是我们迫切地需要一个充分必要条件！	
6.10	核心考点 3——正定二次型、正定矩阵的证明方法	320
	本节我将为大家总结正定二次型、正定矩阵的证明方法。大家不要害怕证明题，其实很多时候，证明题甚至比计算题更简单！	
6.10.1	正定矩阵的证明方法	320
6.10.2	正定二次型的证明方法	324