Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers

世界数学元典丛书

"十二五"国家重点图书

超穷数理论基础文稿

[德] 康托 著　陈杰 刘晓力 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世界数学元典丛书

"十二五"国家重点图书

超穷数理论基础文稿

Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers

[德] 康托 著

陈杰 刘晓力 译

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书是德国数学家康托关于超穷数理论的一部名著,原文用德文写成,这里的中译本是根据 1915 年纽约多佛出版社的英译本译成的.本书由康托于 1895 和 1897 年在 Mathematische Annalen 上发表的两篇论文构成,是康托关于超穷数理论研究二十多年工作的总结.第一部分为"全序集的研究"(1895),第二部分为"良序集的研究"(1897),内容分别为超穷基数和超穷序数理论.

本书的引言部分是英译者 P. E. B. Jourdain 对超穷数理论创立过程的历史追溯,书后的附注是对 1897 年以后超穷数理论发展所作的一个扼要介绍.

本书适合高等院校的师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

超穷数理论基础文稿/(德)康托著;陈杰,刘晓力译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.4

书名原文:CONTRIBUTIONS TO THE FOUNDING OF THE THEORY OF TRANSFINITE NUMBERS

ISBN 978-7-5603-5476-7

Ⅰ.①超… Ⅱ.①康… ②陈… ③刘… Ⅲ.①集论 Ⅳ.①O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 274684 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 9.25 字数 166 千字
版 次 2016 年 4 月第 1 版 2016 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5476-7
定 价 38.00 元

前　言

本书包括康托(George Cantor,1845—1918)的两篇非常重要的论文,题为"Beiträge zur Begründung der transfinten Mengenlehre",分别于1895年和1897年[①]发表在《数学年鉴》(Mathematische Annalen)上.由于这两篇论文中主要研究的是各类超穷基数和超穷序数,而不是通常意义上的"集合论"(the theory of aggregates 或 the theory of sets)——集合元素是与一维或多维空间中几何意义的"点"对应的那些实数或复数——我认为使用本书现在这个译名(《超穷数理论基础文稿》)较为恰当.

这两篇论文是康托自1870年开始发表的长篇系列文章中若干最重要成果的最终的逻辑精练.要想体会康托在超穷数方面所做工作的极端重要性,我认为有必要对康托关于点集理论的早期研究进行专门的全面考察.正是这些研究第一次表明对超穷数的需要,而且也只有对这些研究进行考察,我们中的大多数人才有可能对超穷数引进的所谓任意性,甚至不可靠性消除怀疑.不但如此,我们还有必要,特别是通过魏尔斯特拉斯等人的工作去追溯导致康托工作的那些研究的历史过程.因此,我在本书前面加了一个引言,回顾了19世纪函数论的一部分进展,比较详细地谈到了魏尔斯特拉斯(Weirstrass,1815—1897)及其他人的基础性研究,以及康托在1870年到1905年间所做的工作.书后的附注对1897年以后超穷数理论的发展作了一个扼要的介绍.引言和附注所用的资料,极大地受益于许多年前康托教授寄给我的一封关于集合论的长信.

由康托的工作所引起的哲学革命的影响恐怕要超过由他所引起的数学革命的影响.除了少数例外,数学家们愉快地接受了康托这个不朽理论的基础,对它寄予希望,仔细考察并使之更加完善;但是许多哲学家却反对它,这恐怕是由于他们中很少有人能真正理解它.我希望本书有助于使数学家和哲学家都能对康托的理论有一个更好的认识.

① Vol. xlvi, 1895, pp. 481–512; Vol. xlix, 1897, pp. 207–246.

最深刻地影响着现代纯粹数学,间接地也影响着与之密切相关的现代逻辑和哲学的最值得称道的三个人是魏尔斯特拉斯、理查德·狄特金(Richard Dedekind,1831—1916)和康托.狄特金的大部分工作沿着与康托相平行的方向展开,把狄特金的《连续性和无理数》、《数的性质及其意义》和康托的工作加以比较将会是很有意思的.狄特金这几部著作出色的英译本已出版.[①]这里所介绍的康托的论文已有法文译本,[②]但至今还没有英文译本.由于顺利地获准翻译出版此书,我要感谢莱比锡和柏林的 B. G. Teubner 先生们以及《数学年鉴》的出版者们.

P·E·B·朱得因

---

① 《关于数论的随笔》(Ⅰ·《连续性和无理数》,Ⅱ·《数的性质及其意义》),W·W·贝曼(W. W. Beman)译,芝加哥,1901 年,简称《数的随笔》.

② F·马洛特(F. Marotte),《关于超穷数理论的基础》,巴黎,1899 年.

中译者言

本书是一部数学经典，它记录了百年前数学领域的一项惊人成就，同时也是数学和哲学思想史上一场深刻的革命，这就是康托惊世骇俗的超穷数理论的创立.

对康托来说，“无穷”是实有的.它们可以不同，可以比较大小，可以进行数学运算，乃至可以对它们进行(超穷)数学归纳，等.康托关于无穷的研究从根本上背离了传统，因此一开始就在数学正统派营垒里引起激烈的争论，甚至遭受严厉的谴责.数学权威克罗内克(Leopold Kronecker，1823—1891)把康托说成是科学的骗子和叛徒；庞加莱(Henri Poincare，1854—1912)则把超穷数论看成是数学发展史上的一场“疾病”.对康托的反对也来自哲学家和神学家.一个长达几十年的学术大辩论由此引发，许多年内，康托的名字就意味着论辩和对立.这使人想起，历史上，哥白尼(Nicolaus Copernicus，1473—1543)以他惊人的理论去校正亚里士多德(Aristotle，前384—前322)的地心说时，曾经历过痛苦的过程，并付出了血与火的代价.康托的超穷数理论遭受同时代人严厉的审查和批判，其实是完全自然的.当论战的硝烟沉落时，希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)称赞康托的超穷算术是“数学思想最惊人的产物”，并声称：“没有人能把我们从康托为我们建立的新乐园中驱逐出去”.罗素(Bertrand，A. W. Russell，1872—1970)则把康托的工作说成“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的成就”.由康托工作所引起的哲学革命的影响甚至要超过由它引起的数学革命的影响.除去科学思想上的伟大意义，康托的理论还直接导致现代集合论的建立，与此同时也极大地刺激和推动了数理逻辑的大发展.而逻辑和现代集合论则构成了全部数学的基础.

本书是从朱得因(Philip E. B. Jourdain)的英译本转译的原文是康托分别于1895和1897年发表在《数学年鉴》(*Mathematische Annalen*)上名为“*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*”，Ⅰ和Ⅱ的两篇论文.这是康托二十多年关于超穷数理论研究的最后总结，也是这个不朽理论的定形文稿.按康托的

原名,本书应译作《超穷集合论基础文稿》,朱得因以他在英译本“前言”中所说的理由,把本书译为《超穷数理论基础文稿》,我们沿用了英译本的书名.

本书从英译本转译有两方面的原因:一方面是因为我们没有找到18世纪的《数学年鉴》,即康托原文的出处;更重要的是,英译者得益于康托本人给他的一封长信,为英译本加了一个长篇“引言”,追踪了康托集合论产生和发展的详细过程,他还加了一个“附录”,扼要介绍了1897年到1915年英译本出版这段时间超穷数理论的进一步发展,这些对了解康托的工作无疑是有益的.

译者就翻译过程中遇到的一些问题,曾请教了康宏逵、郑毓信、袁向东、吴持哲几位先生,在此谨向他们表示诚挚的谢意.

陈杰　刘晓力

目录

引言

I

想要通过个别人而又可靠地追溯从19世纪直到今天仍深刻地影响着纯粹数学分析的主要概念的起源，人们不能不想到J·B·J·傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier,1768—1830)的工作.傅里叶是一流的物理学家，他非常明确地表述过自己对数学的见解，即数学只有通过其有助于解决物理问题才能证明自身的合理性.然而，函数、函数的"连续性"、无穷级数和积分的"收敛性"等一般数学概念，最初却是傅里叶作为对热传导问题的一种粗糙的解的副产品提出来的.这也刺激了函数论的形成和发展.这个视野开阔的物理学家，当他认识到数学是用来对大量复杂的数据进行适当逻辑处理的卓有成效的手段，认识到只有当完全弄清楚有关我们所使用的方法和所得的结论的每一个细节之后才能确信其逻辑的可靠性时，他认可了这种产生于物理学概念的数学方法的精细发展.纯粹数学家懂得，纯粹数学本身最终与哲学息息相关.但是，我们没有必要在这里论证纯粹数学的合理性，而只需指出它在物理学概念中的起源.不过我们也已经指出了，物理学甚至可以论证纯粹数学的许多最现代的发展的合理性.

Ⅱ

19 世纪,函数论的两大分支发展起来并逐渐分离.一方面,狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)给出了傅里叶关于三角级数的结果的严格基础,它导致了对一元实变量(单值)函数的一般概念和函数(特别是三角)展开问题的研究.另一方面,柯西(Louis Cauchy,1789—1857)逐步认识到单变量复变函数的一种特殊概念的重要性,而且在很大程度上独立于柯西、魏尔斯特拉斯建立了他的复变函数的解析理论.

黎曼(Riemann,1826—1866)受到柯西和狄利克雷研究方向的影响,继续进行关于复变函数论的研究,并大大发展了柯西的工作,同时在 1884 年的"大学授课资格论文"中,他还尽可能地推广了狄利克雷关于一元实变量函数展成三角级数问题的不彻底的解.

黎曼在这两方面的工作给汉克尔(Hankel,1839—1873)留下了深刻印象.在 1870 年的一篇论文中,汉克尔企图揭示一元实变函数理论必然导致一些限制和扩充,由这些限制和扩充,我们才开始了复变函数黎曼理论的研究.汉克尔的这些工作,使他赢得了一元实变函数理论奠基人的称号.大约与此同时,在黎曼的"大学授课资格论文"的直接影响下,海涅(Heine,1821—1881)开始对三角级数进行一系列新的研究.

不久,在康托研究了汉克尔的论文并将它应用于三角级数展开的唯一性定理时,我们终于见到康托关于无理数和点集或数集的"导集"的概念,而导集的概念是魏尔斯特拉斯为了严格处理他在柏林关于解析函数的讲座中提出的一些基本问题时引入的.从此,点集理论很快成为一门极其重要的独立理论.1882 年,康托终于独立于集合的含义,定义了第一次出现在数学中的"超穷数"概念.

Ⅲ

19 世纪关于弦振动问题的研究[①]引起了一些人的争论.一方面,达朗贝尔(D'Alembert,1717—1783)主张,由弦振动问题导出的偏微分方程的通解中的

① 参考我在《数学和物理学成就》(Archiv der Mathematik und physik)第三辑,Vol. x, 1906,pp. 225 - 256 和 Isis. Vol. i. 1914,pp. 670 - 677 中的文章.这个引言的大部分选自我的《超穷数的发展》,载于上述《文集》第三辑,Vol. x,pp. 254 - 281;Vol. xiv,1909,pp. 289 - 311;Vol. xvi,1910,pp. 21 - 43;Vol. xxii,1913,pp. 1 - 12.

任意函数应该具有某些特定性质,使得它们能够与当时已知的可以解析表示的函数相一致,从而防止函数在每一点都是完全任意的. 另一方面,欧拉(Euler, 1707—1783)则对某些这种“任意”函数深入分析进行辩解. 后来,伯努利(Daniel Bernoulli,1700—1782)给出了方程的一个无穷三角级数形式的解,并宣称在一定的物理背景下他的解与达朗贝尔的解具有同样的一般性. 但欧拉指出,这仅当一个任意函数[①] $\varphi(x)$ 能够表示成如下形式的级数时才是对的

$$\varphi(x) = \sum_{v} a_v \sin \frac{v\pi x}{l}$$

实际上,$\varphi(x)$ 甚至未必总能展成一个幂级数,这一点也是首先由傅里叶在研究同一个数学问题时指出的. 这方面最早的工作见于 1807 年他写给法兰西科学院关于热传导的通信中. 傅里叶还确定了三角级数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \cdots + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots$$

的系数具有如下形式

$$b_v = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(t)\cos(vt)\,\mathrm{d}t$$

$$a_v = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(t)\sin(vt)\,\mathrm{d}t$$

这一结果很可能独立于先前欧拉和拉格朗日关于一个有穷的三角级数系数的类似结果. 傅里叶还给出了关于他的级数收敛性的一个几何证明,尽管形式上并不能说是严格的,但其中包含了狄利克雷证明的萌芽.

第一个严格表述傅里叶级数的是狄利克雷[②],他把级数的前 n 项和表示成一个定积分,然后证明当 n 趋于无穷且当这个函数满足某些条件时,积分的极限就是三角级数表示的那个函数. 1864 年李普希兹(Lipschitz,1832—1903)把这些条件稍稍减弱了一些.

这样,傅里叶的工作导致人们对某些与代数函数有着完全不同特性的函数进行考察和严格处理. 在这之前,人们不约而同地把那些代数函数看成是分析中能够出现的仅有的函数类型. 从此以后,研究这些非代数函数就成为分析的任务之一了.

19 世纪初期,一种更特殊的虚变量,或称复变量的一元函数理论发展起来

---

① 关于欧拉所说的“任意函数”,就是他称之为“不连续”的那种函数. 但这并不指我们现在(柯西之后)所说的那种不连续函数,参见我发表在 Isis Vol. I,1914,pp. 661 – 703 上的文章.

② “关于在给定的范围内表达任意函数的三角级数的收敛性问题.”《数学杂志》(Journ fur Math),Vol. iv 1829,pp. 157 – 169;《全集》voll,pp. 117 – 132.

了. 高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)至少部分地熟悉这一理论,但是他没有发表过自己的成果,所以这一理论的建立归功于了柯西.[1]柯西不像高斯那样具有远见,富于洞察力,这一理论发展比较缓慢,柯西本人对"虚数"的偏见也是迟迟才有所克服. 回顾1814 年到1846 年这段历史,我们可以看到,一开始傅里叶的思想对柯西的观念产生了强烈影响,后来柯西对其他人的新思想越来越不敏感,与此同时这位气量狭小的天才做出了大量的成果. 柯西总是以能在法兰西科学院每周一次的会议上提出论文而自豪. 他之所以这样,恐怕部分地应归因于他的多产作品并不都是那么重要的. 不但如此,柯西似乎基本上没有认识到一元复变函数理论的极端重要性. 而他却为该理论的建立做了大量的工作. 这一任务自然地落在了布里奥(Briot, 1817—1882)、布凯(Bouquet, 1819—1855)、皮瑟(Puiseux, 1820—1883)和其他人的身上,而黎曼又以最令人惊异的方式发展了这一理论.

黎曼或许应该感谢他的老师狄利克雷影响他致力于位势理论和三角级数两方面的研究. 前者是一元复变函数论早期发展(1851)所使用的主要工具. 黎曼在一篇关于函数可否由三角级数表示的论文(1854 年就有人读过,但直到他逝世后才发表)中,不仅奠定了三角级数一切现代理论研究的基础,而且引发了汉克尔的研究方法,从而宣告了一元实变函数论作为一门独立学科的诞生. 汉克尔研究的动力来源于对黎曼的一元复变函数论基础的思考. 汉克尔的目的是要指出,数学如何迫切地需要我们超出狄利克雷曾间接地阐述过的函数的最一般概念而引进复变量概念,从而最终导致黎曼就职演讲中作为出发点的那个函数概念. 为此目的,汉克尔于 1870 年在对狄利克雷构想的各种可能性进行充分考察之后,开始撰写他的论文"无穷振荡且不连续的函数的研究;关于建立一般函数概念的文稿".

黎曼在 1854 年的论文中,从如下一个狄利克雷只解决了它的一种特殊情形的一般问题入手:如果一个函数可以展成一个三角级数,当自变量连续变化时,这个函数的值将发生什么变化? (就是说,函数能以何种最一般的方式变成不连续并具有极大、极小值). 傅里叶已经注意到,当自变量是实变量时,傅里叶级数可能只对 x 的实数值收敛. 黎曼的问题没有得到完全的解答,也许正是由于这一点,他的结果未在生前发表;然而幸运的是,我们特别关心的部分(它似乎实现了(而且不只是实现了)狄利克雷修正无穷小分析原理的企图)是他给出了一个函数 $f(x)$ 可积的充分必要条件. 这是黎曼的研究工作的必要前提. 这样,黎曼就能给予积分法以一种较柯西甚至较狄利克雷广得多的含义. 事实上,黎曼构造了一个可积函数,它在独立变量的任何两个任意接近的限之间

① 参见朱得因的《柯西和高斯的函数论》, Vill. Math (3) Vol. vi, 1905, pp. 190 – 207.

都有无穷多个不连续点. 这个函数的构造如下:设 x 是一个实变量,(x) 表示 x 对距它最近的那个整数的(正的或负的)增量,如果 x 恰在两个整数之间,则 (x) 为零. 这样,(x) 是 x 的一个单值函数,它在 $n+\frac{1}{2}$ 处不连续(其中 n 是一个整数,正的、负的或零),并且分别以 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 为上、下界. 进一步地,对于整数 v,(vx) 是在点 $vx=n+\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{v}\left(n+\frac{1}{2}\right)$ 处不连续的函数. 于是,级数

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(vx)}{v^2}$$

对所有形如 $x=\frac{p}{2n}$ 的 x 值都不连续,其中 p 是一个与 n 互素的奇数,$\frac{1}{v^2}$ 是为了保证级数对所有的 x 都收敛而附加的因子. 正是这种方法,1870 年由汉克尔在某些方面作了推广. 在黎曼的例子中出现的是一个分析表达式,因而它是在欧拉意义上的一个"函数". 但由于它有那么多奇点,因而不具有黎曼的"复变函数"的那些一般特性. 受到这个例子的启示,汉克尔给出了一种方法,可以构成在每个有理点上具有奇异性的分析表达式. 这样在某些保留下,他可以说,每个狄利克雷意义上的"函数"也是欧拉意义上的"函数".

然而,对康托影响最大的似乎不是黎曼、汉克尔以及他们的后继者(尽管这些人的工作与康托在某些方面的工作密切相关),而是和黎曼同时代的魏尔斯特拉斯,他以非常不同并且更严格的方法研究了复变解析函数论中许多相同的问题.

Ⅳ

魏尔斯特拉斯在 1857 年进入柏林科学院的演讲中说过,1839 ~1840 年冬,在老师古德曼(Gudermann,1798—1852)的影响下,他第一次接触到椭圆函数理论,就强烈地被分析的这一分支吸引着."现在,在数学的任何领域总是高瞻远瞩的阿贝尔(Niels Henrik Abel,1802—1829)建立了一个定理,它包括了产生于代数微分的积分中所有的超越性,而这一定理对于这些超越性所具有的重要意义犹如欧拉积分对于椭圆函数所具有的意义……;雅可比(Jacobi,1804—1851)成功地确定了多变量周期函数的存在性,在阿贝尔的定理中已经给出了这种函数的基本特性. 通过这一存在性定理,阿贝尔定理的真实含义及其本质重要性得到了证实. 我认为具体地去表达和探究这些在分析中尚无先例的全新类型对象的特性,是数学的主要问题之一,在我认清了问题的重要意义后,我立刻下决心致力去解决它们. 当然在我还没有透彻掌握这种问题的真正含义并首

先对一些难度较小的有关问题进行一番研究之前，我不幻想问题能得到什么解决.”

关于上述魏尔斯特拉斯工作的目标，我们这里只是提一下，但他行事的方式，也就是他所讲的要“透彻掌握”，对我们所感兴趣的函数理论产生了决定性的影响. 下面，我们撇开他关于解析函数论的早期著作（虽然1894年才发表）、后期的同类著作以及他关于阿贝尔函数的著作不论，来考察他关于算术基础的极端重要的工作，正是解析函数论严格化的需要使他对算术基础进行了研究.

我们说过，魏尔斯特拉斯工作最根本的目的似乎是研究阿贝尔函数，但是在米塔格－莱夫勒（Gosta Mittag－Leffler）保存的1886年夏季的一个系列讲座的引言中[①]，魏尔斯特拉斯却阐述了另一种更具哲学味的观点，他说：“为了深入到数学科学领域中去，研究那些能指示给我们以它的外延和内涵的特殊问题是必要的. 但是应随时牢记，我们的最终目标是对科学基础可靠性的判定.”

1859年，魏尔斯特拉斯在柏林大学开始了关于解析数论的讲座. 用我们现在的观点来看，这个讲座的重要意义在于，魏尔斯特拉斯由于很自然地要特别注意这一理论的系统阐述，从而不得不仔细考察它的基础.

首先，魏尔斯特拉斯函数理论的特点之一是不采用黎曼用过的柯西和高斯的复积分法；在1875年10月3日给施瓦兹（H. A. Schwarz，1843—1921）的信中，魏尔斯特拉斯说，他相信在函数理论的系统化建立过程中，不用积分的方法会更好一些：

“……越是对函数理论原理的不断思索，我越加坚信这一理论必须建立在代数真理的基础上，因此，相反的，利用超越方法（这是我的一种简单说法）来建立那些简单而基本的代数定理决不是正确的途径，无论这种方法多么吸引人，例如黎曼借此曾发现了代数函数那么多最重要特性. 当然对于真正的发现者，条条大路通罗马是不言而喻的，但我考虑的只是理论的系统化建立.”

其次，比积分问题更重要得多的是，对解析函数理论的系统处理把魏尔斯特拉斯引向对算术基本原理的深入研究，而这种研究最重要的结果是他的无理数理论，这个理论对全部数学所具有的重要意义怎么估计都不会过分. 我们当前要研究的主题实际上可以说几乎完全是由这一理论以及康托后来发展了的成果引出的.

在解析函数理论中，我们经常不得不用到如下定理，如果在复平面的一个有界区域内给定一个无穷点集，则至少存在一点，使得在包含这个点的每个领域中都有无穷多个这种给定的点. 数学家习惯用如下有点含糊的语言表述这

① 《魏尔斯特拉斯之后函数理论的算术基础》，1909年，《斯德哥尔摩数学大会文集》第10页.

点:"存在一点,在它的附近,某些给定的点彼此无限接近".如果我们使用一种不难想到的方法,即逐次二等分所说的区域或包含无穷多个点的它的部分区域[1]我们就能得到所要的结果,即存在这样点,在它的任何邻域内都有其他的点,也就是说,存在一个所谓的"凝聚点".但这在而且只有在我们证明了以下事实后才对,即每个无穷"和",当它的每个有限"和"都不超过一个定数时,总确定一个(有理或无理)数.与这一命题相应的几何命题也许会被认为是显然的;但是,如果我们关于函数理论的理想(在魏尔斯特拉斯那个时代,这个理想长时间被认为是合理的,甚至是部分地实现了的)是要将这一理论仅仅建立在数概念的基础之上,[2]那么这一命题就引导我们去研究像魏尔斯特拉斯所建立的那种无理数理论.关于至少存在一个凝聚点的定理是由魏尔斯特拉斯借助逐次二等分的方法给予证明的,其重要性也是他所特别强调的.

魏尔斯特拉斯在解析函数的讲座的引言中强调指出,当我们接受了整数的概念之后,算术理论就不需要更多其他假定,而能以纯逻辑的方式建立起来.他同时强调,在计数中,一一对应的概念是最基本的.但是,正是在他纯算术地引进无理数的过程中,与传统见解的重大分歧出现了.这一点可以通过考察不可通约量的发现看出.

古希腊人发现了不可通约的几何量的存在,由此逐渐认识到作为科学的算术和几何其同一性并没有逻辑的依据,这一见解可能至少部分地源于对著名的芝诺(Zena,前490—前430)论证的深入考察.解析几何事实上把几何与算术或者更恰当地说是与泛算术(arithmetia universalis)看作是同一的.而在魏尔斯特拉斯之前,无理"数"的引入总明显地或暗含地是几何的.牛顿(Newton,1642—1727)和他的大部分后继者都认为数的基础是几何.直到19世纪,柯西仍明确地采取这一立场.在1821年的《分析教程》(*Cours d'analyse*)的开头,他这样定义"极限":"当一个变量的相继取值无限地接近于一个固定的值,使得最后与这个值的距离要多小有多小,则这个固定的值就称为其他这些值的'极限'".他还指出,"因此,无理数是越来越逼近它的分数的'极限'".如果我们把上面这句话作为一个定义(当然柯西并没有这样做,虽然有很多别的人这样做了),

① 这一方法首先由B·波尔查诺(Bernhard Bolzano,1781—1848)1817年使用.

② 在拉格朗日、高斯、柯西和波尔查诺的著作中出现的分析逐渐从几何中分离出来的事实,是由日益增长的这样一种倾向造成的,这就是数学家们期望能逻辑地严格定义他们的概念并进行演绎.因而需要了解他们的概念和方法的有效性的界限究竟在哪里.然而,只有在证明了所有的纯粹数学概念(包括数的概念)都是逻辑概念这一相对现代的论点之后,把分析建立在纯算术的基础之上——如人们所说的分析的"算术化"——和逻辑的严格性之间的真正联系才能明确地和令人信服地显现出来.这个相对现代化的论点是我们必须加以研究的,它是我们正在阐述其形成过程的(超穷数)理论的最重要的结论之一.

则一个"无理"数就定义为有理数的某些和的极限,这里我们事先假定了那些和有极限,在另一场合,柯西还把一个级数 $u_0,u_1,u_2,\cdots$,当它的前 n 项和 $s_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$,随着 n 的增大无限接近一个确定的极限,称作这个级数是收敛的,然后指出:"根据上述那些原则,要想级数 $u_0,u_1,u_2,\cdots$收敛其充分必要条件是,随着 n 增大和 s_n 无限逼近一个确定的极限 s,换言之,充分必要条件是,对于无限大的 n,这些和 $s_n,s_{n+1},s_{n+2},\cdots$与 s 之差,从而它们彼此之差都是无穷小量". 因此,级数 $u_0,u_1,u_2,\cdots$收敛的充分必要条件是对于不同的 m,当 n 增大时,不同的和 $u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+m}$之间的差最终可以小于任何事先给定的数.

如果我们已知和 s_n 有一个极限 s,立即可以证明上述条件的必要性;但是它的充分性(即如果对任意给定的正有理数 ε,总可以找到一个整数 n,使得

$$|s_n-s_{n+\gamma}|<\varepsilon$$

其中 γ 是任何整数,则极限 s 存在)则要求一个定义好了的实数系,使得我们假定其存在的极限是这个实数系中的一员. 把实数定义为一个"收敛"级数的极限包含了明显的循环论证. 因为如上所述,所谓"收敛"级数指的是一个有极限的级数,如果我们不仅考虑有理的极限,这里已经包含了我们定义好了什么叫一个"实数"了.①

如果我们把满足上述条件的 $s_n,s_{n+1},\cdots$设想为一条直线的长度,则对于"直觉"来讲,似乎显然存在一个(可通约或不可通约的)"极限"长度 s;基于此,我们似乎可以把柯西的实数理论说成是几何的,但是这样一个几何的理论不能被逻辑地承认,从而魏尔斯特拉斯指出,有必要以一种不依赖于"极限"的手法来定义实数.

简要地再说一下,所有那些在魏尔斯特拉斯之前自称是算术地引入的无理数理论②都包含有如下的逻辑错误:我们从有理数系出发,定义一个有理数无穷级数的"和"(一个有理数序列的极限),然后就以这种方式上升到实数系概念. 错误在于我们忽视了这样一个事实,即有理数的无穷级数的"和"(b),只有当已经定义好了实数,并且 b 是其中之一时才有意义. 对于魏尔斯特拉斯理论的合理性,康托说:③"这一为魏尔斯特拉斯首先避免的逻辑错误早期几乎普遍未受到注意,这是由于它是一种极其少见的情形,就是说实实在在的逻辑错误

---

① 关于波尔查诺、汉克尔和斯托尔兹(Stolz,1842—1905)企图在不假定实数的算术理论的前提下算术地证明上述准则的充分性这一点,见 Oatwalas Klassiker, No. 153, pp. 42, 95, 107.

② 必须记住柯西的理论并不是这种理论之一,他并未企图算术地定义实数,只不过简单地假定了它们基于几何直觉的存在.

③ 《数学年鉴》Vol. xxi, 1883, p. 566.

却并未导致哪怕稍微重大一点的计算错误.”

因此,必须记住,无理数的算术理论一定不能用某些无穷过程的“极限”(它的存在并非总是没有问题的)来定义无理数,只有在定义了无理数之后我们才能对究竟什么情况下无穷序列能确定一个极限这个问题进行任何可能的讨论.

依魏尔斯特拉斯之见,一个数称为是“确定了的”,如果我们知道它由哪些元素组成,并且知道每个元素在其中出现几次. 考虑由主单位和无穷多个它的整除部分组成的数,魏尔斯特拉斯称任何一个集合,当其中的元素和元素出现的(有穷)次数已知时,①为一个(确定了的)“数量”(Zahlengrosse). 一个由有穷多个元素组成的集合被认为就等于它所包含的元素之和;两个具有有穷多个元素的集合被认为相等,如果它们所包含的元素之和相等.

有理数 r 称为包含在数量 a 中,如果我们能够从 a 中分离出一个与 r 相等的集合. 如果能够指定一个有理数 R,使得每个包含在数量 a 中的有理数都小于 R,则我们说数量 a 是“有穷的”.“两个数量 a 和 b 称为是相等的”,如果每个包含在 a 中的有理数都包含在 b 中,并且反过来也对. 当 a 和 b 不相等时,则至少存在一个有理数或者包含在 a 里,但不包含在 b 里,或者反过来. 在第一种情况下,我们说,a“大于”b;在第二种情形下,我们则说 a“小于”b.

魏尔斯特拉斯称如下集合确定的数量 c 为 a 和 b 的“和”:集合由在 a 中或 b 中出现的那些元素组成,每个元素在 c 中出现的次数是它在 a 中出现的次数加上在 b 中出现的次数. a 和 b 的“乘积”定义为这样的数量:它是由 a 中每个元素和 b 中每个元素以所有可能的方式相乘所得的元素构成的集合确定的,同样方式可以定义任意有穷多个数量的乘积.

无穷多个数量 $a,b,\cdots$ 的“和”定义为集合(s),它的元素(至少)出现在 a,$b,\cdots$ 之一中,这些元素每一个出现的次数(n),等于它在 a 中出现的次数加上它在 b 中出现的次数,等. 要想(s)是有穷的和确定的,其必要条件是它的每个元素只出现有穷次;其充分必要条件是我们能够指定一个数 N,使得任意有穷多个数量 $a,b,\cdots$ 的和小于 N.

这些就是魏尔斯特拉斯实数理论的主要之点,我们应该认识到,对魏尔斯特拉斯来说,这些新数是过去已有了明确定义的数的集合. 这个反复出现在大部分教科书中的观点有着显著的优越之处,这是罗素首先给予充分强调的. 其优越之处在于,在这个理论中极限的存在性是可以证明的. 也就是说,可以通过具体构造来证实确有一个数,它是满足“有穷性”即“收敛性”条件的某个级数的极限. 如果实数不是通过恰当的定义来引入,而是我们头脑的自由创造,或者

① 它并不意味元素个数是有穷的.