〔日〕大栗博司 Hirosi Ooguri 著

尤斌斌 译

用数学的语言看世界

美国加州理工学院理论物理研究所所长
日本东京大学Kavli数学物理学联合宇宙研究机构研究主任

大栗博司 Hirosi Ooguri **教授**

日本数学启蒙名作 | 让喜欢数学的人更喜欢数学 | 让恐惧、厌恶数学的人开始喜欢数学

日本神户大学文理综合素养课程选定数学读物
日本《每日新闻》《钻石周刊》推荐图书

突破传统数学教育教学顺序、方式 | 以“语言思维”讲解数学核心概念、原理 | 回归“基本原理”重新认识数学本质

TURING 图灵新知

［日］大栗博司 Hirosi Ooguri 著
尤斌斌 译

用数学的语言看世界

数学の言葉で世界を見たら
—
父から娘に贈る数学

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

用数学的语言看世界 / （日）大栗博司著 ； 尤斌斌译. -- 北京 ： 人民邮电出版社，2017.4
（图灵新知）
ISBN 978-7-115-44959-7

Ⅰ. ①用… Ⅱ. ①大… ②尤… Ⅲ. ①数学一普及读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第032719号

内 容 提 要

本书为著名理论物理学家大栗博司先生写给女儿的数学启蒙书，书中以用“数学语言”解读自然为线索，突破传统数学教育的顺序和教学方式，用历史事件、生动故事以及比喻直接讲解数学核心概念的原理与相关体系，并且讲解了把数学作为一门“语言”、用数学探索自然不可见结构的思维方式，是重新认识和理解数学的科普佳作。

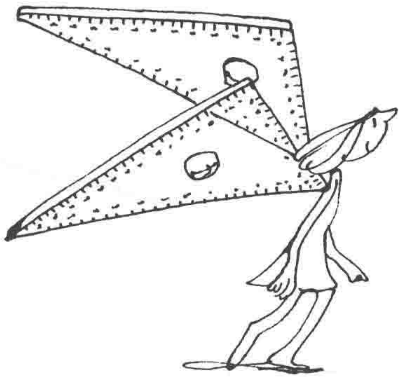
◆ 著　　　[日] 大栗博司
　译　　　尤斌斌
　责任编辑　武晓宇
　装帧设计　broussaille私制
　责任印制　彭志环
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路11号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：880×1230　1/32
　印张：7.875
　字数：197千字　　　　2017年4月第1版
　印数：1–4 000册　　　2017年4月北京第1次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2016-1575号

定价：46.00元

读者服务热线：(010)51095186转600　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第8052号

前言

给女儿的数学赠礼



在你出生之时，我曾想到，希望你在这世上幸福生活的同时，也能成为社会进步的推动者。虽然现代社会问题不少，不过我认为现在是人类历史中最精彩的时代。我也像每一位父母一样，希望自己的子女能够享受到世界上最好的东西。不过，仅仅这样并不够，这个精彩的时代是人类的智慧和努力构建出来的。我希望你不只是成果的受惠者，也希望你能成为创造者，为后世留下更好的成果。

21 世纪也可以说是一个不确定的时代，国际社会的规则也在不断改变。中国有 13 亿人，印度有 12 亿人。如果这些群体的大多数接受高等教育，进而从事知识研究事业，世界的面貌又会为之一新。说起这件事情，有些人担心日本和美国的发达国家地位会因此受到威胁，但我并不这么认为。如果发展中国家几十亿人获得良好的教育机会，也会随之诞生出很多解决目前社会问题的新途径。世界整体教育水平

上升，能够分配的“蛋糕”才能更大。这些情况，对于生于 21 世纪的你，既是挑战，也是一个巨大的机会。

在这个瞬息万变的世界中，自主思考的能力必不可少。欧洲有“七艺”(Liberal Arts)的教育传统，Liberal 原指“自由”，即“永不为奴”的意思。也就是说，Liberal Arts 是一种让人自主掌握命运、成为自由之人的素养。不管是成为领导者之时，还是面临预想之外的问题之时，都必须锻炼自主思考解决问题的能力。

在古罗马时期，“七艺”为逻辑、语法、修辞、音乐、天文，还有算术和几何。最开始的三项是为了磨炼“论证”的语言技术，我认为这三项排在前面，是因为它们是语言成形的必要条件，只有学会使用语言，才能获得思考的能力。

“七艺”之中的“算术”和“几何”都属于数学领域，我觉得很有趣。通常情况下，大家会认为语言领域的文学或外国语言文学属于文科，数学属于理科，但我认为数学是和语言学习一样的东西。数学可以精准地描述事物，这种描述能力超越了英语、日语等自然语言的表现能力。所以如果理解数学，就能看到那些无形、不可见的东西，想出从未想到过的新创意。

我在小学阶段并不那么喜欢“算术”这门课，不过进入中学后，“算术”演变成了“数学”，我也渐渐爱上了这门学科。带来这个转变的契机源于自主思考时给我带来的快感。当我解开数学题时，答案只有一个，别无其他。当碰到学校所学的知识无法解答的问题并且凭借自己的思考解出答案时，这种愉悦之情愈发强烈。而且我根本不需要去询问老师答案是否正确，因为自己就能独立判断。就像婴儿迈出第一步后，新的技能拓宽了对世界的体验范围。我希望你也能体会到这种愉悦。

本书是为了让你在 21 世纪度过有意义的人生而写的数学知识。当然，要想有体系地学习数学，最好还是使用学校的教材。如果把数学

当作语言，例如把数学比喻成法语，那么这本书并不是从零开始一步步教语法和单词，而是一本实用的会话集。带上它，你可以去法国旅行，用法语在巴黎的餐厅点餐。甚至服务员在介绍“今日的推荐菜品”时，你能马上理解并判断是否应该点这道菜。或者当你去参观卢浮宫，接触过去那些伟大的作品时，能够提升自己的精神境界。本书中除了讲述数学的实践性应用外，还会讲述从古巴比伦、古希腊时期起数学的发展趣事。

我不是一名数学家。我在 1989 年获得了东京大学的物理学博士学位，5 年后被聘为加州大学伯克利分校的教授，自 2000 年起一直任职于加州理工学院的物理学教研室。不过在 2010 年，数学教研室的老师们邀请我兼任数学教授。最初我以“自己从来没有验证过什么有名的定理”为由予以拒绝，但是他们劝我说“验证定理不是为数学做贡献的唯一方式。您的研究为数学研究提出了新的问题，促进了数学的新发展”，于是我也只好接受了他们的建议。其实我曾经提过多个有关数学的猜想，后来这些猜想都准确地得到了数学家们的证明。因此，我并不是一名证明定理的数学家，而是作为一名数学的使用者而受到认可。本书所讲述的内容，也正是从使用者角度出发的数学知识。

我决定在个人主页中补充本书未说明的证明过程、后续话题和参考文献，从而确保出现新的发展时能够及时补充相关知识、追加新的参考文献。当然，阅读本书时并不需要借助补充知识。当阅读完本书时，如果想要进一步了解相关知识，也许浏览我的个人主页 http://ooguri.caltech.edu/japanese/mathematics 是个不错的选择。本文也会引用与内容相关的知识点。

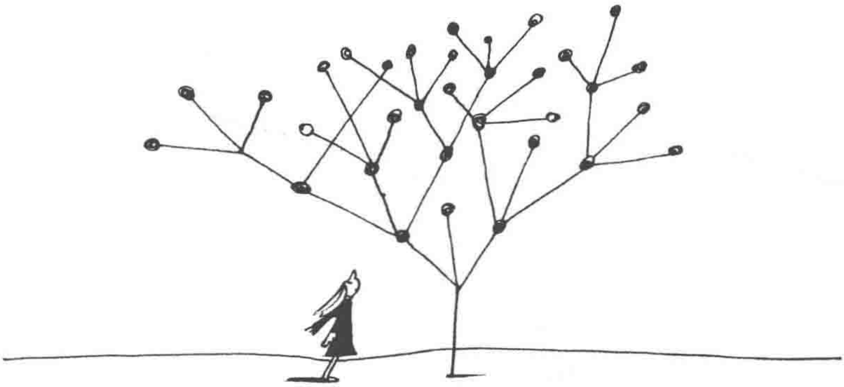
下面，我们开始进入第 1 章。


真的？
很有趣吗？
当然！
开讲了哦！

目　录

第1章

从不确定的信息中作出判断



序　欧·杰·辛普森审判与德肖维茨教授的辩护主张

人生在世，有时需要作出重大决定。学校的考试题目只有一个答案，但是在现实社会中却往往没有正确答案，而且现实社会也不一定会向你提供有助于解答问题的所有材料。当我们必须要从不确定的信息中作出判断时，该如何是好呢？当我们获得新信息时，又该根据什么标准来更改自己的判断呢？现在，我来告诉你如何解决以上问题。

1994 年，你还没有出生。那一年在美国洛杉矶发生了欧·杰·辛普森谋杀案，知名橄榄球运动员辛普森的前妻妮科尔·布朗及其友人罗纳德·古德曼被发现死于高曼的寓所外，辛普森被怀疑是杀害两人的凶手。辛普森退役后以演员和喜剧演员的身份参加各类活动，并且深受人们喜爱。因此，这个案件在当时备受关注。来自美国各地的律

师们组成了辛普森的辩护团，被人们称为“梦之队”。另一方面，检察院也召集了最精明能干的检察官。甚至电视上还直播了这场“世纪审判”的审判情况。

检察院提交了辛普森常年对布朗施暴的证据，试图用家庭暴力证明其有杀人嫌疑。然而，辩护团中的一名律师、哈佛大学法学院的艾伦·德肖维茨教授引用了美国联邦调查局的一个犯罪统计，即虐待妻子的 2500 名丈夫中只有 1 人杀害了自己的妻子，并且主张应该忽略家庭暴力这个证据。结果检察院无力反驳，最终无法让陪审员信服辛普森的施暴行为造成了杀人行为。但是，德肖维茨教授的主张纯属诡辩，完全可以用数学语言驳倒。

刑事审判追究的是有罪的“概率”。除非亲眼看见犯罪，否则就不能百分之百地断定有罪。检察院的工作就是要证明无罪的概率极小，法律术语叫作“排除合理怀疑，判定有罪”。至于多小的概率才能排除合理怀疑，这是一道数学无法判断的主观问题。法官和陪审员的职责正是对此作出判断。但是概率能用数字表达怀疑的程度，并通过这个数字来判断是否存在合理怀疑。这就是数学的力量。

用概率来讲，德肖维茨教授的主张是有家庭暴力的丈夫杀害妻子的概率是 1/2500，因为这个概率极小，所以作为证据并无意义。法官和陪审员在作判断时，必须将所有相关信息考虑在内。实际上，德肖维茨教授忽略了一个重要的信息，即“妮科尔·布朗已经被杀害了”。如果把这个条件加进去的话，概率计算会出现完全不同的结果。第 1 章的目的之一就是解释以上概率问题。

1　先来掷骰子

概率是一种用数字表示某种主张正确率的方法。例如掷骰子的时候，掷出 1 的概率是多少呢？骰子有 6 面，分别标有 1 到 6 这 6 个数字。如果每一面都一样容易掷出的话，那么平均应该是 6 次里有 1 次会掷出 1，即“掷出 1 的概率是 1/6”。

不过，如果骰子特殊，也会出现容易掷出 1 的情况。这样一来，1/6 的概率并不准确。只要通过反复实验，就能算出特殊骰子的概率。假设掷 1000 次骰子，掷出 1 的次数是 496 次，那么得出的概率大于 1/6。将两个概率相比，$496/1000 = 0.496$ 大于 $1/6 \approx 0.167$（在本书中，将 1/6 计算到小数点后 4 位，最后一位数采用四舍五入得出近似值，用符号 ≈ 标记）。因为概率大于 1/6，所以说明这颗骰子容易掷出 1。除非骰子状态发生变化，否则再掷 1000 次骰子时掷出 1 的概率并不会发生改变。但是掷骰子的方法偶尔不同，所以无法保证是否能刚好掷出 496 次 1。因此 0.496 这个概率不是一个精确的数字。如果想要算出更加精确的概率，那么需要增加掷骰子的次数。掷骰子的次数越多，实验得出的概率就越趋向于固定值。这个数学定律就是著名的“大数定律”。

如上所述，计算概率的方法主要有两种，分别是：

【方法 A】 思考所有掷骰子的方法（从 1 到 6），假设掷出每个数字的概率相同，那么因为掷出的数字有 6 种可能性，所以概率为 1/6。

【方法 B】 实际掷骰子，计算（掷出 1 的次数）/（实际掷骰子的次数）得出概率。

虽然方法B无法得到准确概率，但是多亏有大数定律，只要增加实验次数，概率就越接近于固定值(不使用特殊骰子的话等于1/6)。另一方面，因为方法A中假设每个可能性发生的概率相同，所以在特殊骰子的情况下得出的概率并不准确。在后半部分，我将讲解如何在特殊骰子的情况下修正概率。

接下来我们来思考一下掷两个骰子时的情况。两个骰子都掷出1，即两个骰子同时掷出1的概率是多少呢？使用方法A时要思考所有可能性。每个骰子都有6个面，两个骰子掷出的数字组合方式一共有 $6 \times 6 = 36$ 种。如果这36种组合出现的概率相同，那么同时掷出1的概率是36次掷出1次，即1/36。1/36相当于 $1/6 \times 1/6$。也就是说，一个骰子掷出1的概率是1/6，另一个骰子掷出1的概率也是1/6，二者相乘便是两个骰子同时掷出1的概率。

两个事件同时发生的概率等于两个事件概率的乘积。虽然这是概率非常重要的性质，但并不是随时都能成立的。只有发生的两个事件相互独立时，才能运用上述性质。就当前情况而言，其中一个骰子掷出的数字不会影响另一个骰子掷出的结果。

2 赌博中的不败之法

接下来我将运用“两个事件同时发生的概率等于两个事件概率的乘积”的性质，来传授你赌博中的不败之法。例如打赌猜测抛出的硬币是正面朝上还是背面朝上？如果不是特殊的硬币，正面朝上和背面朝上的概率均等于1/2。考虑到硬币存在特殊情况，那么将正面朝上的概率设为 p，背面朝上的概率设为 q。因为硬币只有正面和背面，所以两者的概率关系为 $p + q = 1$。

打赌的内容是正面朝上的话赢 1 日元，背面朝上则输 1 日元。连续抛两次硬币，两次都正面朝上的概率为 $p \times p = p^2$。重复抛硬币的动作，连续抛 n 次，n 次都正面朝上的概率为 p^n（p^n 是 n 个 p 相乘的意思，叫作 p 的 n 次方）。因为 p 小于 1，所以 n 越大，p^n 的值就越小。按照一般常识，很少出现连赢几次的情况也是合情合理的。

假设刚开始时手上有 m 元，每次的赌注为 1 日元。赌博最重要的是把握脱身的好时机，赢的钱增多到 N 元时果断收手。要么开始赢钱时不要收手，直到赢得目标 N 元；要么就一直继续，直到输光。

将赢钱的概率记作 $P(m,N)$。P 是英语概率“Probability”的首字母，常用作表示概率。为了表示 m 元变成 N 元的概率，再在 P 补充写上 (m,N)。这个概率大于 1/2 的话就有赢钱的希望，反之小于 1/2 的话最好还是尽早收手为好。概率的计算公式如下：

$$P(m,N) = \frac{1-(q/p)^m}{1-(q/p)^N}$$

如上所述，我直接简要地导入了上述公式。该公式的解释过程有点复杂，因此我将在个人主页上加以补充。另一方面，将手头上的钱输光的概率等于 $1-P(m,N)$。

不过，$p=q=1/2$ 时，因为 $q/p=1$，所以右边的分子和分母均变成 0，那么 0 除以 0 就没有意义了。因此，出现这种情况时则采用以下计算方法，即

$$P(m,N) = m/N, \text{（当 } p=q=1/2 \text{ 时）}$$

例如 $P(10,20)=1/2$。此时拿 10 日元钱去赌博，所持金额翻倍的概率和输光破产的概率是五五开。

假设用于打赌的硬币与普通硬币稍微有点不同，$p=0.47$，$q=0.53$。如果使用上面的公式，$P(10,20) \approx 0.23$。换言之，所持金额翻倍的概率

降低到 23%，输光的概率升至 77%。只要在硬币上稍微动个手脚，例如将容易抛到背面的概率增加 3%，那么输光的概率就从 50% 增至 77%。

赌注越大，结局就越悲惨。例如想将 50 日元增加到 100 日元，$P(50,100)$ 约等于 0.0025，即 0.25%，这几乎没有赢的可能。

这也是赌场能盈利的原因所在。美式轮盘上有 38 个小方格，其中 36 个分别标有 $1\sim36$，$1\sim18$ 是红色，$19\sim36$ 是黑色。如果仅有上述 36 个数字的话，转到红色和转到黑色的概率均为 $18/36=1/2$。但是轮盘上另外还有标有 0 和 00 的小方格，一旦转到这两个小方格，钱归庄家所有。在这个情况下赌博，对玩家来说赢的概率为 $p=18/38\approx0.47$。换句话说，这个原理与抛硬币时将容易抛到背面的几率增加 3% 相同，计算的结果与刚才完全相符。拿 50 日元去赌博，假设每次的赌注为 1 日元钱，如果想着要翻倍，最终 99.75% 的概率都会输光。

相反，怎样设赌注才能对赌博稍微更有利呢？假设 $p=0.53$，$q=0.47$，使用公式 $P(m,N)$，那么 $P(50,100)\approx0.9975$。p 跟 q 的值与前面的情况相反，所持金额翻倍与输光的概率也正好相反。仅仅增加 3% 的有利条件，50 日元翻倍成 100 日元的概率马上变成了 99.75%。在这种情况下，除非运气特别差，否则谁都能赢。

公式 $P(m,N)$ 能教我们很多知识。首先要知道“即使是仅有轻微不利条件的赌博，也绝不能参加”。因为轻微不利条件也会让输光的概率大大地增加。所以，参加类似轮盘赌和老虎机这种庄家可以控制 p 的赌博，很容易输的。

反过来说，想要在赌博中赢，只要设法让 p 大于 $1/2$ 即可。例如纸牌赌博 21 点，只要提前记住发的纸牌，就能处在优势。在美国的赌场，玩 21 点赢的概率大概设定在 $p=0.495$。如果记住纸牌，赢的概率就会增至 $p=0.51$。达斯汀 · 霍夫曼和汤姆 · 克鲁斯主演的电影《雨人》中就有类似桥段。以前我在普林斯顿高等研究院做研究时，同研究