

高中数学 综合性 专题 学习

◎ 编著 赵林林 吴长江
任升录 李 伟

高中
数学
综合
性
学
习

◎ 主编 赵林林 吴长江

GAOZHONG
SHUXUE
ZONGHEXING
ZHUANTI

XUEXI

上海
大学
出版
社

高中数学综合性学习丛书

主编 赵林林 吴长江

G 634.60
6

15/24

高中数学综合性专题学习

编著 赵林林 吴长江 任升录 李 伟

上海大学出版社

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学综合性学习丛书. 高中数学综合性专题学习/赵林林, 吴长江主编; 赵林林等编著. —上海: 上海大学出版社, 2003. 3

ISBN 7-81058-460-X

I. 高... II. ①赵... ②吴... ③赵... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013136 号

高中数学综合性专题学习

赵林林 吴长江主编

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号 邮政编码 200072)

(E-mail: sdcbs@citiz.net 发行热线 56331131)

出版人: 李顺祺

★

江苏句容排印厂印刷 各地新华书店经销

开本: 880×1230 1/32 印张: 14.25 字数: 410 千

2003 年 3 月第 1 版 2003 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1~5 100

定价: 22.00 元

目 录

分层递进篇

专题1 函数	2
1.1 函数解析式	2
专题实践 1.1	7
1.2 函数图像变换	7
专题实践 1.2	11
1.3 函数的最大值与最小值	12
专题实践 1.3	18
1.4 函数的性质	19
专题实践 1.4	25
1.5 函数的应用	26
专题实践 1.5	33
函数专题检测	34
专题2 不等式	37
2.1 不等式的解法	37
专题实践 2.1	41
2.2 不等式的应用	42
专题实践 2.2	48
不等式专题检测	49
专题3 数列与极限	52
3.1 数列的通项	52

专题实践 3.1	57
3.2 等差数列与等比数列	57
专题实践 3.2	63
3.3 数列的求和	63
专题实践 3.3	71
3.4 数列的极限	72
专题实践 3.4	78
3.5 数列与极限的应用	78
专题实践 3.5	85
数列与极限专题检测	85
专题4 三角	89
4.1 角的变换	89
专题实践 4.1	92
4.2 求值	92
专题实践 4.2	99
4.3 三角应用	99
专题实践 4.3	106
三角专题检测	106
专题5 复数	109
5.1 模与辐角主值	109
专题实践 5.1	116
5.2 复数的性质	117
专题实践 5.2	126
5.3 复数方程	127
专题实践 5.3	130
5.4 复数的应用	130
专题实践 5.4	138
复数专题检测	139

专题6 空间图形与向量	141
6.1 角与距离	141
专题实践 6.1	154
6.2 线面位置关系	155
专题实践 6.2	160
6.3 面积与体积	161
专题实践 6.3	171
6.4 空间向量	171
专题实践 6.4	178
空间图形与向量专题检测	178
专题7 曲线与方程	181
7.1 角与距离	181
专题实践 7.1	188
7.2 直线方程	189
专题实践 7.2	196
7.3 曲线方程	196
专题实践 7.3	207
7.4 综合应用	208
专题实践 7.4	217
曲线与方程专题检测	218
数学思想方法篇	
专题8 分类讨论思想	222
8.1 分类讨论思想的意义	222
8.2 分类讨论的三大原则	223
8.3 分类讨论的步骤	228
8.4 引起分类讨论的七种情况举例	230
8.5 避免分类讨论的策略	258
专题实践 8	260

专题9 数形结合思想	261
9.1 数形结合思想的意义	261
9.2 数形结合的两大原则	261
9.3 “数”的问题用“形”来解决举例	263
9.4 “形”的问题用“数”来解决举例	278
专题实践 9	280
专题10 转化思想	281
10.1 转化思想的意义	281
10.2 转化的三大原则	281
10.3 等价转化十一种策略运用举例	284
专题实践 10	305
专题11 函数思想	306
专题实践 11	316
专题12 方程思想	317
专题实践 12	319
专题13 数学方法	320
13.1 一般推理方法	320
13.2 十种数学解题方法	327
专题实践 13	345
数学一般能力篇	
专题14 学习新的数学知识的能力	348
14.1 学习能力的认识水平	349
14.2 学习能力的理解水平	350
14.3 学习能力的掌握水平	353

14.4	学习能力的应用水平	358
专题15	探究数学问题的能力	364
15.1	探究能力的认识水平	364
15.2	探究能力的理解水平	366
15.3	探究能力的掌握水平	368
15.4	探究能力的应用水平	370
专题16	应用数学知识解决实际问题的能力	374
16.1	应用能力的认识水平	375
16.2	应用能力的理解水平	377
16.3	应用能力的掌握水平	379
16.4	应用能力的应用水平	381
专题17	数学创新能力	386
17.1	创新能力的认识水平	386
17.2	创新能力的理解水平	389
17.3	创新能力的掌握水平	391
17.4	创新能力的应用水平	395
	数学一般能力专题实践	398
	参考答案	399

分 层 递 进 篇

高中数学综合性专题学习

专题1 函数

1.1 函数解析式

1. 认识

【问题1】 幂函数 $y = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ 为整数集) 的图像 (1) 关于原点对称, 且通过原点, 则 n 为 _____; (2) 关于原点对称, 且不过原点, 不与坐标轴相交, 在 $(0, +\infty)$ 递减, 则 n 为 _____; (3) 关于 y 轴对称, 并与坐标轴相交, 则 n 为 _____; (4) 关于 y 轴对称, 不与坐标轴相交, 则 n 为 _____. (指出 n 具备的特征)

【分析与探究】 (1) 和 (2) 中 $y = x^n$ 的图像关于原点对称, 因而 $y = x^n$ 是奇函数, 故 n 为奇数, 再结合另一条件即可确定 n 的符号.

(1) n 为正奇数; (2) n 为负奇数; (3) n 为正偶数; (4) n 为负偶数或零.

【反思与总结】 基本初等函数是高中函数研究的重点, 以基本初等函数为载体学习函数的基本性质, 是常见的函数基本问题. 在进行函数综合复习时, 不要忽略了这类基本内容.

【问题2】 已知一个二次函数, 当 $x = 1$ 时有最大值 2, 它的图像截 x 轴所得到的线段长是 $\sqrt{2}$.

(1) 求此二次函数的解析式;

(2) 求此二次函数图像的顶点 M 及其与 x 轴两个交点 A 、 B 所构成的三角形 AMB 的面积.

【分析与探究】 已知二次函数的顶点、对称轴或最大(小)值时, 常用配方式, 本题可设 $y = a(x-1)^2 + 2$. 再利用另外的已知条件得出关于待定系数 a 的方程, 求出 a .

图像截 x 轴所得到的线段长是 $\sqrt{2}$, 也就是 $a(x-1)^2 + 2 = 0$ 的两根

x_1, x_2 之差绝对值 $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$, 或者, $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 2$, 由根与系数关系可得 $4 - 4\left(1 + \frac{2}{a}\right) = 2$, 解得 $a = -4$.

$\triangle AMB$ 的面积直接使用 “ $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$ ” 即可得出, 不必算出点的坐标.

(1) $y = -4x^2 + 8x - 2$; (2) $S_{\triangle AMB} = \sqrt{2}$.

2. 理解

【问题3】 已知函数 $f(x) = a^x + b$ 的图像经过 $(1, 7)$ 点, 反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过 $(4, 0)$ 点, 则函数 $f(x)$ 的表达式是_____.

【分析与探究】 两个待定参数, 需要两个独立的方程才能确定. $f^{-1}(x)$ 经过 $(4, 0)$ 点, 则 $f(x)$ 经过 $(0, 4)$ 点. 由已知条件得出方程组

$$\begin{cases} 7 = a + b, \\ 4 = 1 + b. \end{cases}$$

求出 $f(x) = 4^x + 3$.

【反思与总结】 待定系数法是求解函数解析式最为常用的方法, 从已知条件中寻找待定系数满足的方程是解题的关键环节. 本题应用了“若点 (a, b) 在反函数图像上, 则点 (b, a) 在原来函数图像上”这一结论.

【问题4】 已知函数 $f(e^x) = x^2 - 2x + 3$, 其中, $x \in [2, 3]$. (1) 求 $f(x)$ 的解析式及定义域; (2) 求 $f(x)$ 的最小值和最大值.

【分析与探究】 对应法则 f 仅当 $t = e^x$ 有意义时, 才有意义, 而 $x \in [2, 3]$, 所以 $t \in [e^2, e^3]$, $x = \ln t$.

所以, $f(t) = \ln^2 t - 2\ln t + 3$, $t \in [e^2, e^3]$, 所以,

(1) $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x + 3$, 定义域为 $[e^2, e^3]$.

(2) $f(x) = (\ln x - 1)^2 + 2$, $\ln x \in [2, 3]$, 所以 $f_{\min}(x) = 3$, $f_{\max}(x) = 6$.

3. 掌握

【问题5】 给出函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \geq 4, \\ f(x+1), & x < 4. \end{cases}$ 求 $f(\log_2 3)$ 的值.

【分析与探究】 这里, 函数的解析式是分段函数, 需要以 $x = 4$ 为分界点分段考虑. 由于 $1 < \log_2 3 < 2$, $4 < 3 + \log_2 3 < 5$, 所以, $f(\log_2 3) =$

$$f(1+\log_2 3) = f(2+\log_2 3) = f(3+\log_2 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+\log_2 3} = \frac{1}{24}.$$

【反思与总结】 由于分段函数在定义域的不同部分, 函数具有不同的表达式, 因此, 解决分段函数问题的基本原则是分段逐个讨论解决.

【问题 6】 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x$, 其中, m, n 为常数, 且 $|m| \neq |n|$, 求 $f(x)$.

【分析与探究】 本题若把 $f(2x-3)$ 看作 $f(u)$, 则 $f(3-2x)$ 为 $f(-u)$. 消去 $f(-u)$, 可求得 $f(u)$, 再改写得 $f(x)$.

$$mf(u)+nf(-u)=u+3. \quad (1)$$

在①式中用 $-u$ 代 u , 得

$$mf(-u)+nf(u)=-u+3. \quad (2)$$

$$\frac{m \times (1) - n \times (2)}{m^2 - n^2}, \text{ 得 } f(u) = \frac{u}{m-n} + \frac{3}{m+n} \quad (m^2 - n^2 \neq 0).$$

所以
$$f(x) = \frac{x}{m-n} + \frac{3}{m+n}.$$

4. 演变与拓展

【问题 7】 已知 $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b 为常数, $a \neq 0$) 满足 $f(2) = 0$, 且 $f(x) = x$ 有等根.

(1) 求 $f(x)$.

(2) 是否存在 m, n ($m < n$), 使 $f(x)$ 的定义域为 $[m, n]$, 而值域为 $[2m, 2n]$?

【分析与探究】 $f(x) = x$ 有等根, $a \neq 0$ 转化为判别式 $\Delta = 0$, 得 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$.

根据函数的定义域求值域, 关键在于确定其单调性. 由 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, 得 $2n \leq \frac{1}{2}$, $n \leq \frac{1}{4}$, 而这时 $f(x)$ 为增函数. 于是, 由 $f(m) = 2m$, $f(n) = 2n$ 及 $m < n \leq \frac{1}{4}$, 得 $m = -2$, $n = 0$.

即存在 $m = -2, n = 0$ 使 $f(x)$ 的定义域为 $[m, n]$, 而值域为 $[2m, 2n]$.

【反思与总结】 已知定义域和值域, 实际上是已知函数值问题, 即利用单调性将已知条件转化为在相应点的函数值已知, 从而求解问题.

【问题 8】 已知函数 $f(x)$ 满足关系 $axf(x) = 2x - bf(x)$, $ax + b \neq 0, f(1) = 1$, 且方程 $f(-x) = -2x$ 有唯一解.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式.

(2) 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_n = \frac{1}{2}f(a_{n-1})$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}$) 且 $a_1 = 2$, 求 a_n .

【分析与探究】 (1) 观察已知条件的特点, 先用 a, b 表示 $f(x)$,
$$f(x) = \frac{2x}{ax+b}.$$

由 $f(1) = 1$ 得 $a + b = 2$.

由 $f(-x) = -2x$, 得 $[ax + (1-b)]x = 0$.

① 当 $a \neq 0$ 且 $b = 1$ 时, 即 $a = b = 1$ 时, $f(-x) = -2x$ 有唯一解, 这时, $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

② 当 $a = 0, b = 2$ 时, $f(-x) = -2x$ 有唯一解, 这时, $f(x) = x$.

(2) 由于 $a_n = \frac{1}{2}f(a_{n-1})$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}$), 需分别对 $f(x)$ 的不同表达式进行讨论.

① 当 $f(x) = x$ 时, 由 $a_1 = 2$ 及 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 可推得 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ ($n \geq 1$).

② 当 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ 时, 由 $a_1 = 2$ 及 $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$, 得 $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{2}{5}, a_4 = \frac{2}{7}, \dots$, 猜测 $a_n = \frac{2}{2n-1}$ ($n \in \mathbf{N}$). 事实上, $\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$, 即 $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = 1$, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 成等差数列, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + (n-1) = \frac{2n-1}{2}$, 因而有 $a_n = \frac{2}{2n-1}$.

【问题 9】 上海市电信营业区内住宅电话通话费为首次 3 min 付 0.20 元,以后 0.10 元/min(不足 3 min 的以首次 3 min 计,以后不足 1 min 的以 1 min 计). 设符号 $[a]$ 表示不超过正数 a 的最大整数, $\langle a \rangle$ 表示不小于正数 a 的最小整数.

(1) 画出一通电话 6 min 内的通话费 y 关于通话时间 t 的函数图像;

(2) 如果一通电话 t min ($t \in \mathbf{R}$), 写出通话费 y 关于通话时间 t 的函数解析式;

(3) 如果计划通话时间较长(超过 3 min), 可分别采用一次拨打或几次拨打(费用相同取拨打次数少的). 试设计一种使通话费最省的方案(可用最省通话时间 t 的函数解析式来表示).

【分析与探究】 通话费 y 只能是 2 角, 3 角, 4 角, 5 角, …… , 且不超过某整分钟时, 按前一金额付费, 一旦超过, 按下一时段付费, 例如, 正好打满 3 分钟, 通话费 2 角, 而若为 3 分 1 秒, 则付费与 4 分钟相同, 为 3 角. 因此有

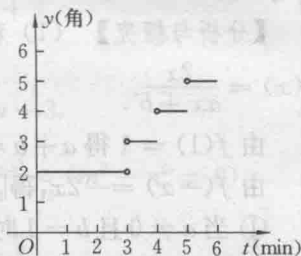


图 1-1

(1) 所画图像为分段函数, 如图 1-1 所示.

$$(2) y = \begin{cases} 0.2, & \text{当 } 0 < t \leq 3 \text{ 时;} \\ 0.2 + \langle t + 3 \rangle \times 0.1, & \text{当 } t > 3 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$(3) y = \begin{cases} \frac{\langle t \rangle}{3} \times 0.2, & \text{当 } \langle t \rangle \text{ 是 3 的倍数时;} \\ \left[\frac{t}{3} \right] \times 0.2 + \left\langle t - 3 \left[\frac{t}{3} \right] \right\rangle \times 0.1, & \text{当 } \langle t \rangle \text{ 不是 3 的倍数时.} \end{cases}$$

5. 总结

函数是数学学习的一个核心内容, 函数解析式是函数内容的起点. 求函数解析式, 如果已知函数的类型, 常常把已知点代入, 确定待定系数, 求出解析式; 如果是已知函数具备某些性质, 往往是已知一个区间上函数的解析式, 去求另一区间上函数的解析式, 对于较多性质交织在一起的函数, 常常通过画图帮助解决, 如利用对称性、周期性等; 如果是已知函数方

程,则利用奇偶性或倒数关系,得出关于 $f(x)$ 的新方程,通过解方程组求出 $f(x)$;在应用题中,需要把问题情境中反映出来的变量关系用等量表示,进而写出所需函数的解析式;如果所求函数是由已知函数经过某种运算而得到(如专题实践 1.1 第 4 题),则需先分别求出所求函数的各个组成部分.在函数问题中,自变量的取值范围是需要考虑的.

专题实践 1.1

1. 设函数 $y = f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数,它在区间 $[0, 1]$ 上的图像为如图 1-2 所示的线段 AB,则在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) =$ _____.

2. 函数 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = cx$ (a, b, c 为常数,且均不为零, $a^2 - b^2 \neq 0$), 求函数 $f(x)$ 的解析式.

3. 设 $f(x)$ 是关于 x 的二次函数, $g(x) = 2^x \cdot f(x)$, 且 $g(x+1) - g(x) = 2^{x+1}x^2$, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式.

4. 二次函数 $f(x) = \frac{1}{a}x^2 - 4x + 1$ ($a \neq 0$, 且 $a \in \mathbf{R}$) 在 $0 \leq x \leq 1$ 内有最大值 M 和最小值 m , 设 $F = M - m$, 确定 F 与 a 的函数关系式 $F(a)$.

5. 某人乘上班,早上 7:00 出发乘公共汽车,汽车以平均 30 km/h 的速度行驶了 20 min,但遇上了堵车,无法前进,为了不迟到,他立刻下车步行,设步行速度为平均 12 km/h,终于在 7:30 及时赶到单位(假设此人家与单位在一条直的路线上).

- (1) 试建立这段时间内此人所经过路程 s 与所用时间 t 之间的函数关系式;
- (2) 试建立这段时间内此人离家距离 s 与时刻 t 之间的函数关系式;
- (3) 求此人家与单位的距离.

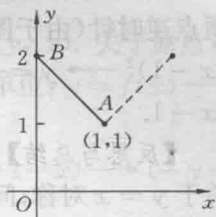


图 1-2

1.2 函数图像变换

1. 认识

【问题 1】 实常数 a, b 是怎样的值时,函数 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 与它的反函数的图像重合?

【分析与探究】 由 $y = ax + b$, $a \neq 0$, $ax = y - b$, 得 $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$, 所以,其反函数为 $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

图像重合反映在解析式上就是函数与反函数相同,必须且只须

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = a, \\ -\frac{b}{a} = b. \end{cases} \quad \text{解得 } a = 1, b = 0; \text{ 或 } a = -1, b \text{ 为任意实数.}$$

【问题 2】 求与二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图像的顶点相同、开口大小相等、方向相反的图像的解析式.

【分析与探究】 所求二次函数的图像是由已知二次函数图像绕其顶点逆时针(由于图像本身的对称性,顺时针也可)旋转 180° 而得. $y = (x-1)^2 \rightarrow y = -(x-1)^2$, 即所求二次函数解析式为 $y = -x^2 + 2x - 1$.

【反思与总结】 问题 1 中反函数与函数相同,也可理解为函数本身关于 $y = x$ 对称;问题 2 中旋转 180° 可以看成是对称轴相同、顶点相同、开口大小相等、开口方向相反.

【问题 3】 已知函数 $f(x) = \sin 2x$, $f(x+t)$ 图像关于 y 轴对称,则 t 的一个可能值为_____.

【分析与探究】 图像关于 y 轴对称,即 $f(x+t)$ 为偶函数,从特殊函数入手, $\cos 2x$ 为偶函数,当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$;更进一步, $-\cos 2x$ 也是偶函数,这时, $t = \frac{3}{4}\pi$;一般地,当 $t = \frac{\pi}{4} \cdot (2k+1)$ 时, $f(x+t)$ 为偶函数.

2. 理解

【问题 4】 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(a+x) = f(a-x)$, 求证: $f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称.

【分析与探究】 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称意为: 若 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图像上的任一点, 则其关于直线 $x = a$ 的对称点 $P'(2a - x_0, y_0)$ 也在 $y = f(x)$ 的图像上. 用已知条件推理出这一事实, 问题就获证明.

由已知 $f(a+x) = f(a-x)$, 得 $f(2a - x_0) = f[a + (a - x_0)] = f[a - (a - x_0)] = f(x_0) = y_0$.

所以, $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称.

【反思与总结】 函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称的另一种常见条件是： $f(2a+x)=f(-x)$ ；一般地，已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(a+x)=f(b-x)$ ， a, b 为实常数，则 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称。

【问题 5】 将 $y=-1-2^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，得到图像 C_1 ，将 C_1 的图像关于原点对称得到 C_2 ，将 C_2 的图像沿 x 轴向左平移一个单位得到 C_3 ，求 C_3 所对应的函数解析式。

【分析与探究】 关于 $y=x$ 对称： $(x, y) \rightarrow (y, x)$ 。关于原点对称： $(a, b) \rightarrow (-a, -b)$ 。 $y=f(x)$ 向左平移一个单位： $y=f(x) \rightarrow y=f(x+1)$ 。将三种变换按顺序完成如下：

$$y=-1-2^x \xrightarrow{(\rightarrow x=-1-2^y)} y=\log_2(-1-x) \xrightarrow{(-y=\log_2(x-1))} (-y=\log_2 x) \xrightarrow{y=\log_2 x}$$

3. 掌握

【问题 6】 已知函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称，求 a 。

【分析与探究】 可以通过找特殊点定出 a ， $x=0$ 关于 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称的直线为 $x=-\frac{\pi}{3}$ 。因此有 $\sin(2 \times 0) + a\cos(2 \times 0) = \sin(-\frac{2}{3}\pi) + a\cos(-\frac{2}{3}\pi)$ ，即 $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})a$ ，所以 $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

也可以从对称轴的性质入手，对称轴 $x=-\frac{\pi}{6}$ 与函数图像的交点为最高或最低点。所以， $\sin(-\frac{1}{3}\pi) + a\cos(-\frac{\pi}{3}) = \pm \sqrt{1+a^2}$ ，即 $(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2})^2 = 1+a^2$ ，只有一解： $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【反思与总结】 形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数图像既是轴对称图形，又是中心对称图形，所有经过最高点或最低点与 x 轴垂直的直线都是对称轴，所有与 x 轴的交点都是对称中心。