许琪楼 著

矩形边界弹性问题求解理念和方法

清华大学出版社

许琪楼 著

矩形边界弹性问题求解理念和方法

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书提出全新的求解理念，利用三角级数的连续性、可导性、正交性，系统地讨论了弹性力学中薄板弯曲、平面应力或应变、弹性薄板自由振动三类矩形边界问题的求解方法，在求解方式中所考虑的荷载包含了工程中常见的荷载和作用，所涉及的边界类型全面，可用于解决具体的工程应用问题。

本书可供力学理论工作者、力学工程人员参考使用，也可用作理工类研究生弹性力学辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

矩形边界弹性问题求解理念和方法/许琪楼著. —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-45907-1

Ⅰ. ①矩…　Ⅱ. ①许…　Ⅲ. ①弹性力学—研究　Ⅳ. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 308053 号

责任编辑：陈朝晖
封面设计：何凤霞
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，　http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市人民文学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：153mm×235mm　　**印　　张**：18　　**字　　数**：305 千字
版　　次：2016 年 12 月第 1 版　　**印　　次**：2016 年 12 月第1 次印刷
定　　价：89.00 元

产品编号：068605-01

前　　言

本书论述工程中常见的三类弹性力学问题的求解方法，分别为平面应力或应变、薄板弹性弯曲和弹性薄板自由振动。问题的边界为矩形，有四条直线边界和四个角点，相邻边界相互正交，可采用直角坐标系。

每一条边界的支承条件有四种选择。平面问题边界类型有：法向和切向支承边，法向和切向自由边，法向支承、切向自由边，法向自由、切向支承边。薄板边界类型有：固定边、简支边、自由边、滑移边。此外，还可以设有点支座（链杆支座），点支座可以设在边界内、边界上或矩形边界的角点处。

这三类弹性力学问题的解答最终都归结于寻求一个满足确定边值条件的偏微分方程解。所涉及的方程是某一力学物理量对直角坐标变量 x、y 的四阶偏微分方程，具有相近性；因而求解方法在思路上也呈现一定的通用性。求解理念即为解决这三类弹性力学问题时所采取的某些共同的、具有理性特征的研究思路。它们是：

（一）广义静定问题和广义超静定问题的分类

这三类弹性力学问题所求解的偏微分方程都综合了力的平衡条件、几何方程和物理方程；涉及的物理量和综合的方程在数量上是相等的。从数学上讲，如果外界作用是明确的，微分方程一定有解。外界作用有四种途径（或形式）：①边界内的荷载作用，如平面问题中的体力、薄板弯曲中垂直中面的板面荷载；②边界外界作用，包括作用在边界线上的外部荷载和边界产生的位移；③角点力作用，指作用在边界角点上的集中力；④局部约束作用，指点支座限制的点位移和作用的支反力。前三种外界作用和点支座限定的位移是明确的，但点支座支反力有两种可能性。如果支反力可由静力平衡条件确定，外界作用都是明确的；直接利用求解条件便能得到与待定未知量数量相等、相互独立的方程；求解条件是完备的。否则，是不完备的。借用结构力学中构件计算时的分类方法，弹性力学平面问题和薄板弯曲问题可采用以下分类方法。

无点支座、或有点支座但其支反力可以由静力平衡条件确定的为广义静定问题，否则为广义超静定问题。前者可以由求解条件直接求解，后者要用叠加法求解。

薄板自由振动问题不涉及外界作用，不必分类。

（二）外界作用连续化、格式化

弹性力学作为连续介质力学的一部分，认为物体内应力、应变、位移都是连续的；可以表示成坐标的连续函数，以便用数学方法进行分析研究。作为力学，它又是研究外界作用与物体抗力间的平衡关系。在很多情况下，外界作用不具有连续化的性质，即使是连续分布，也不一定易于数学处理，这就会给研究工作造成困难。将某些外界作用（指边界内的荷载作用和边界上的外界作用）连续化、格式化是首要的和必要的步骤。方法是将这些形式各异的作用在其作用区间内展开成三角级数或双重三角级数。三角级数是连续、可导函数，易于数学处理。级数展开时要遵循以下三原则：

（1）在作用区间级数是一个完整的正交三角函数族。

（2）级数展开式必须完整地包含原函数的全部内容或全部作用效应。

（3）级数中三角函数类型具有唯一性，要合理选用。

（三）偏微分方程解的构成方法

这三类弹性力学问题所求解的偏微分方程都是由边界内任一微元体的受力分析综合而成。其中，平面问题和薄板弯曲问题的微分方程涉及的外界作用只有边界内的荷载，与边界上的荷载和位移、角点集中力无直接关系。但方程解除满足微分方程外，还必须满足这些形式上没有直接涉及的外界作用条件。为此，求解时要综合考虑以下要素：

（1）弹性力学问题的建模理论与求解方法要统一。例如，薄板弯曲微分方程的实质是以挠度为参数表示的板中面法线方向力的平衡，竖向力和挠度是与微分方程直接关联的物理量，求解时要给予特别关注。

（2）偏微分方程的解由通解和特解组成。特解是表示特定荷载或作用激发的特有的受力和变形。面对多种外界作用，微分方程直接涉及的边界内的荷载要有相应特解；同时，与特别关注的物理量直接关联的、边界上和角点上作用的外界作用也要有相应特解。例如在薄板弯曲中，外界作用涉及的所有竖向力和挠度（板面荷载、角点力、支承边挠度和非支承边竖向力）都有相应的特解。

(3) 通解和特解、特解与特解之间要相互协同、互为补充,不要相互干扰和掣肘。例如在薄板弯曲中,角点力特解已满足角点力条件,其通解和其他特解在相应角点处的角点力应为零值。

(4) 荷载、通解、特解中采用的三角级数类型要相互协调,待定系数数量与求解条件数量相等。为提高数值计算精度,必须有足够的方程能精确表示待定系数间的相关性。

笔者为结构专业人员,1993 年因工作因素涉足弹性薄板弯曲,随之产生编写本书的冲动。经过 20 多年的学习、研究才完成夙愿。本书总结了多年的学习心得、研究感悟,望有关专家和读者给予指正。

姬同庚、梁远森、姜锐、唐国明、杨卫忠、姬鸿恩、郭杰、白杨曾参与部分课题的研究,感谢他(她)们的合作和付出。

长女许蕾绘制书中全部插图。

浙江大学龚晓南院士和东南大学单建教授对书稿进行了仔细审阅并提出很多宝贵意见。对此,表示衷心感谢。

许琪楼

2016.12

主要符号表

x,y,z	直角坐标系，坐标变量
y	梁挠度
$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$	微元体在 x、y、z 轴方向尺寸
$u,\ v,\ w$	x、y、z 轴方向位移
$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$	x、y、z 轴方向正应力
τ_{xy},τ_{xz}	与 x 轴正交的平行 y、z 轴方向的剪应力
τ_{yz},τ_{yx}	与 y 轴正交的平行 z、x 轴方向的剪应力
τ_{zx},τ_{zy}	与 z 轴正交的平行 x、y 轴方向的剪应力
τ_0	常量剪应力
$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$	x、y、z 轴方向正应变
$\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$	x 轴与 y 轴、y 轴与 z 轴、z 轴与 x 轴之间的剪应变
a,b,l,h,t	长度尺寸
I	梁截面惯性矩
D	板弯曲刚度
E	材料弹性模量
G	材料剪变模量
μ	材料泊松比
$\overline{m}$	板单位面积质量
q	分布荷载集度
F,R	集中力、角点力、支反力
$\overline{G}$	重力荷载
M	弯矩
V	剪力
F_x,F_y,F_z	x、y、z 轴方向体力分量
M_x,M_y	垂直 x、y 轴侧面上单位宽度内弯矩
M_{xy},M_{yx}	垂直 x、y 轴侧面上单位宽度内扭矩

Q_x, Q_y	垂直 x、y 轴侧面上单位宽度内竖向剪力
V_x, V_y	垂直 x、y 轴侧面上单位宽度内总剪力
Δ	梁端点、板角点或点支座处位移
d_0, d_1, d_2	刚体转动、x 轴向刚体平动、y 轴向刚体平动位移常数
ω	板振动圆频率
κ	板振动特征值
A_m, B_m, C_m, D_m	与取项数为 m 的三角级数相关联的待定系数
E_n, F_n, G_n, H_n	与取项数为 n 的三角级数相关联的待定系数
$b_{m1}, b_{m2}, \cdots$	以坐标 x 为变量的函数对取项数为 m 的正交三角级数的展开系数
$a_{n1}, a_{n2}, \cdots$	以坐标 y 为变量的函数对取项数为 n 的正交三角级数的展开系数
d_{m0}, d_{m1}, d_{m2}	函数 x^0、x^1、x^2 对取项数为 m 的正交三角级数的展开系数
c_{n0}, c_{n1}, c_{n2}	函数 y^0、y^1、y^2 对取项数为 n 的正交三角级数的展开系数

目　　录

第 1 章
求解方法概述

1.1 梁弯曲挠度计算讨论

1.1.1 弯曲问题分类理念

图 1.1(a)表示梁的弯曲受力，梁跨度为 a，承受荷载 $q(x)$。设坐标 x 处挠度为 $y(x)$，$y(x)$、$q(x)$ 正方向见图 1.1(a)所示。忽略剪切变形，梁挠曲平衡微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^4 y(x)}{\mathrm{d}x^4}=\frac{q(x)}{EI} \tag{1.1}$$

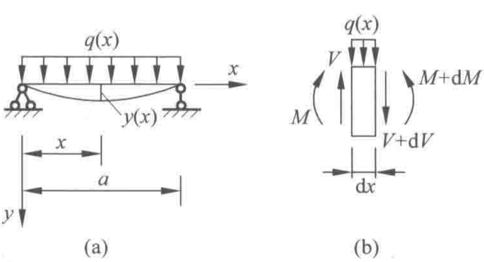

图 1.1 梁的弯曲受力

梁内力与挠度微分关系为 $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{M(x)}{EI}$，$\frac{\mathrm{d}^3 y(x)}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{V(x)}{EI}$。$EI$ 为梁的弯曲刚度；弯矩 $M(x)$、剪力 $V(x)$ 正方向如图 1.1(b)所示。

式(1.1)为四阶微分方程，其解由齐次方程通解 y_1 和非齐次方程特解 y_2 组成，即

$$y=y_1+y_2 \tag{1.2}$$

$$y_1=c_1+c_2 x+c_3 x^2+c_4 x^3 \tag{1.3}$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x q(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

式(1.3)中待定常数 c_1、c_2、c_3、c_4 由求解条件确定。

图 1.2(a)为两端简支梁,为静定结构;图 1.2(b)为两端固定梁,为超静定结构;承受均布荷载 q,特解 $y_2 = \frac{qx^4}{24EI}$。利用梁端条件都可以确定通解中待定常数值。可见,对式(1.1)而言,静定与超静定结构分类理念已不再适用。这是因为式(1.1)综合了平衡方程、几何方程(平截面假定)和物理方理(虎克定律)而成,梁端力的条件和位移条件是等效的。不管是简支端、固定端、自由端、滑移端,每个梁端均可以提供两个已知的边界条件,相互独立的边界条件与待定常数数量相等,求解条件是完备的。

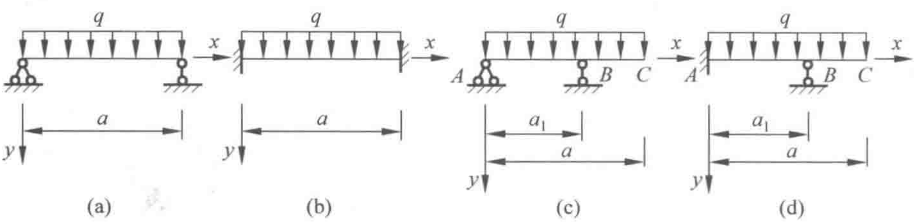

图 1.2 梁的弯曲

图 1.2(c)为带悬臂端简支梁,为静定结构,承受均布荷载 q。计算时,先利用静力平衡条件确定 B 点支反力 R_B,并用 R_B 取代点支座(链杆支座);计算简图为一端简支、一端自由梁承受 q 和 R_B 共同作用。这是一个绕 A 端可进行刚体转动的几何可变体、在一组对 A 端弯矩平衡力系作用下的弯曲。由初参数法,挠度特解可分 AB、BC 两个梁段:

AB 段($0 \leqslant x \leqslant a_1$) $y_2 = \frac{qx^4}{24EI}$

BC 段($a_1 \leqslant x \leqslant a$) $y_2 = \frac{qx^4}{24EI} + \frac{R_B}{6EI}(x-a_1)^3$

式中 $R_B = -\frac{qa^2}{2a_1}$(负号表示力的方向与 y 轴正方向相反)。梁端条件对应的方程为:

$x=0$ 时, $y(x)=0$; 有 $c_1=0$

$x=0$ 时, $M(x)=0$; 有 $c_3=0$

$x=a$ 时, $M(x)=0$; 有 $2c_3+6c_4a+\frac{qa^2}{2EI}+\frac{R_B}{EI}(a-a_1)=0$

$x=a$ 时，$V(x)=0$；有 $6c_4+\dfrac{qa}{EI}+\dfrac{R_B}{EI}=0$

上述四个方程中均不包含 c_2；代入 R_B 值后，第 3 个方程与第 4 个方程相同。说明梁端条件对应的四个方程中只有三个方程线性无关，由此可解出三个待定系数 c_1、c_3、c_4。

$$c_1=0,\quad c_3=0,\quad c_4=\frac{qa}{12EIa_1}(a-2a_1)$$

于是有

$$y=c_2x+\frac{qa}{12EIa_1}(a-2a_1)x^3+y_2$$

式中后两项代表几何可变体在这组平衡力系作用下的相对变形。引入 B 支座位移条件：$x=a_1$ 时 $y=0$，相应方程为

$$c_2a_1+\frac{qa}{12EIa_1}(a-2a_1)a_1^3+\frac{qa_1^4}{24EI}=0$$

解出待定常数 c_2 后，梁挠度通解完全确定。由于特解 y_2 不同，AB、BC 段有不同的挠度表达式。

该算例表明，当梁内(不包括梁端)存在点支座但其反力可以由静力平衡条件确定时，用支反力取代点支座，利用梁端条件和点支座处位移条件仍可以得到与待定常数数量相等的、相互独立的方程。

图 1.2(d)为带悬臂的固端梁，为超静定结构。在均布荷载 q 作用下，由于 B 点反力不能利用平衡条件确定，上述计算过程无法复制。可见，当梁内存在点支座且支反力无法确定时是不能利用梁端条件和点支座位移、支反力条件直接求解。这是因为梁弯曲微分方程式(1.1)综合了梁微元两个平衡条件、平截面假定、虎克定律四个方程，涉及正应力(或弯矩)、剪力、正应变和截面曲率四个物理量，涉及的物理量和综合的方程数量相等，微分方程有解。求解条件完备时就能利用求解条件直接求解，否则就不能直接求解。

求解条件完备的标志是所有外界作用都是清晰、明确的。外界作用有三种形式(或途径)：①梁内荷载 $q(x)$ 作用。②梁端作用。指外界作用于梁端的竖向位移、转角、竖向集中力、弯矩。③梁内点支座产生的约束作用。其中前两种外界作用都是清晰、明确的；约束作用包括点支座产生的位移和支反力，通常位移是明确的，但支反力有两种可能：当支反力可以用静力平衡条件确定时，求解条件是完备的；否则是不完备的。

对梁弯曲而言，当梁内无点支座或有点支座但其反力可以由静力平衡