21世纪高职高专新概念规划教材

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　牛　莉
副主编　张翠莲　翟秀娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高职高专新概念规划教材

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　牛　莉

副主编　张翠莲　翟秀娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书在第一版的基础上，根据编者近几年的教学改革实践，并结合各兄弟院校使用本教材的反馈意见，按照最新教学大纲要求，对个别章节内容、例题以及习题做了相应的修订，使教师教学、学生自学更为方便。

本书重点介绍概率论的基本知识和常用的数理统计方法。全书共分 6 章，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步、方差分析与回归分析。每章末附有本章小结、习题与自测题。书末附有常用分布数值表、习题与自测题参考答案。

本书带有“*”号部分内容可根据不同专业选用。全书叙述简明，力求通俗易懂，淡化理论推导，便于自学，可作为高职高专院校文、理科各专业的教材，也可供高等师范学校非数学专业的学生使用。

本书为授课教师免费提供电子教案，此教案用 PowerPoint 制作，可以任意修改。读者可以从中国水利水电出版社网站以及万水书苑下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/或 http://www.wsbookshow.com。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 牛莉主编. -- 2版. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2012.6
21世纪高职高专新概念规划教材
ISBN 978-7-5084-9721-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①牛… Ⅲ. ①概率论—高等职业教育—教材②数理统计—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第094559号

策划编辑：雷顺加　责任编辑：李　炎　加工编辑：郭　赏　封面设计：李　佳

书　名	21世纪高职高专新概念规划教材 **概率论与数理统计（第二版）**
作　者	主　编　牛　莉　副主编　张翠莲　翟秀娜
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京蓝空印刷厂
规　格	184mm×260mm　16 开本　11.75 印张　287 千字
版　次	2006 年 3 月第 1 版　2006 年 3 月第 1 次印刷 2012 年 6 月第 2 版　2012 年 6 月第 1 次印刷
印　数	0001—4000 册
定　价	20.00 元

序

根据1999年8月教育部高教司制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》）的精神，由中国水利水电出版社北京万水电子信息有限公司精心策划，聘请我国长期从事高职高专教学、有丰富教学经验的教师执笔，在充分汲取了高职高专和成人高等学校在探索培养技术应用性人才方面取得的成功经验和教学成果的基础上，撰写了此套《21世纪高职高专新概念规划教材》。

为了编写本套教材，出版社进行了广泛的调研，走访了全国百余所具有代表性的高等专科学校、高等职业技术学院、成人教育高等院校以及本科院校举办的二级职业技术学院，在广泛了解情况、探讨课程设置、研究课程体系的基础上，经过学校申报、征求意见、专家评选等方式，确定了本套书的主编，并成立了编委会。每本书的编委会聘请了多所学校主要学术带头人或主要从事该课程教学的骨干，教学大纲的确定以及教材风格的定位均经过编委会多次认真讨论。

本套《21世纪高职高专新概念规划教材》有如下特点：

（1）面向21世纪人才培养的需求，结合高职高专学生的培养特点，具有鲜明的高职高专特色。本套教材的作者都是长期在第一线从事高职高专教育的骨干教师，对学生的基本情况、特点和认识规律等有深入的了解，在教学实践中积累了丰富的经验。因此可以说，每一本书都是教师们长期教学经验的总结。

（2）以《基本要求》和《培养规格》为编写依据，内容全面，结构合理，文字简练，实用性强。在编写过程中，作者严格依据教育部提出的高职高专教育“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，力求从实际应用的需要（实例）出发，尽量减少枯燥、实用性不强的理论概念，加强了应用性和实际操作性强的内容。

（3）采用“问题（任务）驱动”的编写方式，引入案例教学和启发式教学方法，便于激发学习兴趣。本套书的编写思路与传统教材的编写思路不同：先提出问题，然后介绍解决问题的方法，最后归纳总结出一般规律或概念。我们把这个新的编写原则比喻成“一棵大树、问题驱动”的原则。即：一方面遵守先见（构建）“树”（每本书就是一棵大树），再见（构建）“枝”（书的每一章就是大树的一个分枝），最后见（构建）“叶”（每章中的若干小节及知识点）的编写原则；另一方面采用问题驱动方式，每一章都尽量用实际中的典型实例开头（提出问题、明确目标），然后逐渐展开（分析解决问题），在讲述实例的过程中将本章的知识点融入。这种精选实例，并将知识点融于实例中的编写方式，可读性、可操作性强，非常适合高职高专的学生阅读和使用。本书读者通过学习构建本书中的“树”，由“树”找“枝”，顺“枝”摸“叶”，最后达到构建自己所需要的“树”的目的。

（4）部分教材配有实验指导和实训教程，便于学生练习提高。

（5）部分教材配有动感电子教案。为顺应教育部提出的教材多元化、多媒体化发展的要

求，大部分教材都配有电子教案，以满足广大教师进行多媒体教学的需要。电子教案用PowerPoint制作，教师可根据授课情况任意修改。相关教案的具体情况请到中国水利水电出版社网站www.waterpub.com.cn下载。

（6）提供相关教材中所有程序的源代码，方便教师直接切换到系统环境中教学，提高教学效果。

总之，本套教材凝聚了数百名高职高专一线教师多年的教学经验和智慧，内容新颖，结构完整，概念清晰，深入浅出，通俗易懂，可读性、可操作性和实用性强。

本套教材适用于高等职业学校、高等专科学校、成人及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校。

新的世纪吹响了我国高职高专教育蓬勃发展的号角，新世纪对高职教育提出了新的要求，高职教育占据了全面素质教育中所不可缺少的地位，在我国高等教育事业中占有极其重要的位置，在我国社会主义现代化建设事业中发挥着日趋显著的作用，是培养新世纪人才所不可缺少的力量。相信本套《21 世纪高职高专新概念规划教材》的出版能为高职高专的教材建设和教学改革略尽绵薄之力，因为我们提供的不仅是一套教材，更是自始至终的教育支持，无论是学校、机构培训还是个人自学，都会从中得到极大的收获。

当然，本套教材肯定会有不足之处，恳请专家和读者批评指正。

21 世纪高职高专新概念规划教材编委会

2001 年 3 月

第二版前言

本书在第一版的基础上，根据我们近几年的教学改革实践，并结合各兄弟院校使用本教材的反馈意见，按照最新教学大纲要求，对个别章节内容、例题以及习题做了相应的修订，使教师教学、学生自学更为方便。

负责本教材修订工作的有牛莉、张翠莲、翟秀娜，仍由牛莉担任主编，张翠莲、翟秀娜担任副主编。各章编写人员分工如下：绪论、第1章、第2章、第5章由牛莉编写，第3章、第4章由张翠莲编写，第6章由翟秀娜编写，参加本书部分章节编写的还有何春江、毕亚军、曾大友、张文治、张钦礼、张京轩、毕晓华、邓凤茹、赵艳、王晓威、张斌、李一夫、赵悦、史建芳、陈磊等。

兄弟院校的同行以及部分读者，对本书的修订工作提出了许多宝贵意见和建议，对此，我们对关心本教材修订工作的专家、同行及热心读者表示衷心的谢意。同时，我们对使用本书的兄弟院校也表示感谢！

欢迎广大专家、同行及读者继续对书中存在的不足给予批评指正。

编　者

2012年3月

第一版前言

本书根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》的要求，严格依据教育部提出的高职高专教育“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，结合多年的教学实践和体会，广泛汲取各版本教材改革之所长，并兼顾高职高专教学及本学科自身特点而编写的。

“概率论与数理统计”是高等院校各专业普通开设的一门重要的基础课程，也是学生首次接触的用数学方法以研究随机现象的统计规律为主的一门数学分支，其理论严谨，应用广泛，发展迅速。也正是因为它具有自己独特的概念和逻辑思维方法，使得初学者常常感到困惑和茫然。其原因诸多，一是从过去研究“确定性现象”转到研究“随机现象”需要有一个适应的过程；二是本课程所涉猎的应用领域极其广泛，又与其他数学分支有着密切的联系，而所涉及的数学工具如排列、组合、集合及其运算、分段函数、广义积分等又是初学者容易忽视或不被重视的内容；三是本内容概念较多，甚至有些概念彼此相近，容易混淆，加之目前大多院校面临着教学内容多、学时少以及教学要求不断提高的状况，使得很多学生很难掌握其基本理论，更谈不上应用了。所以本书对教材内容及结构方面做了必要的调整，使内容更紧凑、系统性更强，在编写过程中力求做到由浅入深，语言简练，通俗易懂，便于教师教学和学生自学。但也不失对基本理论的要求，这样可为学生进一步学习概率统计更高一级的课程打下必要而扎实的基础。另外，本书还大量引用了应用于各个领域的随机现象的实际例题，特别是有典型应用价值的例题，以体现本书的实用性特点。

本书参考学时为 58 学时，其中带“*”号部分内容可根据专业的不同需求酌情删减。本书每章都有学习目标、小结，对所学知识进行简单归纳和整理，便于学生复习与提高；每章都配有适量习题及自测题，便于学生复习巩固，提高学习质量；书末附有习题和自测题的提示及答案。

全书共分 6 章，主要介绍随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步、方差分析与回归分析。

本书由牛莉任主编，张翠莲、翟秀娜任副主编，各章主要编写人员分工如下：第 1 章、第 2 章、第 5 章由牛莉编写，第 3 章、第 4 章由张翠莲编写，第 6 章由翟秀娜编写，参加本书部分章节编写的还有何春江、毕亚军、曾大友、张文治、张钦礼、张京轩、邓凤茹、王晓威、王明研、赵艳、张斌、李一夫、赵悦、史建芳、陈磊等。

本书的问世得到了系领导及同行们的热情关心与大力支持，编写过程中参阅了大量书籍，引用了一些典型例子等，恕不一一指明出处及相关作者，在此一并向他们表示衷心的感谢！

鉴于编者水平有限，疏漏与不当之处在所难免，恳切希望同行及学生给予批评指正。

编　者

2006 年 1 月

目　录

绪论　概率论与数理统计发展简介

一、概率论发展简史

1. 20 世纪以前的概率论

概率论起源于博弈问题．15～16 世纪，意大利数学家帕乔利（L.Pacioli，1445～1517）、塔塔利亚（N.Tartaglia，1499～1557）和卡尔丹（G.cardano，1501～1576）的著作中都曾讨论过两人赌博的赌金分配等概率问题．1657 年，荷兰数学家惠更斯（C.Huygens，1629～1695）发表了《论赌博中的计算》，这是最早的概率论著作．这些数学家的著述中所出现的第一批概率论概念与定理，标志着概率论的诞生．而概率论作为一门独立的数学分支，真正的奠基人是雅格布•伯努利（Jacob Bernoulli，1654～1705）．他在遗著《猜度术》中首次提出了后来以“伯努利定理”著称的极限定理，在概率论发展史上占有重要地位．

伯努利之后，法国数学家棣莫弗（A.de Moivre，1667～1754）对概率论又作了巨大推进，他提出了概率乘法法则、正态分布和正态分布率的概念，并给出了概率论的一些重要结果．之后法国数学家蒲丰（C.de Buffon，1707～1788）提出了著名的“蒲丰问题”，引进了几何概率．另外，拉普拉斯、高斯和泊松（S.D.Poisson，1781～1840）等对概率论做出了进一步奠基性工作．特别是拉普拉斯，他是严密的、系统的科学概率论的最卓越的创建者，在 1812 年出版的《概率的分析理论》中，拉普拉斯以强有力的分析工具处理了概率论的基本内容，实现了从组合技巧向分析方法的过渡，使以往零散的结果系统化，开辟了概率论发展的新时期．泊松则推广了大数定理，提出了著名的泊松分布．

19 世纪后期，极限理论的发展成为概率论研究的中心课题，俄国数学家切比雪夫对此做出了重要贡献．他建立了关于独立随机变量序列的大数定律，推广了棣莫弗—拉普拉斯的极限定理．切比雪夫的成果后被其学生马尔可夫发扬光大，影响了 20 世纪概率论发展的进程．

19 世纪末，一方面概率论在统计物理等领域的应用提出了对概率论基本概念与原理进行解释的需要，另一方面，科学家们在这一时期发现的一些概率论悖论也揭示出古典概率论中基本概念存在的矛盾与含糊之处．这些问题却强烈要求对概率论的逻辑基础做出更加严格的考察．

2. 概率论的公理化

俄国数学家伯恩斯坦和奥地利数学家冯•米西斯（R.von Mises，1883～1953）对概率论的严格化做了最早的尝试．但他们提出的公理理论并不完善．事实上，真正严格的公理化概率论只有在测度论和实变函数理论的基础上才可能建立．测度论的奠基人，法国数学家博雷尔（E.Borel，1781～1956）首先将测度论方法引入概率论重要问题的研究，并且他的工作激起了数学家们沿着这一崭新方向的一系列搜索．特别是前苏联数学家科尔莫戈罗夫的工作最为卓著．他在 1926 年推倒了弱大数定律成立的充分必要条件．后又对博雷尔提出的强大数定律问题给出了最一般的结果，从而解决了概率论的中心课题之一——大数定律，成为以测度论为基础的概率论公理化的前奏．

1933 年，科尔莫戈罗夫出版了他的著作《概率论基础》，这是概率论的一部经典性著作．其

中，科尔莫戈罗夫给出了公理化概率论的一系列基本概念，提出了六条公理，整个概率论大厦可以从这六条公理出发建筑起来. 科尔莫戈罗夫的公理体系逐渐得到数学家们的普遍认可. 由于公理化，概率论成为一门严格的演绎科学，并通过集合论与其他数学分支密切地联系着. 科尔莫戈罗夫是 20 世纪最杰出的数学家之一，他不仅是公理化概率论的建立者，在数学和力学的众多领域都做出了开创或奠基性的贡献，同时，他还是出色的教育家. 由于概率论等其他许多领域的杰出贡献，科尔莫戈罗夫荣获 1980 年的沃尔夫奖.

3. 进一步的发展

在公理化基础上，现代概率论取得了一系列理论突破. 公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点. 1931 年，科尔莫戈罗夫用分析的方法奠定了一类普通的随机过程——马尔可夫过程的理论基础.

科尔莫戈罗夫之后，对随机过程的研究做出重大贡献而影响着整个现代概率论的重要代表人物有莱维（P.Levy，1886～1971）、辛钦、杜布（J.L.Dob）和伊藤清等. 1948 年莱维出版的著作《随机过程与布朗运动》提出了独立增量过程的一般理论，并以此为基础极大地推进了作为一类特殊马尔可夫过程的布朗运动的研究. 1934 年，辛钦提出平稳过程的相关理论. 1939 年，维尔（J.Ville）引进“鞅”的概念，1950 年起，杜布对鞅概念进行了系统的研究而使鞅论成为一门独立的分支. 从 1942 年开始，日本数学家伊藤清引进了随机积分与随机微分方程，不仅开辟了随机过程研究的新道路，而且为随机分析这门数学新分支的创立和发展奠定了基础.

像任何一门公理化的数学分支一样，公理化的概率论的应用范围被大大拓广.

二、数理统计发展简史

在 18、19 世纪就出现了统计推断思想的萌芽并有了一定发展，但以概率论为基础、以统计推断为主要内容的现代意义上的数理统计学，则到 20 世纪才告成熟.

1763 年，自学成材的英国数学家贝叶斯（T.Bayes，1702～1761）给出的“贝叶斯定理”（贝叶斯公式）可以看作是一种最早的统计推断程序，在现代概率论和数理统计中仍有重要作用. 拉普拉斯和高斯等人利用贝叶斯公式进行参数估计，高斯由于计算行星轨道的需要而建立了以“最小二乘法”为基础的误差分析. 这些都促使统计学摆脱对观测数据的单纯描述而向强调推断的阶段过渡.

英国统计学家 K• 皮尔逊对现代数理统计的建立起了重要作用. 他在 19 世纪末、20 世纪初发展了他的老师高尔顿首先提出的“相关”与“回归”的理论，成功地建立了生物统计学. 皮尔逊明确指出统计学不是研究样本本身，而是要根据样本对总体进行推断，并据此提出了“拟合优度检验”. 皮尔逊的工作是所谓“大样本统计”的前驱，他的学生戈塞特（S.Gosset）1908 年发表的“学生分布”著述则开创了小样本统计理论，从而使统计学研究对象从群体现象转变为随机现象.

现代数理统计学作为一门独立学科的奠基人是英国数学家费希尔（R.A.Fisher，1890～1962）. 20 世纪 20 和 30 年代，费希尔提出了许多重要的统计方法，开辟了一系列的统计学的分支领域. 他发展了正态总体下的各种统计量的抽样分布，将已有的相关、回归理论建造为系统的相关分析和回归分析. 1923 年，费希尔提出了方差分析这一重要的数据分析方法. 1925 年，他与叶茨合作创立了试验设计这一重要的统计分支，他还是假设检验和多元统计分析等重要统计分支的先驱. 费希尔做过中学教员，曾长期在农业试验站工作，并致力于数理统计在农

业科学和遗传学中的应用．在 20 世纪 20～50 年代，费希尔是数理统计学研究的中心人物．

1928 年，维夏特（J.Wishart）将费希尔的狭义的多员分析发展为统计学中的一个独立分支．中国数学家许宝禄和美国数学家霍太林（H.Hotelling）也是多元统计分析的奠基人．

1946 年，瑞典数学家克拉默（H.Cramer）的著作《统计学的数学方法》，用测度论系统总结了数理统计的发展，标志着现代数理统计学的成熟．

第二次世界大战期间，数理统计学的研究出现了一些重要的动向，这些新的动向在很大程度上决定了战后数理统计学的发展方向．其中最有影响的是沃尔德（A.Wald，1902～1950）提出的序贯分析和统计决策理论．

序贯分析的主旨是以“序贯抽样方案”代替统计推断中的传统的固定抽样方案．为了解决二战中军方提出的实际问题，沃尔德提出序贯分析这一崭新的统计方法．1947 年，沃尔德发表了《序贯分析》专著，使序贯分析在战后发展为数理统计中的一个重要分支．

1950 年，沃尔德出版了著作《统计决策函数》．他的统计决策理论用博弈的观点看待数理统计问题，对于推断所获得的论断会产生什么后果，应采取何种对策或行动等这些不属于经典统计的内容，统计决策理论也将其纳入统计的范畴．沃尔德的思想方法对 20 世纪下半叶整个数理统计学的发展有着重要影响．

数理统计在近些年来有所发展，但理论上突破不大，最引人注目的是它的普及和广泛的应用．它几乎渗透到一切学科之中，哪里有试验，哪里有数据，哪里就少不了数理统计．它已成为现代最基本的工具之一，没有数理统计就无法应付大量的数据和信息．数理统计还将为社会的进步作出更大贡献．

第1章　随机事件及其概率

本章学习目标

- 了解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算
- 理解概率的统计定义和古典定义，掌握概率的加法法则
- 掌握条件概率的概念，掌握乘法公式、全概率公式
- 理解事件的独立性的定义，掌握独立试验序列概型的计算

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与随机事件

1．随机现象

自然界与人类社会所能观察到的现象多种多样，若从结果能否预测的角度来分，大致可分为两类，即确定性现象和非确定性现象——**随机现象**.

确定性现象　在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称为确定性现象．例如，水在标准大气压下加热到100℃必然沸腾；上抛的石子必然落下；同性电荷必然互斥；函数在间断点处不存在导数等都为确定性现象.

确定性现象的特征：条件完全决定结果.

随机现象（偶然现象）　在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象．例如，在相同条件下掷一枚均匀的硬币，落地后可能正面（指币值面）朝上，也可能反面朝上；用同一门炮向同一目标发射多发同一种炮弹，弹着点会各不相同；抛掷一枚质地均匀的骰子，观察出现的点数；出生的婴儿可能是男，也可能是女；明天的天气可能是晴，也可能是多云或雨；过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯；从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一件产品，可能抽到正品，也可能抽到次品等都为随机现象.

随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2．随机试验

在概率论中，把具有以下三个特征的试验称为随机试验.

（1）可以在相同条件下重复地进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但一次试验中必有且仅有其中一个结果出现.

我们将通过随机试验来研究随机现象，随机试验又可简称为试验[①]，通常用字母 E 表示，例如：

E_1：抛一枚质地均匀的硬币，观察出现正面还是反面；

E_2：掷一枚质地均匀的骰子，观察出现的点数；

E_3：从一批产品中任取三件，记录出现正品的件数；

E_4：记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数；

E_5：射击一目标，直到击中为止，记录射击次数；

E_6：从一批灯泡中任取一只，测试其寿命.

人们在长期实践中发现，尽管对随机现象所进行的个别试验，其结果呈不确定性. 但在大量重复试验中，其结果却呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛一枚质地均匀的硬币，出现正面和反面的次数之比大约为 1:1；查看各国人口统计资料，就会发现新生婴儿中，男女比例基本持平. 在大量重复试验中所呈现出的这种规律性，称为统计规律性. 统计规律是随机现象本身所固有的，它是不依人们的意愿而改变的，概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 我们学习概率论与数理统计，就是为了揭示并利用这种规律性，它的应用几乎遍及所有的科学领域. 例如，天气预报、地震预报、产品的抽样调查，在通信工程中可用以提高信号的抗干扰性、分辨率等.

3. 随机事件与样本空间

随机事件 随机试验的一种结果称为该随机试验的随机事件，简称为事件，通常用字母 A、B、C 等表示.

例如，试验 E_2 中（即掷一颗骰子的试验），“出现偶数点”、“出现奇数点”、“出现 i 点”（i=1，2，3，4，5，6）等都是随机事件.

再例如，试验 E_6 中（即测试灯泡寿命的试验），“所取灯泡的寿命不超过 200 小时”、“所取灯泡的寿命超过 500 小时”等都是随机事件.

概率论与数理统计是通过随机试验中的随机事件来研究随机现象的.

基本事件（样本点） 随机试验中的每一基本结果，称为该随机试验的基本事件，或称为样本点，记为 ω.

样本空间 基本事件的全体，称为试验 E 的样本空间，记为 Ω.

例如，试验 E_1 中，基本结果有两个：正面朝上（币值面朝上），反面朝上（国徽面朝上），即有两个样本点，样本空间为

$$\Omega_1=\{正，反\}；$$

试验 E_2 中，基本结果有六个：“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”，分别用 1，2，3，4，5，6 表示，即有六个样本点，样本空间为

$$\Omega_2=\{1，2，3，4，5，6\}；$$

试验 E_3 的样本空间为 $\Omega_3=\{0，1，2，3\}$；

试验 E_4 的样本空间为 $\Omega_4=\{0，1，2，\cdots\}$；

①试验是一个广泛的术语. 它包括各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.

试验 E_5 的样本空间为 $\Omega_5=\{1, 2, \cdots\}$；

试验 E_6 的样本空间为 $\Omega_6=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

样本空间可分为两种类型：

（1）有限样本空间：样本空间中的样本点数是有限的，如 Ω_1、Ω_2、Ω_3；

（2）无限样本空间：样本空间中的样本点数是无限的，如 Ω_4、Ω_5、Ω_6.

无限样本空间又可分为①可列样本空间，如 Ω_4、Ω_5；②不可列样本空间，如 Ω_6.

由此可见，随机事件是由一个或多个样本点组成的，所以随机事件是样本空间 Ω 的某个子集.

随机事件可以分为以下几种类型：

基本事件 只含一个样本点的随机事件为基本事件. 例如，E_2 中“出现 1 点”,“出现 2 点”，…，“出现 6 点”，都是基本事件.

复合事件 由两个或两个以上的样本点组成的事件为复合事件，例如，E_2 中“点数小于 5”、“点数为偶数”，都是复合事件.

必然事件 由全体样本点组成的事件，在每次试验中必然发生的，称为必然事件，也用 Ω 表示. 例如，E_2 中“点数小于 7”就是必然事件.

不可能事件 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中决不会发生的，称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

必然事件与不可能事件并不是随机事件，为了讨论问题的方便，将它们归入随机事件，可作为随机事件的两个极端情况. 必然事件可理解为样本空间本身，不可能事件可理解为空集.

4. 随机事件的发生

因为随机事件是样本空间 Ω 的子集，所以随机事件发生，当且仅当随机事件所包含的样本点之一在试验中出现.

例如，在试验 E_2 中，设事件 $A=$“朝上的那一面的点数为奇数”$=\{1, 3, 5\}$，若试验中 3 出现，即朝上的那一面的点数是 3，则称事件 A 发生；反之，若事件 A 发生，则意味着 1，3，5 之一必然出现. 总之，随机事件是“一触即发”.

1.1.2 事件之间的关系及运算

由于随机事件都是样本空间的子集，下面根据集合的关系和运算，讨论事件的关系和运算，并设试验 E 的样本空间为 Ω. A、B、A_k、B_k（k=1，2，…）为 E 中事件.

一、事件的运算

1. 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生就发生的事件，即 A 与 B 的样本点合在一起组成的事件，称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$（如图 1.1 中阴影部分所示）.

根据定义，显然有 $A+A=A$.

类似地，事件 A_k（k=1，2，…，n）中至少有一个发生就发生的事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 或 $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

例 1 设试验 E 为掷一颗骰子，ω_k（$k=1, 2, 3, 4, 5, 6$）表示出现 k 点，令 A 表示出现奇数

点事件，则 $A=\omega_1+\omega_3+\omega_5$，即出现奇数点事件是出现 k（$k=1,3,5$）点这三个事件的和事件.

2．事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，即属于 A 而不属于 B 的样本点所组成的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$（如图 1.2 所示）.

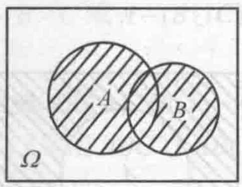

图 1.1

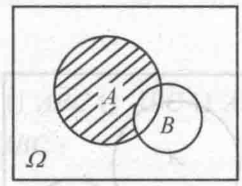

图 1.2

例 2　设试验 E 为检查一长方形工件是否合格，令 A 表示长度合格，B 表示宽度合格，A_1 表示仅仅长度合格，则 $A_1=A-B$.

3．事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生时才发生的事件，即 A 与 B 的公共样本点所组成的事件，称为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB（如图 1.3 所示）.

在例 2 中，若令 A_2 表示产品合格，则 $A_2=AB$.

类似地，只有事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生才发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

显然有 $AA\cdots A=A$.

二、事件的关系

1．包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 的样本点都在 B 中，则称事件 A 包含于 B 或 B 包含 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$（如图 1.4 所示）.

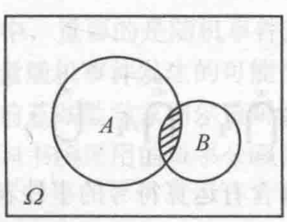

图 1.3

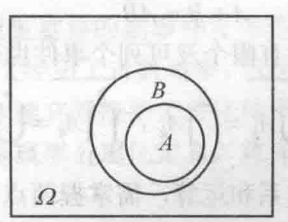

图 1.4

例 1 中的 A 与 ω_k（$k=1,3,5$）之间的关系为 $A\supset\omega_k$.

2．相等

若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

3．互斥

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互斥的或互不相容（如图 1.5 所示）.

例如，在例 1 中，令 B 表示出现偶数点，则 A 与 B 是互斥的.

注：基本事件是两两互斥的.

4．互逆

如果在一次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个且仅有一个发生，即 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互为逆事件，或称 A 与 B 是对立事件，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$（如图 1.6 所示）. 显然，$\overline{A}=\Omega-A$.

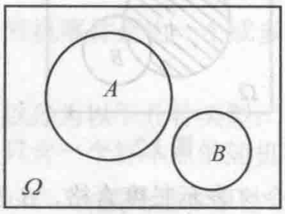

图 1.5

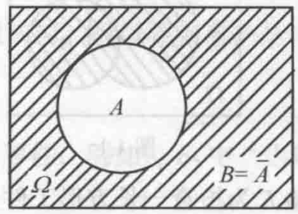

图 1.6

由定义可知，对立事件必为互斥事件，其逆不真，即互斥事件不一定是对立事件.

三、事件的运算规律

1．加法和乘法的交换律

$A+B=B+A$，$AB=BA$

2．加法和乘法的结合律

$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$

$ABC=(AB)C=A(BC)$

3．乘法对加法的分配律

$A(B+C)=AB+AC$

4．加法对乘法的分配律

$A+BC=(A+B)(A+C)$

5．反演律（德・摩根（De Morgan）律）

$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$

一般地，对有限个及可列个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k \text{ 及 } \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

由事件的关系和运算，需掌握两点：①能够解释含有运算符号的事件表达式；②对于给定的事件可以通过运算符号用其他事件表示出来.

例 3　设 A、B、C 表示三个事件，试将下列事件用 A、B、C 的运算式表示出来.

（1）A、B 都发生，而 C 不发生；

（2）A 发生，B、C 不发生；

（3）三个事件都发生；

（4）三个事件中至少有一个发生；

（5）三个事件中至少有两个发生；

（6）三个事件都不发生；

（7）三个事件中不多于一个事件发生；