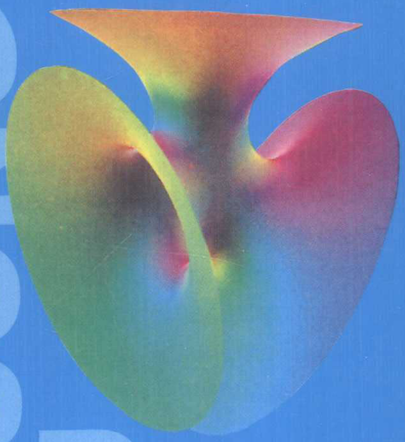
数学奥林匹克小丛书

初中卷 8

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU



# 面积与面积方法

田廷彦 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 8

# 面积与面积方法

linpike Xiao Congshu

田廷彦 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．面积与面积方法／田廷彦编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4168-5

I.数...　II.田...　III.数学课-初中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019476号

数学奥林匹克小丛书·初中卷
面积与面积方法

编　　著　田廷彦
策划组稿　倪　明
责任编辑　孙　婷
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960　16开
印　　张　8
字　　数　141千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001－16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4168-5/G·2393
定　　价　10.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021－62865537联系）

# 数学奥林匹克小丛书

| | |
|---|---|
| **冯志刚** | 第44届IMO中国队副领队<br>上海中学特级教师 |
| **葛　军** | 中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任<br>南京师范大学副教授 |
| **冷岗松** | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>上海大学教授、博士生导师 |
| **李胜宏** | 第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员<br>浙江大学教授、博士生导师 |
| **李伟固** | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>北京大学教授、博士生导师 |
| **刘诗雄** | 中国数学奥林匹克委员会委员<br>武钢三中校长、特级教师 |
| **倪　明** | 数学奥林匹克小丛书总策划<br>华东师范大学出版社副总编辑 |
| **单　墫** | 第30、31届IMO中国队领队<br>南京师范大学教授、博士生导师 |
| **吴建平** | 中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席<br>第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编 |
| **熊　斌** | 第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员<br>华东师范大学副教授 |
| **余红兵** | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>苏州大学教授、博士生导师 |
| **朱华伟** | 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练<br>广州大学软件所常务副所长、研究员 |

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

# 总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率.这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J.W.Milnor)、芒福德(D.B.Mumford)、奎伦(D.Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A.Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L.Fejér)、里斯(M.Riesz)、舍贵(G.Szegö)、哈尔(A.Haar)、拉多(T.Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

# 前言

平面几何是奥数中内容丰富、特色鲜明的一大板块.笔者在学习平面几何前后对数学的看法截然不同,想必许多读者也有同感.数学最本质的特点是演绎推理的严密性和清晰性.可以说,提高数学修养,几何是第一关.

由于数学对立论的要求比其他任何学科都要高,而且数千年来已发展成一门博大精深的学问,其学术壁垒之深,根本是其他学科难以望其项背的.绝大多数人学了十几年的数学,可以说是毫无感觉,最多会做简单运算而已.即使是奥数高手,若将数学看成是单纯地玩弄技巧或智力游戏,也是相当错误的.就拿平面几何来说,它之所以那么有生命力,除了率先建立严密的演绎公理体系,更不能忽略由此发展出的许多方法,我们耳熟能详的有:综合法、分析法、反证法、同一法等,还有几何变换,不一而足.至今,数学与其他学科仍在"享用"这些极其卓越的创造.H·G·弗德说得好,谁看不起欧氏几何,谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡.

尽管学好几何是不太容易的,但并非先天因素决定了一切,而是依然符合"熟能生巧"的规律:知道的几何命题或方法越多,经验就越丰富,就越有利于解题,也越能提高自己的数学修养.综合法、反证法之类属于方法论范畴,并不专门针对几何.那么,几何中特别的方法是什么呢?几何变换当然算得上,笔者认为还有就是面积方法了.对这个方法怎么强调都不过分.数学、物理学告诉我们,最有价值的量往往是一些在一定条件下保持不变的量.物理中的能量、动量就是这样的量,称为守恒量;而数学中则习惯称为不变量.三角形面积就是几何中最基本的不变量之一,因为三条边及对应高的乘积都是一样的.说到这儿,你就该明白,真正重要的是这个不变性,而不是面积本身的含义.仔细想想,所有面积方法几乎都涉及到对三角形面积算两次,这不正是面积不变性的体现吗?尤其值得一提的是,我们可以通过三角形面积算两次的方法建立平行线分线段成比例定理,进而建立相似的概念.所以,所谓的面积方法其实是与相似紧紧联系在一起的.然而有点遗憾的

是，人们能够理解相似，但对于面积却往往强调它的定义而忽视了它的不变性，也没有深刻认识到面积是比相似更基本的东西. 比如，若不用面积方法，平行线分线段成比例定理就很难说清楚，要引进高等数学中的极限概念才能得以证明.

这本小册子就是专门讲面积与面积方法的，其中既有经典的问题，也有杂题，反映了当前流行的一些奥数题型及笔者多年积累的解题经验. 当然，值得深入探讨下去的，还有很多很多.

叶中豪先生为本书提供了丰富的资料，其中有几个结论是中豪本人发现的，书中均已一一注明.

2004 年 10 月 12 日，笔者将初稿交至出版社倪明先生手中. 就在当天，笔者的奥数启蒙导师、华东师大一附中的徐惠芳老师不幸病逝. 早在 20 年前，徐老师就得知自己患上了癌症，但她依然把全部精力投入到教育工作中，培养了一大批数学竞赛的优胜者，包括上海市的第一名、全国的一等奖乃至 IMO 奖牌获得者. 我一直在想，世上绝大多数人是不可能成为伟人、名人的，更何况徐老师又十分淡泊名利. 现在，徐老师 63 岁的短暂一生已经走完，但她人格的魅力却留在我们这些学生的心中. 这就已经足够.



作　者

2005. 1. 2

# 目　录

# 0 几何题究竟是怎样证明的

几何题究竟该如何着手证明，特别是复杂点的、奥数级别的几何题该如何对付？这一课题古今中外的探讨多得无从统计. 随着奥数的普及和深入，以及数学机械化的发展，几何问题一定会不断地受到大家的重视.

作者以为，证明几何题固然要求较高的技巧，但决非无章可循. 这里以面积问题为例，列举出若干条基本思路.

## 0.1 简化图形原则

这个问题需作如下理解：在证明几何题之前，你面对的是文字叙述与几何图形，注意一般来说重要的是图形，而不是式子. 希望在正式写出证明之前，能够不断将图形简单化，如去除某些线段等. 在这个过程中，待证式也在不断改变，且往往在形式上比原来的要来得复杂，但这不要紧，无论如何你是在朝答案的方向努力.

我国数学家张景中等在几何定理的机器证明方面做了出色的工作，其主要想法是所谓的“消点法”，与这里所说的不断简化图形以寻找从结论到题设的一条退路的方法应该比较一致. 特别是，消点法的基本手段就是利用面积！

需要说明的是，这个简化图形的过程属分析法，但说得更加具体些、可操作性更强一些，也可以称作“找退路原则”或“元素分析法”. 希望同学们解几何题时也能养成这种习惯.

**例 1** 如图 0－1，等腰梯形 $ABCD$ 的腰长为上、下底的比例中项，点 $E$ 在上底 $AD$ 上，点 $F$ 在腰 $CD$ 上，若 $\frac{AE}{CF}=\sqrt{\frac{BC}{AD}}$，求证：$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBF}$.

**证明** 由于 $\angle A+\angle C=180^\circ$，故欲证式可变成

$$AB\cdot AE=BC\cdot CF,$$

进一步可化为 $$\frac{AE}{CF}=\frac{BC}{AB}.$$

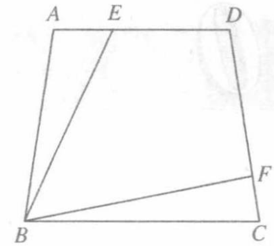


图 0-1

于是问题归结为证明

$$\frac{BC}{AB}=\sqrt{\frac{BC}{AD}},$$

即 $$AB^2=AD\cdot BC,$$

证毕.

**评注** 这是一个比较简单的例子,第一步就简化了图形,即 $BE$、$BF$ 不需要了.

**例 2** 如图 0-2, $AC\perp AF$, $BC\perp BE$, $BD\perp BF$, $BM$ 与 $BN$ 分别是 $\triangle BCD$ 与 $\triangle BEF$ 的高,点 $H_1$ 与 $H_2$ 分别为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle BEF$ 的垂心,求证: $H_1H_2$ 被 $AB$ 平分.

**证明** $H_1H_2$ 与 $AB$ 的交点也不必标出了,无非就是证明 $S_{\triangle AH_1B}=S_{\triangle AH_2B}$,这可以转化为求证

$$AM\cdot BH_1=AN\cdot BH_2$$

或 $$\frac{AM}{AN}=\frac{BH_2}{BH_1}.$$

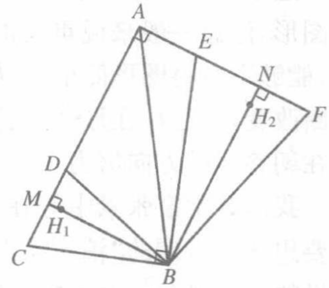


图 0-2

很容易看出$\triangle BCD\backsim\triangle BEF$,故

$$\frac{BH_2}{BH_1}=\frac{BN}{BM}.$$

由于四边形 $AMBN$ 是矩形,有

$$AM=BN,\ AN=BM,$$

于是结论成立.

**评注** 如果我们将 $H_1H_2$ 与 $AB$ 之交点标为 $G$,则由题意知,无 $H_1H_2$ 便无 $G$,而无$\triangle BCD$ 和$\triangle BEF$,垂心 $H_1$、$H_2$ 从何谈起?所以可以认为有如下的“元素分析”(或作图顺序):

第一元素: $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$、$M$、$N$ 及相关线段;

第二元素: $H_1$、$H_2$;

第三元素: $H_1H_2$ 及 $G$.

所谓“简化图形”,就是逐步取消后出现的元素,一直“还原”到较早出现的元素. 有的复杂题目还会有第七、第八元素等,那时通过简化图形找退路

的方法往往更为有效.

**例3** 如图 0-3,锐角$\triangle ABC$中,$\angle BAC=60°$,向外作正$\triangle ABD$与正$\triangle ACE$,设$CD$与$AB$交于点$F$,$BE$与$AC$交于点$G$,$CD$又与$BE$交于点$P$,求证:$S_{AFPG}=S_{\triangle BPC}$.

**证明** 由于四边形比较复杂,故将结论转化为

$$S_{\triangle AFC}=S_{\triangle BGC},$$

两边同时除以$S_{\triangle ABC}$,转化成线段之比,即求证

$$\frac{AF}{AB}=\frac{CG}{AC},$$

上式又等价为 $$\frac{AF}{BF}=\frac{CG}{AG}.$$

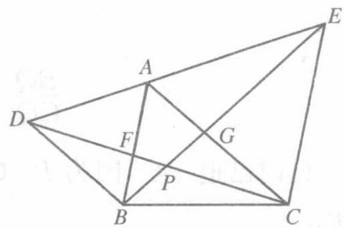



图 0-3

这是成立的,因为

$$左式=\frac{AC}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{AB}=右式,$$

此处用到了$AB\parallel CE$与$AC\parallel BD$.

**评注** 显然点$P$的位置最"玄",故是"最后元素". 有时一条线比该线上某一点位置好刻画,有时正好相反,且不难判断. 那么在"元素分析"中,更合理的是将线段及点作细分处理. 于是有如下序列:

第一元素:$A$、$B$、$C$、$AB$、$BC$、$CA$;

第二元素:$D$、$E$、$DA$、$DB$、$EA$、$EC$;

第三元素:$DC$、$BE$;

第四元素:$F$、$G$;

第五元素:$P$.

之所以将点$P$排在$F$、$G$之后,是由于$P$全由第三元素"生成",而点$F$、$G$分别由一个第一元素和一个第三元素"生成",原则上点$P$更麻烦一些.

注意上述找退路过程:先去除点$P$,再去除点$F$、$G$,然后是点$D$、$E$,最后只剩下点$A$、$B$、$C$. 此题反之亦然,即由面积相等可得$\angle BAC=60°$,方法亦相近. 再强调一遍,简化图形或找退路,首先要注意作图顺序,如果你已经很老练,那么元素分析自然不必写出了.

## 0.2 破坏对称原则

简化图形原则中有一个特例,因为重要,所以也可作为与之并列的原

则，这便是破坏对称原则. 它专门针对这样的几何命题：图形中有两个对称的“子图”，而待证命题本身也是对应于两个子图的对称命题，即要求证 $A=B$，于是我们可以除去其中一个子图，并引入一个中间对称量 $C$，先证明 $A=C$，再说明由对称性，同理可得 $B=C$. 对于不等命题证法相仿.

**例 4** 如图 0－4，四边形 $ABCD$ 对角线垂直且交于点 $O$，$OM$、$ON$ 分别与 $AB$、$AD$ 垂直，延长 $MO$、$NO$，分别与 $CD$、$BC$ 交于点 $P$、$Q$，求证：$PQ \parallel BD$.

**证明** 这个图形显然是对称的，首先为“去除”最终元素 $PQ$，可将待证式改为

$$\frac{BQ}{CQ}=\frac{DP}{CP}.$$

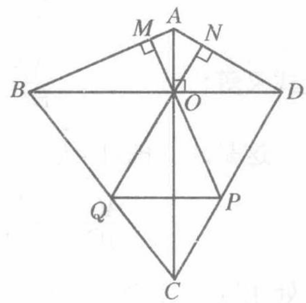


图 0－4

此时已退一步，因为 $P$、$Q$ 本身比 $PQ$ 容易刻画.

接下去便是破坏对称性，即要找到一个中间量 $\Omega$，满足

(1) $\Omega=\frac{BQ}{CQ}$；

(2) $\Omega$ 是关于点 $A$、$B$、$C$、$D$、$O$、$M$、$N$ 甚至只有点 $A$、$B$、$C$、$D$、$O$ 的对称量，这样 $\Omega=\frac{DP}{CP}$ 便同理可证了.

这个 $\Omega$ 的确存在，即

$$\begin{aligned}\frac{BQ}{CQ}&=\frac{S_{\triangle BOQ}}{S_{\triangle COQ}}\\&=\frac{BO\cdot\sin\angle BOQ}{CO\cdot\sin\angle COQ}=\frac{BO\cdot\sin\angle DON}{CO\cdot\sin\angle NOA}\\&=\frac{BO\cdot\sin\angle CAD}{CO\cdot\sin\angle NDB}=\frac{BO\cdot DO}{AO\cdot CO}.\end{aligned}$$

最后一式即要找的 $\Omega$，至此任务已完成.

**例 5** 如图 0－5，点 $F$、$E$ 分别在 $AB$、$AC$ 上，$BE$、$CF$ 交于点 $P$，$M$、$N$ 分别在 $AB$、$AC$ 上，$AB \parallel PN$，$AC \parallel PM$，求证：$\frac{MF}{BF}=\frac{NE}{CE}$.

**证明** 显然欲证式是对称的. 由 $MP \parallel AC$ 及面积可知

$$\frac{MF}{BF}=\frac{S_{\triangle PMC}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle BPC}}.$$

同理$\dfrac{NE}{CE}$也是此值.

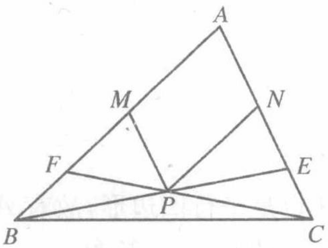



图 0－5

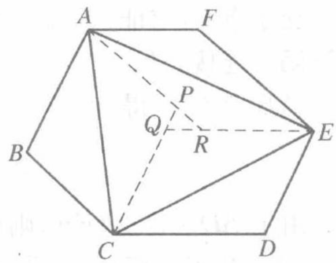



图 0－6

**例 6** 如图 0－6,已知凸六边形 $ABCDEF$ 中,$AF \parallel CD$, $AB \parallel ED$, $BC \parallel EF$,求证: $S_{\triangle ACE}+S_{\triangle BDF} \geqslant S_{ABCDEF}$.

**证明** 如图,作$\square ABCP$、$\square QCDE$ 和$\square EFAR$,于是出现三组全等三角形.

这样便有

$$2(S_{\triangle ACE}-S_{\triangle PQR})+S_{\triangle PQR}=S_{ABCDEF},$$

即

$$S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}(S_{ABCDEF}+S_{\triangle PQR})$$

$$\geqslant \frac{1}{2}S_{ABCDEF}.$$

同理有 $S_{\triangle BDF} \geqslant \dfrac{1}{2}S_{ABCDEF}$.

**评注** 不破除对称性,此题就比较复杂(当然不是所有的题目都能带给你好运). 另外,用这种方法还能证明 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle BDF}$.

## 0.3 以进为退原则

这一原则也就是添加辅助线. 表面上是将图形搞复杂了,其实是起到了一个桥梁的作用,把原本不易联系的信息联系到一起,这等于是将隐藏的图形揭露出来. 从心理学角度讲,这些辅助线本可以存在,是命题者为增加难度而故意隐藏的. 辅助线的添法千变万化,大致分成两种: 一种是相对惯用

的添法，最典型的是《几何原本》中对勾股定理（或毕达哥拉斯定理）的证明；另一种是极其夸张的，就是用大量辅助线构造出原先几乎想不到的新图形，属于对数学有极大兴趣者研究的难题，超出一般奥数的要求.

**例 7** 如图 0－7，有▱$ABCD$ 与▱$ECBF$，其中点 $F$ 在 $CD$ 上，$ED$、$BA$ 延长后交于点 $G$，求证：$S_{\triangle AGD}=S_{\triangle DBF}$.

**证明** 连接 $AF$.

由 $AB\parallel CD$，得

$$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle ADF}.$$

又由于 $AD \underline{\parallel} BC \underline{\parallel} EF$，则四边形 $AFED$ 也是平行四边形，故有 $AF\parallel GD$. 于是四边形 $AFDG$ 为平行四边形，所以 $\triangle ADF\cong\triangle AGD$.

故结论成立.

**评注** 本题中 $AF$ 确是重要"桥梁". 一般说来，辅助线越多难度越大，但没有简单的正比关系.

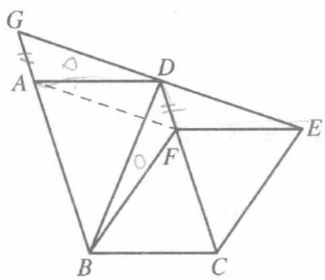



图 0－7

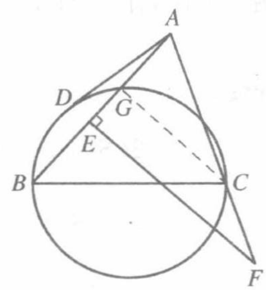



图 0－8

**例 8** 如图 0－8，设锐角$\triangle ABC$，以 $BC$ 为直径作圆，再作切线 $AD$，再在 $AB$ 上找一点 $E$，使 $AE=AD$，过点 $E$ 作 $AB$ 之垂线交 $AC$ 的延长线于点 $F$，求证：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}$.

**证明** 连接 $GC$，其中点 $G$ 为圆与 $AB$ 的交点，则易知 $GC\parallel EF$，故有

$$\frac{AE}{AG}=\frac{AF}{AC}.$$

又由 $AE^2=AD^2=AG\cdot AB$，得

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AE}=\frac{AC}{AF},$$

即 $$AE\cdot AF=AB\cdot AC,$$

而$\triangle ABC$与$\triangle AEF$共用一夹角$\angle BAF$，故有相等面积，证毕.

**评注** 本题中$CG$也是一个重要桥梁. 在数学中，最能体现这种以进为退精神的大概就属平面几何了.

**例9** 如图0-9，$AC$、$BD$均为圆的切线，$AB$是该圆的一条弦，$CD$与圆交于点$Q$、$P$，已知$AP=BP$，点$M$为$AB$中点，求证：点$M$、$R$、$Q$共线，这里$R$为$AD$与$BC$的交点.

**证明** 连接$MC$、$MR$、$MD$，易知题目无非是要证明

$$\frac{S_{\triangle CMR}}{S_{\triangle DMR}}=\frac{CQ}{DQ}.$$

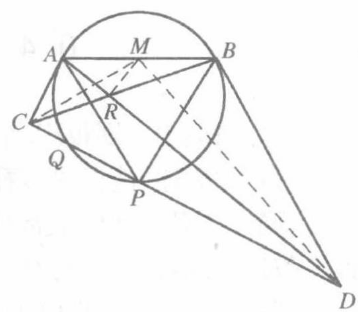


图0-9

易知 $S_{\triangle CMR}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACR}$，$S_{\triangle DMR}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDR}$，$CQ=\frac{AC^2}{CP}$，$DQ=\frac{BD^2}{DP}$，于是问题转变为求证

$$\frac{S_{\triangle ACR}}{S_{\triangle BDR}}=\frac{AC^2\cdot DP}{BD^2\cdot CP}.$$

注意此时待证式已与点$Q$、$M$无关，图形其实已被简化.

由切线性质知$\angle CAB=\angle DBA$，于是根据三角形面积公式，有

$$\frac{S_{\triangle ACR}}{S_{\triangle BDR}}=\frac{AR\cdot CR}{DR\cdot BR}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBC}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}$$

$$=\frac{AC}{BD}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CBD}},$$

于是待证式又变为求证

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{AC\cdot DP}{BD\cdot CP}.$$

事实上，

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{\frac{CD}{CP}\cdot S_{\triangle ACP}}{\frac{CD}{DP}\cdot S_{\triangle PBD}}=\frac{DP}{CP}\cdot\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle PBD}}=\frac{DP}{CP}\cdot\frac{AC}{BD},$$

这是由于$AP=BP$，且$\angle CAP=\angle DBP$.

**评注** 此题比前两题难度大，对于理解面积代换极其有益，通过面积逐