高中数学综合性专题学习

◎ 编著 赵林林 吴长江

任升录 李 伟

◎ 主编 赵林林 吴长江

高中数学综

GAOZHONG
SHUXUE
ZONGHEXING
ZHUANTI
XUEXI

上海大学出版社

高中数学综合性学习丛书

主编 赵林林 吴长江

高中数学综合性专题学习

编著 赵林林 吴长江 任升录 李 伟

上海大学出版社

·上海·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学综合性学习丛书. 高中数学综合性专题学习/赵林林，吴长江主编；赵林林等编著. —上海：上海大学出版社，2003.3

ISBN 7-81058-460-X

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①赵… ②吴… ③赵… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013136 号

高中数学综合性专题学习

赵林林　吴长江主编

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号　邮政编码 200072)

(E-mail：sdcbs@citiz.net　发行热线 56331131)

出版人：李顺祺

★

江苏句容排印厂印刷　各地新华书店经销

开本：880×1230　1/32　印张：14.25　字数：410 千

2003 年 3 月第 1 版　2003 年 3 月第 1 次印刷

印数：1～5 100

定价：22.00 元

目　录

分层递进篇

数学思想方法篇

数学一般能力篇

分层递进篇

高中数学综合性专题学习

专题1 函数

1.1 函数解析式

1. 认识

【问题1】 幂函数 $y=x^n$（$n\in \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$为整数集）的图像(1) 关于原点对称，且通过原点，则 n 为________；(2) 关于原点对称，且不过原点，不与坐标轴相交，在$(0,+\infty)$递减，则 n 为________；(3) 关于 y 轴对称，并与坐标轴相交，则 n 为________；(4) 关于 y 轴对称，不与坐标轴相交，则 n 为________.（指出 n 具备的特征）

【分析与探究】 (1)和(2)中 $y=x^n$ 的图像关于原点对称，因而 $y=x^n$ 是奇函数，故 n 为奇数，再结合另一条件即可确定 n 的符号.

(1) n 为正奇数；(2) n 为负奇数；(3) n 为正偶数；(4) n 为负偶数或零.

【反思与总结】 基本初等函数是高中函数研究的重点，以基本初等函数为载体学习函数的基本性质，是常见的函数基本问题. 在进行函数综合复习时，不要忽略了这类基本内容.

【问题2】 已知一个二次函数，当 $x=1$ 时有最大值 2，它的图像截 x 轴所得到的线段长是 $\sqrt{2}$.

(1) 求此二次函数的解析式；

(2) 求此二次函数图像的顶点 M 及其与 x 轴两个交点 A、B 所构成的三角形 AMB 的面积.

【分析与探究】 已知二次函数的顶点、对称轴或最大(小)值时，常用配方式，本题可设 $y=a(x-1)^2+2$. 再利用另外的已知条件得出关于待定系数 a 的方程，求出 a.

图像截 x 轴所得到的线段长是 $\sqrt{2}$，也就是 $a(x-1)^2+2=0$ 的两根

x_1、x_2 之差绝对值 $|x_1-x_2|=\sqrt{2}$，或者，$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=2$，由根与系数关系可得 $4-4\left(1+\dfrac{2}{a}\right)=2$，解得 $a=-4$.

$\triangle AMB$ 的面积直接使用"$S_\triangle=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高"即可得出，不必算出点的坐标.

(1) $y=-4x^2+8x-2$；(2) $S_{\triangle AMB}=\sqrt{2}$.

2. 理解

【问题 3】 已知函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像经过$(1, 7)$点，反函数 $f^{-1}(x)$的图像经过$(4, 0)$点，则函数 $f(x)$的表达式是________.

【分析与探究】 两个待定参数，需要两个独立的方程才能确定. $f^{-1}(x)$经过$(4, 0)$点，则 $f(x)$经过$(0, 4)$点. 由已知条件得出方程组 $\begin{cases}7=a+b,\\4=1+b.\end{cases}$ 求出 $f(x)=4^x+3$.

【反思与总结】 待定系数法是求解函数解析式最为常用的方法，从已知条件中寻找待定系数满足的方程是解题的关键环节. 本题应用了"若点(a, b)在反函数图像上，则点(b, a)在原来函数图像上"这一结论.

【问题 4】 已知函数 $f(e^x)=x^2-2x+3$，其中，$x\in[2, 3]$. (1) 求 $f(x)$的解析式及定义域；(2) 求 $f(x)$的最小值和最大值.

【分析与探究】 对应法则 f 仅当 $t=e^x$ 有意义时，才有意义，而 $x\in[2, 3]$，所以 $t\in[e^2, e^3]$，$x=\ln t$.

所以，$f(t)=\ln^2 t-2\ln t+3$，$t\in[e^2, e^3]$，所以，

(1) $f(x)=\ln^2 x-2\ln x+3$，定义域为$[e^2, e^3]$.

(2) $f(x)=(\ln x-1)^2+2$，$\ln x\in[2, 3]$，所以 $f_{\min}(x)=3$，$f_{\max}(x)=6$.

3. 掌握

【问题 5】 给出函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x\geqslant 4,\\ f(x+1), & x<4.\end{cases}$ 求 $f(\log_2 3)$的值.

【分析与探究】 这里，函数的解析式是分段函数，需要以 $x=4$ 为分界点分段考虑. 由于 $1<\log_2 3<2$，$4<3+\log_2 3<5$，所以，$f(\log_2 3)=$

$$f(1+\log_2 3)=f(2+\log_2 3)=f(3+\log_2 3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3+\log_2 3}=\frac{1}{24}.$$

【反思与总结】 由于分段函数在定义域的不同部分，函数具有不同的表达式，因此，解决分段函数问题的基本原则是分段逐个讨论解决.

【问题 6】 设函数 $f(x)$满足关系式 $mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x$，其中，m、n 为常数，且 $|m|\neq|n|$，求 $f(x)$.

【分析与探究】 本题若把 $f(2x-3)$ 看作 $f(u)$，则 $f(3-2x)$为 $f(-u)$. 消去 $f(-u)$，可求得 $f(u)$，再改写得 $f(x)$.

$$mf(u)+nf(-u)=u+3. \quad ①$$

在①式中用$-u$ 代 u，得

$$mf(-u)+nf(u)=-u+3. \quad ②$$

$\dfrac{m\times①-n\times②}{m^2-n^2}$，得 $f(u)=\dfrac{u}{m-n}+\dfrac{3}{m+n}\ (m^2-n^2\neq 0)$.

所以 $$f(x)=\frac{x}{m-n}+\frac{3}{m+n}.$$

4. 演变与拓展

【问题 7】 已知 $f(x)=ax^2+bx$ (a、b 为常数，$a\neq 0$) 满足 $f(2)=0$，且 $f(x)=x$ 有等根.

(1) 求 $f(x)$.

(2) 是否存在 m、n ($m<n$)，使 $f(x)$的定义域为$[m, n]$，而值域为$[2m, 2n]$？

【分析与探究】 $f(x)=x$ 有等根，$a\neq 0$ 转化为判别式 $\Delta=0$，得 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$.

根据函数的定义域求值域，关键在于确定其单调性. 由 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，得 $2n\leqslant\dfrac{1}{2}$，$n\leqslant\dfrac{1}{4}$，而这时 $f(x)$为增函数. 于是，由 $f(m)=2m$，$f(n)=2n$ 及$m<n\leqslant\dfrac{1}{4}$，得 $m=-2$，$n=0$.

即存在 $m=-2$，$n=0$ 使 $f(x)$ 的定义域为 $[m, n]$，而值域为 $[2m, 2n]$.

【反思与总结】 已知定义域和值域，实际上是已知函数值问题，即利用单调性将已知条件转化为在相应点的函数值已知，从而求解问题.

【问题 8】 已知函数 $f(x)$ 满足关系 $axf(x)=2x-bf(x)$，$ax+b\neq 0$，$f(1)=1$，且方程 $f(-x)=-2x$ 有唯一解.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_n=\frac{1}{2}f(a_{n-1})$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$ 且 $a_1=2$，求 a_n.

【分析与探究】 (1) 观察已知条件的特点，先用 a、b 表示 $f(x)$，$f(x)=\frac{2x}{ax+b}$.

由 $f(1)=1$ 得 $a+b=2$.

由 $f(-x)=-2x$，得 $[ax+(1-b)]x=0$.

① 当 $a\neq 0$ 且 $b=1$ 时，即 $a=b=1$ 时，$f(-x)=-2x$ 有唯一解，这时，$f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

② 当 $a=0$，$b=2$ 时，$f(-x)=-2x$ 有唯一解，这时，$f(x)=x$.

(2) 由于 $a_n=\frac{1}{2}f(a_{n-1})$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N})$，需分别对 $f(x)$ 的不同表达式进行讨论.

① 当 $f(x)=x$ 时，由 $a_1=2$ 及 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，可推得 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ $(n\geqslant 1)$.

② 当 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ 时，由 $a_1=2$ 及 $a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$，得 $a_2=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{2}{5}$，$a_4=\frac{2}{7}$，…，猜测 $a_n=\frac{2}{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N})$. 事实上，$\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{a_{n-1}}$，即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=1$，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 成等差数列，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)=\frac{2n-1}{2}$，因而有 $a_n=\frac{2}{2n-1}$.

【问题 9】 上海市电信营业区内住宅电话通话费为首次 3 min 付 0.20元，以后 0.10 元/min（不足 3 min 的以首次 3 min 计，以后不足1 min 的以 1 min 计）. 设符号$[a]$表示不超过正数 a 的最大整数，$\langle a\rangle$表示不小于正数 a 的最小整数.

(1) 画出一次通话 6 min 内的通话费 y 关于通话时间 t 的函数图像；

(2) 如果一次通话 t min（$t\in\mathbf{R}$），写出通话费 y 关于通话时间 t 的函数解析式；

(3) 如果计划通话时间较长（超过 3 min），可分别采用一次拨打或几次拨打（费用相同取拨打次数少的）. 试设计一种使通话费最省的方案（可用最省通话时间 t 的函数解析式来表示）.

【分析与探究】 通话费 y 只能是 2 角，3 角，4 角，5 角，……，且不超过某整分钟时，按前一金额付费，一旦超过，按下一时段付费，例如，正好打满 3 分钟，通话费 2 角，而若为 3 分 1 秒，则付费与 4 分钟相同，为 3 角. 因此有

(1) 所画图像为分段函数，如图 1－1 所示.

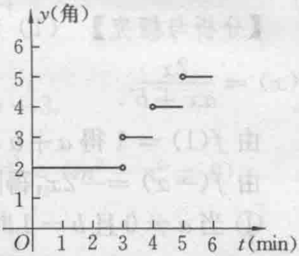

图 1－1

(2) $y=\begin{cases}0.2, & \text{当 } 0<t\leqslant 3 \text{ 时；}\\ 0.2+\langle t+3\rangle\times 0.1, & \text{当 } t>3 \text{ 时.}\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}\dfrac{\langle t\rangle}{3}\times 0.2, & \text{当}\langle t\rangle\text{ 是 3 的倍数时；}\\ \left[\dfrac{t}{3}\right]\times 0.2+\left\langle t-3\left[\dfrac{t}{3}\right]\right\rangle\times 0.1, & \text{当}\langle t\rangle\text{ 不是 3 的倍数时.}\end{cases}$

5. 总结

函数是数学学习的一个核心内容，函数解析式是函数内容的起点. 求函数解析式，如果已知函数的类型，常常把已知点代入，确定待定系数，求出解析式；如果是已知函数具备某些性质，往往是已知一个区间上函数的解析式，去求另一区间上函数的解析式，对于较多性质交织在一起的函数，常常通过画图帮助解决，如利用对称性、周期性等；如果是已知函数方

程，则利用奇偶性或倒数关系，得出关于 $f(x)$的新方程，通过解方程组求出 $f(x)$；在应用题中，需要把问题情境中反映出来的变量关系用等量表示，进而写出所需函数的解析式；如果所求函数是由已知函数经过某种运算而得到（如专题实践 1.1 第 4 题），则需先分别求出所求函数的各个组成部分. 在函数问题中，自变量的取值范围是需要考虑的.

专题实践 1.1

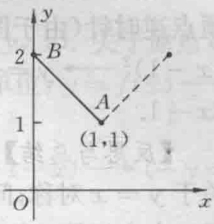

图 1 - 2

1. 设函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数，它在区间$[0, 1]$上的图像为如图 1 - 2 所示的线段 AB，则在区间$[1, 2]$上，$f(x) =$ ________.

2. 函数 $f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$ (a、b、c 为常数，且均不为零，$a^2-b^2\neq 0$)，求函数 $f(x)$的解析式.

3. 设 $f(x)$是关于 x 的二次函数，$g(x)=2^x\cdot f(x)$，且 $g(x+1)-g(x)=2^{x+1}x^2$，求 $f(x)$和 $g(x)$的解析式.

4. 二次函数 $f(x)=\frac{1}{a}x^2-4x+1$ ($a\neq 0$，且 $a\in\mathbf{R}$) 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内有最大值 M 和最小值 m，设 $F=M-m$，确定 F 与 a 的函数关系式 $F(a)$.

5. 某人乘车上班，早上 7:00 出发乘公共汽车，汽车以平均 30 km/h 的速度行驶了 20 min，但遇上了堵车，无法前进，为了不迟到，他立刻下车步行，设步行速度为平均 12 km/h，终于在 7:30 及时赶到单位（假设此人家与单位在一条直的路线上）.

(1) 试建立这段时间内此人所经过路程 s 与所用时间 t 之间的函数关系式；

(2) 试建立这段时间内此人离家距离 s 与时刻 t 之间的函数关系式；

(3) 求此人家与单位的距离.

1.2 函数图像变换

1. 认识

【问题 1】 实常数 a、b 是怎样的值时，函数 $y=ax+b$ ($a\neq 0$) 与它的反函数的图像重合？

【分析与探究】 由 $y=ax+b$，$a\neq 0$，$ax=y-b$，得 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$，所以，其反函数为 $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$.

图像重合反映在解析式上就是函数与反函数相同，必须且只须 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=a, \\ -\dfrac{b}{a}=b.\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=0$；或 $a=-1$，b 为任意实数.

【问题 2】 求与二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图像的顶点相同、开口大小相等、方向相反的图像的解析式.

【分析与探究】 所求二次函数的图像是由已知二次函数图像绕其顶点逆时针（由于图像本身的对称性，顺时针也可）旋转 180° 而得. $y=(x-1)^2 \longrightarrow y=-(x-1)^2$，即所求二次函数解析式为 $y=-x^2+2x-1$.

【反思与总结】 问题 1 中反函数与函数相同，也可理解为函数本身关于 $y=x$ 对称；问题 2 中旋转 180° 可以看成是对称轴相同、顶点相同、开口大小相等、开口方向相反.

【问题 3】 已知函数 $f(x)=\sin 2x$，$f(x+t)$ 图像关于 y 轴对称，则 t 的一个可能值为________.

【分析与探究】 图像关于 y 轴对称，即 $f(x+t)$ 为偶函数，从特殊函数入手，$\cos 2x$ 为偶函数，当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos 2x$；更进一步，$-\cos 2x$ 也是偶函数，这时，$t=\dfrac{3}{4}\pi$；一般地，当 $t=\dfrac{\pi}{4}\cdot(2k+1)$ 时，$f(x+t)$ 为偶函数.

2. 理解

【问题 4】 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(a+x)=f(a-x)$，求证：$f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

【分析与探究】 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称意为：若 $P(x_0, y_0)$ 是 $y=f(x)$ 图像上的任一点，则其关于直线 $x=a$ 的对称点 $P'(2a-x_0, y_0)$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上. 用已知条件推理出这一事实，问题就获证明.

由已知 $f(a+x)=f(a-x)$，得 $f(2a-x_0)=f[a+(a-x_0)]=f[a-(a-x_0)]=f(x_0)=y_0$.

所以，$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

【反思与总结】 函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称的另一种常见条件是：$f(2a+x)=f(-x)$；一般地，已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(a+x)=f(b-x)$，a、b 为实常数，则 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

【问题 5】 将 $y=-1-2^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，得到图像 C_1，将 C_1 的图像关于原点对称得到 C_2，将 C_2 的图像沿 x 轴向左平移一个单位得到 C_3，求 C_3 所对应的函数解析式.

【分析与探究】 关于 $y=x$ 对称：$(x, y)\longrightarrow(y, x)$. 关于原点对称：$(a, b)\longrightarrow(-a, -b)$. $y=f(x)$ 向左平移一个单位：$y=f(x)\longrightarrow y=f(x+1)$. 将三种变换按顺序完成如下：

$y=-1-2^x(\longrightarrow x=-1-2^y)\longrightarrow y=\log_2(-1-x)\longrightarrow(-y=\log_2(x-1))\longrightarrow(-y=\log_2 x)\longrightarrow y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

3. 掌握

【问题 6】 已知函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，求 a.

【分析与探究】 可以通过找特殊点定出 a，$x=0$ 关于 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称的直线为 $x=-\frac{\pi}{3}$. 因此有 $\sin(2\times 0)+a\cos(2\times 0)=\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+a\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$，即 $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)a$，所以 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

也可以从对称轴的性质入手，对称轴 $x=-\frac{\pi}{6}$ 与函数图像的交点为最高或最低点. 所以，$\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)+a\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{1+a^2}$，即 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{2}\right)^2=1+a^2$，只有一解：$a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【反思与总结】 形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数图像既是轴对称图形，又是中心对称图形，所有经过最高点或最低点与 x 轴垂直的直线都是对称轴，所有与 x 轴的交点都是对称中心.