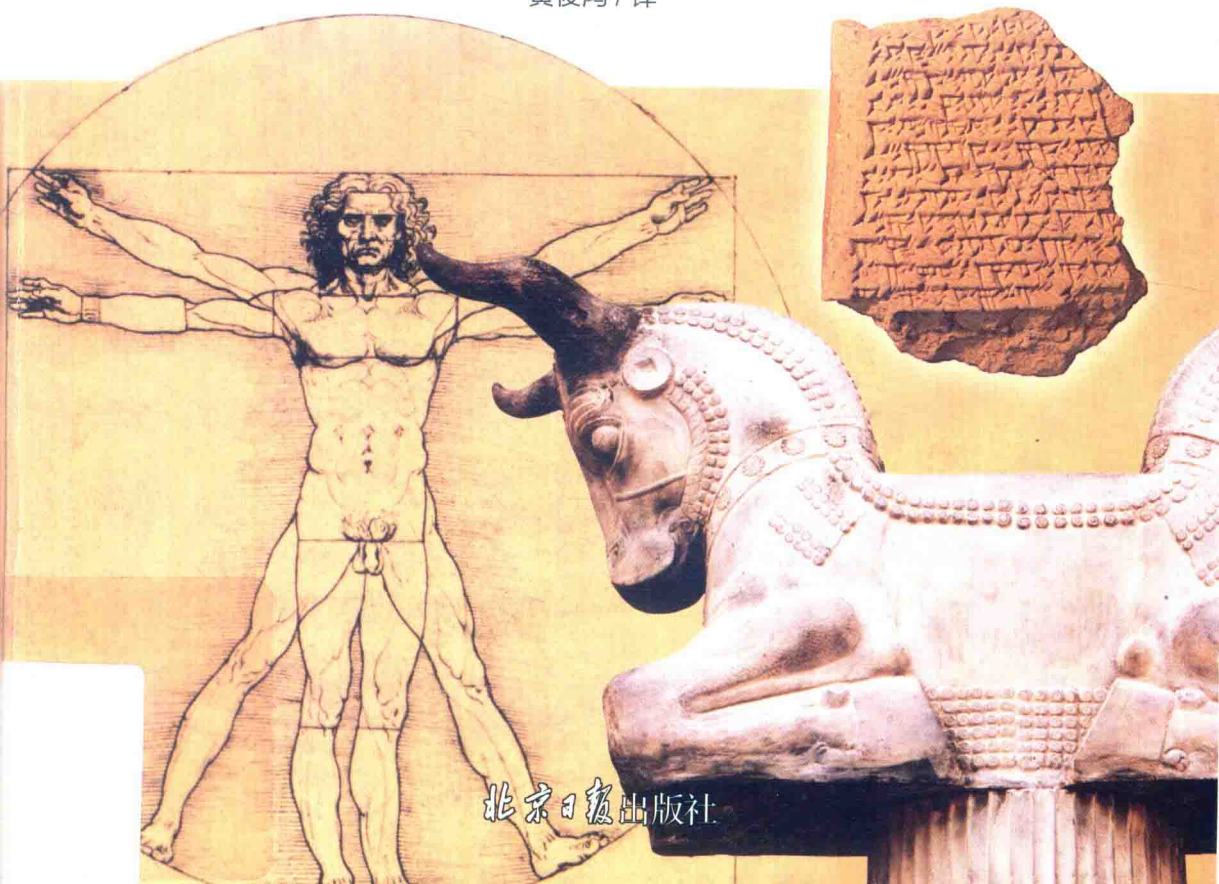




几何的故事

从古巴比伦测量师到达·芬奇

[法] 让-路易·布拉昂 (Jean-Louis Brahém) / 著
黄俊鸿 / 译



北京日报出版社

几何的故事

从古巴比伦测量师到达·芬奇

[法] 让-路易·布拉昂 (Jean-Louis Brahem) / 著

黄俊鸿 / 译

北京日报出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

几何的故事：从古巴比伦测量师到达·芬奇 / (法) 让-路易·布拉昂著；黄俊鸿译. —北京：北京日报出版社，2016.8

ISBN 978-7-5477-2107-0

I. ①几… II. ①让… ②黄… III. ①几何学—普及读物 IV. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 159808 号

Original edition: Histoires de géomètres... et de géométrie

© Editions Le Pommier - Paris, 2011

Current Chinese translation rights arranged through Divas International, Paris
巴黎迪法国际版权代理 (www.divas-books.com)

著作权合同登记号 图字：01-2014-2578 号

几何的故事：从古巴比伦测量师到达·芬奇

出版发行：北京日报出版社

地 址：北京市东城区东单三条8-16号 东方广场东配楼四层

邮 编：100005

电 话：发行部：(010) 65255876

总编室：(010) 65252135

印 刷：保定金石印刷有限责任公司

经 销：各地新华书店

版 次：2016年8月第1版

2016年8月河北第1次印刷

开 本：710毫米×1000毫米 1/16

印 张：17.75

字 数：340千字

定 价：59.00元

版权所有，侵权必究，未经许可，不得转载

前言

如果说这本书有一个面积的话，那么它一半是图，另一半是文字。这样的均分对几何的语言来说是重要的。几何是一门既不能离开图，又不能缺少文字的学科。本书中，文字和图共同构建故事的背景，描绘故事中的那些几何挑战。四个主角依次登场，一位测量师，一位园丁，一位泥瓦工，时间从古巴比伦一直跨越到文艺复兴的法国。实在抱歉，还剩最后一位：莱昂纳多·达·芬奇。这些几何的践行者们并不孤独，还有其他角色要么辅佐他们，要么和他们对着干，或者干脆就不理解他们。故事里的风景、天气、场景与道具的材料和质地也不能被忽略，因为几何存在于生活中。同时，为了让读者能感受到几何实践的乐趣，比如主角们成功后的喜悦，我们也不能回避故事的多彩而具有启发性的环境。正是这个丰富的环境孕育出了这些故事和这些实际场景下遇到的几何问题，并且最终影响了问题的解决方法。这些解决方法有理有据，有时甚至是很别致的。

这些图试图还原真实，模仿真实，但我们知道，它也常常偏离这个初衷：它会让人联想，让人分心。我任由它这样。

同样，文字也会引申出别的意思来。现实动摇了，虚构占了上风，我也任由它这样，但是几何逻辑的正确性不会受到侵犯。

这部作品属于理性虚构。没有什么能证明它是纯粹虚构的，也没有什么能证明相反的情况。只是有经验的读者可能会对本书中一些虚构的部分以及几个新奇的几何幻想感到惊讶，而最不怀好意的读者可能会怀疑我在编造谎言。他们不相信这本书像宣传的这么好。

正如德尼·盖之所言：“应该给科学的真理加上美妙的故事，这样人们才会迷恋它。”

让-路易·布拉昂

2011年9月23日于巴黎

目 录

前 言

第 1 章 巴比伦的土地测量员

1.1 巴比伦, 公元前 5 世	2
▶ 一个 5000 年前的古老故事	2
▶ 1600 年后	6
1.2 我的工作	8
▶ 我是测量师	8
▶ 我的工具以及它们的用途	10
1.3 我的手艺	15
▶ 将一条直线分成长度相等的几段	15
▶ 无所不能的圆	19
▶ 角度不必量	21
▶ 面积不等的相似图形	23
▶ 面积相同形状不同的图形	25
1.4 十二项任务	39
▶ 第一项, 经过一点, 画出一道墙使它平行于另一道墙	39
▶ 第二项, 化正方形为矩形	41
▶ 第三项, 化三角形为正方形	42
▶ 第四项, 经过已知一点, 将四边形分成面积相等的两部分	44
▶ 第五项, 将三角形分成一个梯形和一个三角形, 两部分面积相等	46
▶ 第六项, 忘记圆心的蓄水池	48
▶ 第七项, 铅皮圆顶	52
▶ 第八项, 三角形土地上的正方形宅子	55
▶ 第九项, 正方形宅子建在土地的 $1/4$ 面积上	57
▶ 第十项, 蓄水池浇灌的三块地	58
▶ 第十一项, 老庙塔的体积	61
▶ 第十二项, 巴比伦梯形	64

第 2 章 埃拉托色尼的花园

2.1 亚历山大港, 公元前 3 世纪	72
▶ 亚历山大的埃及	72
▶ 亚历山大港, 科学之都	73

▶ 埃拉托色尼，亚历山大港图书馆馆长	74
▶ 埃拉托色尼家的园丁	74
2.2 埃拉托色尼的家	75
▶ 我东家的宅子	75
▶ 最后的气仙	76
▶ 几何之家	76
2.3 为埃拉托色尼先生工作的一年	78
▶ 没有铺砌完的前院	78
▶ 大麦和小麦	81
▶ 阿基米德先生的螺旋	84
▶ 埃拉托色尼先生的黄金白银	87
▶ 种植调味料的土地	98
▶ 黄金椭圆	104
▶ 夫人的院子	109
▶ 和方块有关的事	114
▶ 地球的一圈	123

第 3 章 毕卡迪学徒

3.1 法国，13 世纪	134
▶ 布汶之战	134
▶ 谁是维拉尔·德奥内库尔	135
▶ 旅行笔记	135
▶ 维拉尔的学徒	136
3.2 旅行的泥瓦工	137
▶ 旅途中的时光	137
▶ 回忆的时光	138
3.3 维拉尔之路	139
▶ 博韦的灾难	139
▶ 走廊和草地	143
▶ 触不到的地方	146
▶ 一个关于枕堂的故事	155
▶ 石头之花	165
▶ 大桶套小桶	172
▶ 艾莱特河上的磨坊	175
▶ 螺旋和螺钉	187
▶ 五把斧子	198

第4章 遗失的手稿

4.1 昂布瓦斯, 16 世纪	212
▶ 与国王	212
▶ 绘画论	213
4.2 作伪与作伪的利用	214
4.3 错觉	218
▶ 透视	218
▶ 画阴影	241
▶ 反射光的绘制	258
▶ 彩虹	270
4.4 游戏和把戏	273
▶ 有意思的达·芬奇	273
▶ 透视	273
▶ 阴影的绘制	275
▶ 绘制反射光	275
▶ 彩虹	276
致 谢	278

第 1 章

巴比伦的土地测量员

1.1 巴比伦，公元前 5 世纪

一个 5000 年前的古老故事

新月沃地

测量师的故事发生在公元前 6 世纪美索不达米亚，幼发拉底河沿岸的巴比伦王国。

美索不达米亚是一个灌溉便利的平原，它构成了一个“新月沃地”的东面部分。这一地带环绕阿拉伯沙漠，沿地中海沿岸直抵

富饶的尼罗河谷。（图 1）

商旅们往来于这个月牙形地带，商品与知识在这里传播和流通。

技艺在这里逐渐累积，人们仔细地记录下那些遥远的发现。我们的测量师知道，很久以前在美索不达米亚诞生了苏美尔文明，它是人类最早期的文明之一。

新月沃地

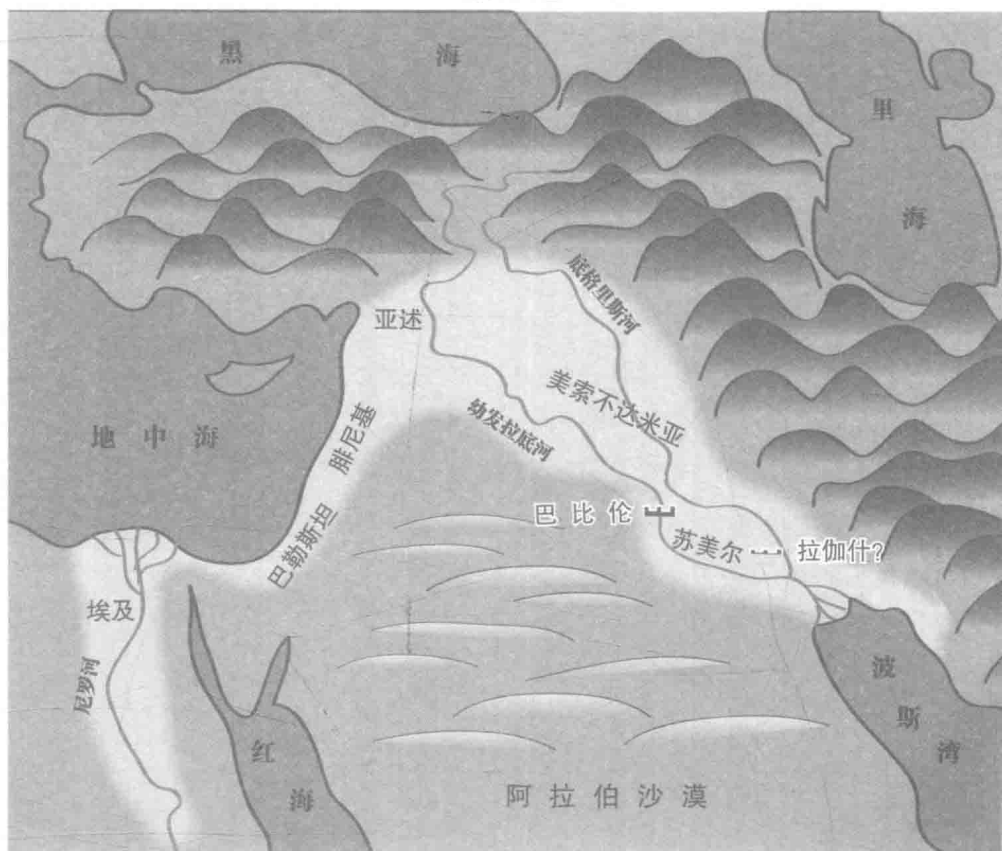


图 1. 公元前 3000 年，测量法、几何学以及成文法就在这里出现了。

历史始于苏美尔

苏美尔文明位于伊拉克南部，幼发拉底河与底格里斯河之间。这两条河交汇形成阿拉伯河，并最终流入波斯湾。

苏美尔所在的这个冲积平原拥有丰富的黏

土，同时日照极强。苏美尔人将黏土晒干制成黏土砖，他们还发明了用于批量生产黏土砖的工具，用于计算黏土砖数量的数字，以及黏土砖流通中所需的货币。同样是在黏土砖上，抄书吏记录下那些词汇和数字，语句和计算。（图2）

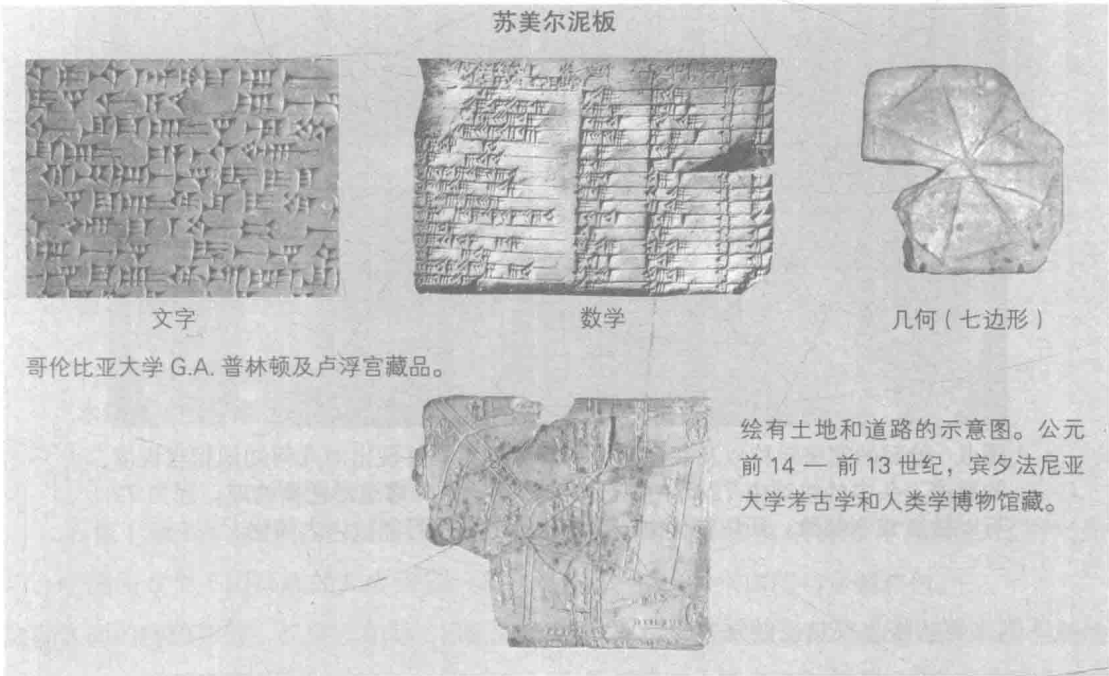


图 2. 如果这些泥板当初没有被烤干，今天的我们就见不到它们了。

公元前 3000 年，苏美尔人建造了最早的城市。这些方方正正的城市如同建造它们的砖一样，整齐而坚固。朴素的城墙开有宏伟的城门，庄严地迎接那些带来新技术和新发明的外来客。他们的技艺在苏美尔得到保护，新知在这里是受欢迎的。

这里的法律详细而严厉：产权与家庭受到保护，商业行为得到规范，公正适用于每个人。法律用书写的方式记录并颁布，没有人能忽视它。法律是苏美尔秩序与繁荣的保证。君主们身体力行。他们的执政行为不因一时冲动，而是依据这些约束他们权力的法典。

拉伽什国王古地亚

拉伽什是苏美尔的都城之一，今天的人们已经找不到它的踪迹，但也许它还被埋在某一座城市之下，考古学家们依然在努力寻找它。今天看到的文字记载中提到过它，却都没有说明它的具体位置。只有那些石刻的古地亚国王像还在向我们诉说这座城市逝去的宏大。

拉伽什国王古地亚（公元前 22 世纪）毫无疑问是第一个让人雕刻自己形象的君主，他把自己的许多刻像祭献给神或是分发给自己的人民。（图 3）



图 3. 脸部的完美对称以及头巾图案的细致描绘都体现出对几何知识相当程度的掌握。头巾的纹饰由 72 行、每行 6 个严格一致的螺旋形图案构成。因为 72 可以被 6 或 8 整除，所以制作这一头巾纹饰的过程可能被大大简化。

不同于那些将表现自己的强力形象或是战场上的英姿刻画到石头或者青铜上的傲慢君主们，古地亚国王从不展示自己的力量或愤怒。这位端坐的英俊男子的身上表现不出丝毫的攻击性。他双手平和地交握，双眼睁开。一块泥板置于他的双膝之上，泥板上刻画的是一座宫殿的平面图，旁边整齐地摆放着一支笔和一把刻度尺。虽然在这尊石雕上并没有摆放直角尺，但是我们可以看见宫殿的平面图上完美的直角。古地亚国王此刻可能正在祷告。这幅宫殿平面图，这块泥板，这些绘图工具，以及这个使用刻度尺来作图的举动对他来说或许是神圣的。放在这位平和的国王膝上的，是几何相似性理论的雏形，此刻的国王似乎正在进行一场无上的圣礼。（图 4 和图 5）

拉伽什宫殿平面图

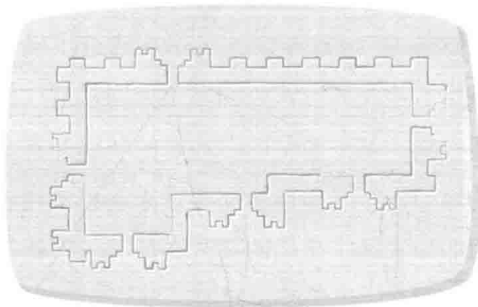


图 4. 宫殿的宏大让人们围绕整座城市的城墙与城门的规模产生无尽遐想。

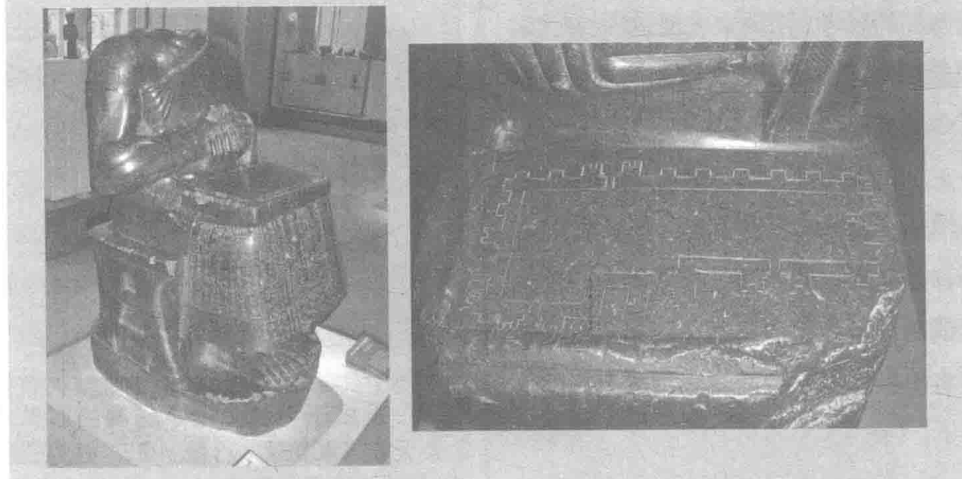


图 5. 坐着的古地亚国王膝上放着一块泥板，其上刻有一幅详细的平面图。一支笔放在图的左侧，与笔呈直角摆放的是一把刻度尺，它置于图的前方。石像的作者用黑色的石料来表现制作泥板所用的新鲜黏土，用一幅平面图来描绘原本是砖砌的宫殿，这样的处理表现出了很高的灵活度。

石像上雕刻家呈现的这把刻度尺设计精巧，它能用 6 个不同等级的刻度测量。不同刻度区间的间距相等，长度也相等。（图 6）

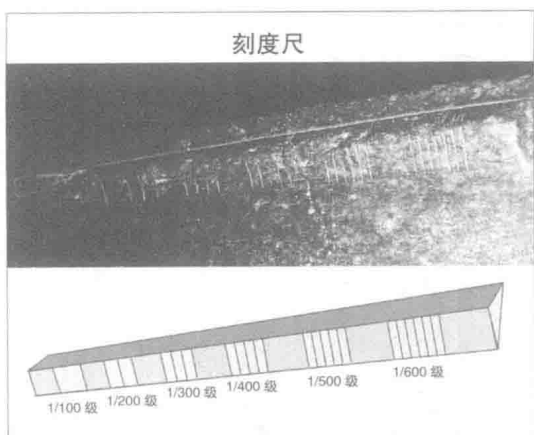


图 6. 卢浮宫所藏刻度尺。

几何相似性的发现

石雕上的这幅平面图是宫殿实际尺寸的缩小版。如果平面图的大小是宫殿的 $1/1000$ ，那么宫殿就是平面图大小的 1000

倍。我们会说这幅宫殿平面图的比例尺是 $1 : 1000$ 。平面图与宫殿相似。

古地亚的测量师们知道如何根据泥板的大小来缩小他们实地量得的尺寸。他的建筑师们则知道如何根据实际修建面积放大图纸上的设计尺寸。这种不同尺寸之间的比例转换构成了几何相似性。在实际操作中，这涉及从绘图使用的刻度尺到实地测量使用的以绳结为刻度的长绳的转换。

从绘制到施工，从图画到实物，这之间的转化其实是人类一直以来都在使用的一种方法：将问题化小以便解决。

实现几何相似性的过程是一个思考的过程。比如看地图的时候，你需要考虑将地图上厘米级的尺寸按照 $1 : 200000$ 的比例尺放大，也需要将实际千米级的距离缩小为地图上的尺寸来读。

这个智力上的努力过程一定促进了苏美尔绘图师们的思考。用图来表现现实的时候，这幅图就变得至关重要了，绘制的精确度是必不可少的。人们在绘图的过程中发现错误，学会修正；发现问题，学会解决。

直角尺和圆规的应用催生了新的图形。绘图师仔细琢磨这些线条，于是直角、圆形和平行线出现了。他们将这些图形刻在泥板上，再将泥板烤干，后世便能够永远记得这些图形了。（图7）

1600年后

巴比伦，美索不达米亚都城

古地亚的时代过去16个世纪之后，拉伽什西北方的巴比伦已经是一个拥有10万人口的城市。除了一些令人匪夷所思的建筑以外，巴比伦总的来说是一个理性的都城。它的城市布局崇尚直角、对称，以及一些大的轴线。幼发拉底河两岸筑起了河堤以备汛期，而河上的水坝则为枯水期做蓄水准备。饮用水取自城市上游，众多的水渠保证了巴比伦周围600公顷优质农田的灌溉以及城市居民的饮水。（图8）

尼布甲尼撒二世时期修建的长达8千米的城墙，使巴比伦饮用水和食品的供应安全得到保障。这位巴比伦

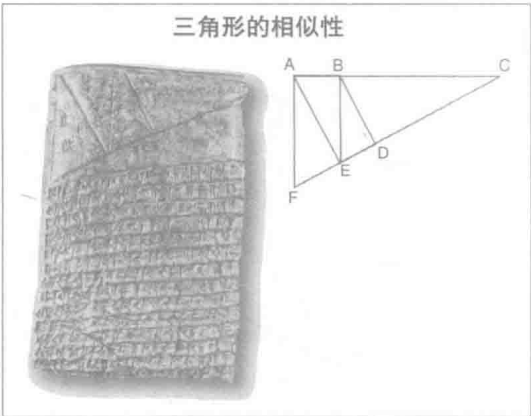


图7. 发掘于伊拉克哈尔马勒的苏美尔泥板（公元前1800年）。AE、BE、BD三条直线分出了7个相似三角形，分别是三角形ACF、AEF、AEC、ABE、BCE、BDE和BCD。

公元前6世纪的巴比伦

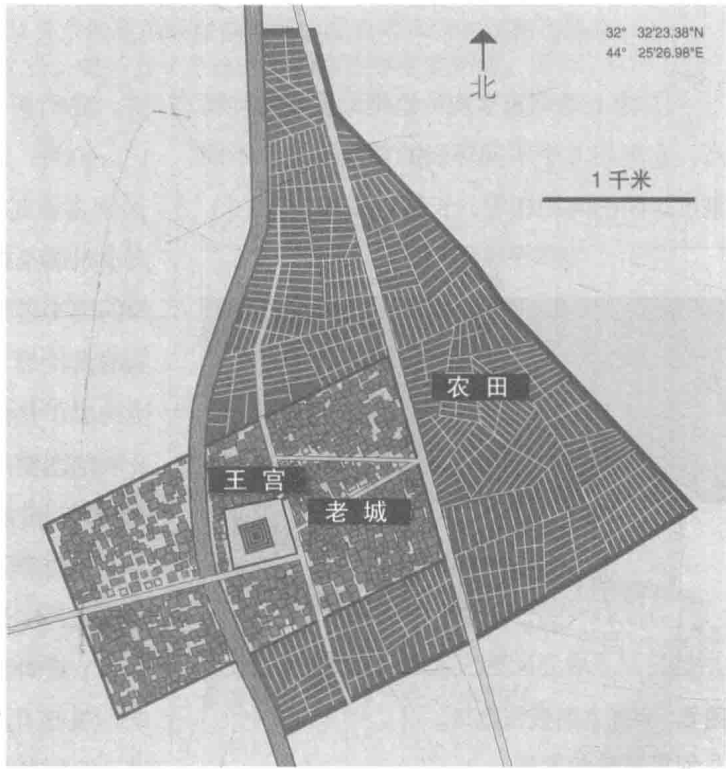


图8. 城市占地400公顷，人口密度很可能在每公顷250人左右，这样，整个城市有大约10万人。城市周围农地的面积为600公顷。如果城市被包围，人均60平方米的农田依然可以保证巴比伦人新鲜食物的供给。

国王于公元前 604 年至公元前 562 年在位。为了保护自己出生的这座都城，这位精力充沛的精明君主打败了所有威胁到他的敌人。城市在他在位期间得到了加固和扩建。同时，他也注意确保那些保护个人、产权及贸易的法律得以执行。

他执政期间是巴比伦的繁荣时期。财富流通于银行家和商人之手。土地与它的产出就是财富。于是土地被测量，被赋予价值。

巴比伦测量师

幼发拉底河以及它带来的泥沙世代滋养着巴比伦的农田。这些农田的耕种追溯至久远的时代。农田沿着河流和道路分布，装饰着大地。这些农地不断被复杂地切分和整合，但它们仍然肥沃，为人们带来收益。人们买卖土地，于是土地被分割和合并。土地拥有价值。

有一位测量师测量这片由复杂模糊的几何图形组成的富饶风景。他熟悉那些界定土地产权，交易与传承规则的法律。他了解那些图形，所以他会估算土地的面积。他懂数学、书写和绘图。

测量师属于辅助司法人员。他需要负责

任，也被人们尊敬。他的计算结果不容争辩。这个正直独立的人保障遗产的继承，土地的交易，法律的执行，不偏不倚。涉及灌溉的一些问题也需要他来解决。企业主也会咨询他的建议。

他的手艺来自数代测量师们的积累，最远可以上溯到苏美尔时期。他的师傅培养了他，他再把自己的手艺传给自己的徒弟，同时他会将自己的经验记录在泥板上，使其得以保存。

泥板这种材料经济易得，巴比伦人在泥板上记刻生活百态，歌谣小调，以及契约收据。而所有这些记录，只要一点儿水就可以抹去。

“泥板将浸水。”当汉谟拉比，那位公元前 18 世纪的巴比伦国王，宣布一份合同解除时，他就会说上这样一句话。

像今天的纸一样，泥板是一种普通又脆弱的材料。如果它没被烤干，就可以重新使用。

就是在泥板这样的“活页纸”上，我们的测量师将记述他自己的经历。（图 9）

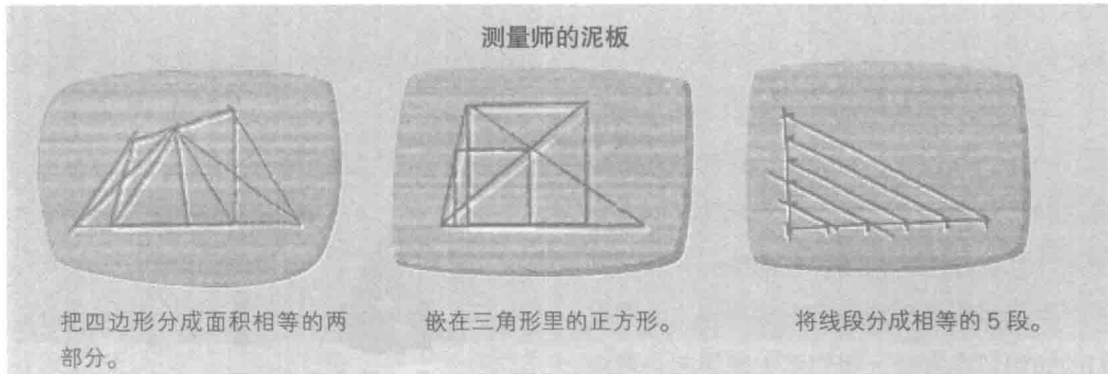


图 9. 在这些想象的泥板上，测量师讲述了他的职业以及他在巴比伦农田里的几何征程。

1.2 我的工作

我是测量师

巴比伦的菜地

我一辈子都在测量巴比伦的这些小菜地。(图1)

涉及菜地的买卖、交换、分割，菜地的主人就会来找我。我熟悉这座城市的法律和规矩，我也会丈量和计算。当人们为分配土地遗产的事吵闹不休的时候，我的出现以

从东面看到的巴比伦

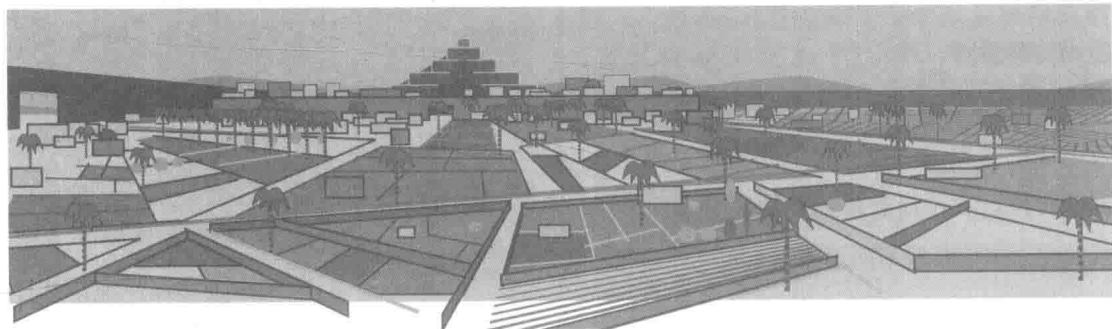


图1. 农田在城内，外面是一圈高高的城墙，墙外还有护城河。水渠浇灌下的农田富饶高产。天气炎热的时候，满城充满青草的香气。

及我公正的测量可以结束争吵并且让各家满意。法律的严格以及公正保证了巴比伦的繁荣。不管是对于菜地还是别的土地，我的测量可以和我们的法律一样精确。我信得过我的手艺，虽然有些时候我不能用语言解释清楚我为什么这样做或那样做。人们尊重我的测量结果，我也因此感到负有很大的责任，我不能出错。

测量

测量需要两个人，分别在量绳的两端。我有一位助手。(图2)他记忆力好，会算术，动作敏捷，眼疾脑快，测量精准。跟他工作很愉快，也很放心。他将来也会成为一名正式测量师。和他一样，最开始我也跟着一个师傅学，师傅把手艺和工具传给了我。我的师傅也是从他自己的师傅那继承了这些。就这样，一代传一代。

我掌握的是初级的数学知识：跟一般的商人一样，我数数，做加减，我的顾客们也是这样理解我的工作的。而宫廷的学问家们用乘法代替加法，除法代替减法。我们的国王对他们算出的天文数字深深着迷。学问家们的知识留在宫廷，他们不太瞧得起一般商人和测量师的算术。

我的测量队伍

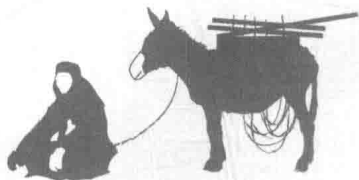


图2. 这是我的助手，以及一头驮着绳子和木桩的驴。

在巴比伦，我们的长度单位是肘尺。我知道，其他地方的1肘尺和我们的1肘尺长度并不都一样。这很好理解，因为1肘尺是一个人的肘部到中指指尖的长度（图3），而人和人的身材有差异。所以其他地区来的商人需要根据我们的肘尺长度重新衡量他们卖的绳子和布匹的尺寸。

我把1肘尺的长度深深地刻在我家墙上，这是大家都认同的长度。所以有关测量结果的争辩往往止于测量师家的墙面前。

土地的面积用长度来表示

当我需要给出一块土地的面积的时候，以肘尺为单位，我用同这块土地面积相等的正方形的边长来表示，不管这块地是什么形状的。这个方法就是化方求积法。（图4）

在这个方法中，一块土地被看成由很多边长为1肘尺的小正方形组成。这些小正方形的总数通常很大，大到我不会写，农民通常

也不认识的程度。但是当我用一根简单的绳子来表示和土地面积一样大的正方形的边长时，他们就很容易想象这个面积了。他们关心的是土地买卖和分割，至于这块地包含多少个可以种植的小正方形对他们来说无关紧要。

需要注意的是，当我们把一个正方形的面积扩大为原来的2倍时，新正方形的边长并没有变为原来边长的2倍。而当我们把一个正方形的边长变为2倍时，新得到的正方形面积是原来的4倍。（图5）

我能写到60，再往后，数字就跟句子一样长了。我的助手还不会写，但是他可以

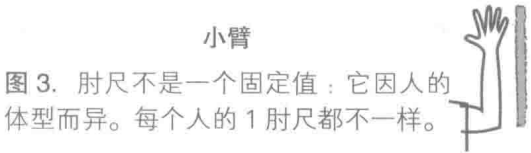


图3. 肘尺不是一个固定值：它因人的体型而异。每个人的1肘尺都不一样。

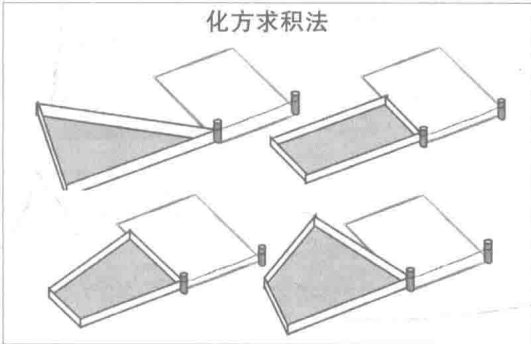
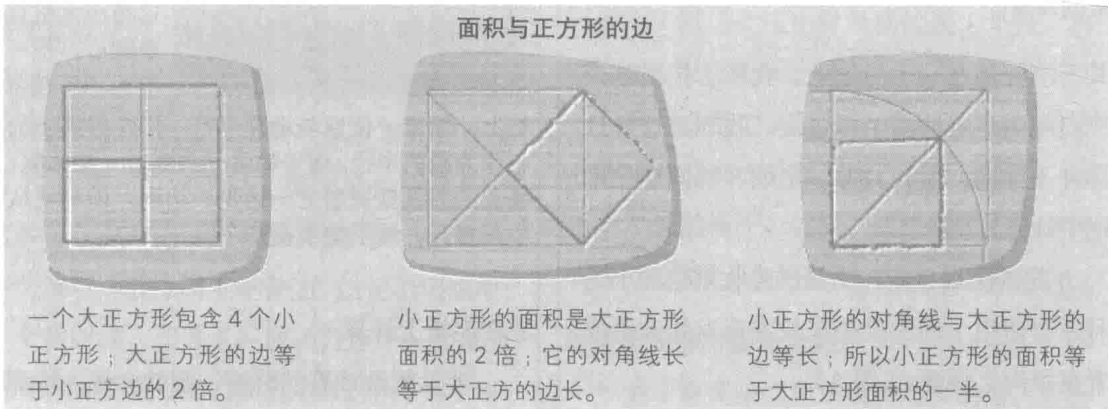


图4. 两根木桩间的绳子就是与要测量的土地面积相等的正方形的一边。后面我会讲到我是具体如何操作的，特别是著名的化圆为方。



一个大正方形包含4个小正方形；大正方形的边等于小正方形边的2倍。

小正方形的面积是大正方形面积的2倍；它的对角线长等于大正方形的边长。

小正方形的对角线与大正方形的边等长；所以小正方形的面积等于大正方形面积的一半。

图5. 如果大的数字不会写也不会读，可以将要测量的土地化成正方形，用正方形的边长表示土地的面积。

在绳子另一端对我喊出这些数字。

我的工具以及它们的用途

我是怎样测量土地的

我的测量工具（图 6）实用而轻便：一些小木桩，几根绳子，一个大直角尺，以及一个圆规。

测量菜地时，用大直角尺画直角再好不过了。直角可以是圆的 1/4，可以是正方形的一个角，也可以是直角三角形中的直角；直角尺可以用来做正交线和铅直线。它可以保证小木桩与地面垂直，量绳与小木桩垂直。（图 7）测量长度的时候，如果一段测量距离的终点

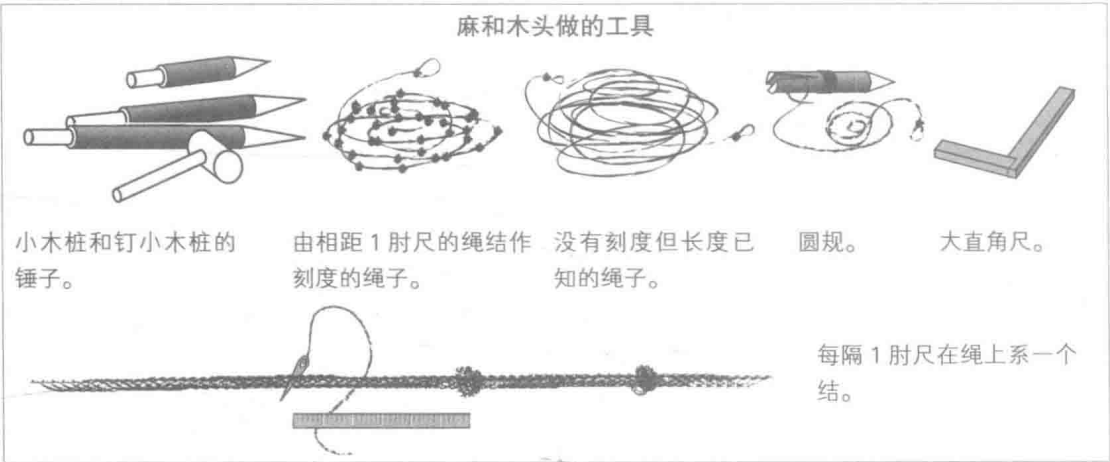


图 6. 这些工具我用了一辈子。我弄丢过几根木桩，一根绳子被狗咬断过，驴踩断了一个大直角尺。工具坏了换新的很容易。



图 7. 水平的刻度绳在两根高度相等的铅直木桩间绷紧。

并不刚好落在一个绳结上，我就会把离这个终点距离最近的绳结算进去。我知道这样计算并不准确，但我对每一个顾客都同样使用这个计算方法。

我的圆规只能在测量已经收割完的土地时才会使用：因为没法在长着青麦的地里或者在犁沟上画圆。（图 8）

有学问的人会说，圆就是一条上面每个点到某一个固定点距离都相等的线。

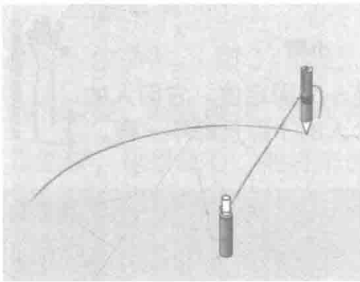


图 8. 需要在地上画圆的时候，我会将一根小木桩稳稳地钉在地上，这根小木桩就是圆心。把一根绳子系在木桩上，绷紧，使它与地面平行；用这根绳子的长作为圆的半径。绳子的另一头连着一把大笔，画圆的时候就握着它一边走一边画。而笔把从中间劈开，绳子就卡在这个劈开的缝里。

我在泥板上计算

我在泥板上计算

涉及复杂计算的时候，我就会带一块泥板到测量现场。（图 9）我会在泥板上仔细地绘制出菜地的形状，然后再带回家计算。