

河北省自然科学基金项目 (编号: E2009000944, E2012403012)

河北省教育厅重点项目 (编号: ZD2015073)

联合资助

石家庄经济学院学术著作出版基金

工程结构随机地震反应 分析及应用

周爱红 曹秀玲 李志强 袁颖 著

地质出版社

➤ 河北省自然科学基金项目 (编号: E2009000944, E2012403012)

➤ 河北省教育厅重点项目 (编号: ZD2015073)

联合资助

➤ 石家庄经济学院学术著作出版基金

工程结构随机地震反应 分析及应用

周爱红 曹秀玲 李志强 袁颖 著

地质出版社

· 北 京 ·

内 容 提 要

本书是系统介绍结构随机地震反应分析与应用的专著,全书共分8章,前4章为结构随机地震反应分析基本理论,后4章为结构随机地震反应分析频域法求解和时域法求解的应用实例。

本书可供土木专业领域的大学本科生、研究生、教师及科技人员和工程设计人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程结构随机地震反应分析及应用 / 周爱红等著.

— 北京:地质出版社,2015.9

ISBN 978-7-116-09374-4

I. ①工… II. ①周… III. ①地震反应分析 IV.

①P315.61

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第207106号

责任编辑:孙亚芸 杨 艺

责任校对:关风云

出版发行:地质出版社

社址邮编:北京海淀区学院路31号,100083

电 话:(010) 66554528(邮购部);(010) 66554633(编辑部)

网 址:<http://www.gph.com.cn>

传 真:(010) 66554686

印 刷:北京地大天成印务有限公司

开 本:787mm×1092mm^{1/16}

印 张:10

字 数:240千字

版 次:2015年9月北京第1版

印 次:2015年9月北京第1次印刷

定 价:38.00元

书 号:ISBN 978-7-116-09374-4

(如对本书有建议或意见,敬请致电本社;如本书有印装问题,本社负责调换)

前 言

地球上平均每年发生震级 8 级、震中烈度Ⅺ度以上的毁灭性地震 2 次，震级 7 级、震中烈度Ⅸ度以上的大地震 20 次。我国处于世界上两个最活跃的太平洋地震带和欧亚地震带上，属于多地震国家，全国约 60% 的地区属于烈度在Ⅵ度以上的抗震设防区，且目前处于新的活动期。中国地震活动频度高、强度大、震源浅、分布广，是一个震灾严重的国家。从世界范围来说，地震预报仍处于探索阶段。因此，对工程结构进行抗震设计和设防是十分必要的，工程结构的抗震设计也是人类抵御地震灾害的主要途径。

地震动具有明显的随机性，考虑了地震动随机特性的结构抗震设计，已越来越受到人们的重视，并已经在国内外一些抗震规范中有所体现。另外，结构在强震下，通常表现为明显的非线性。人们对于设计的工程结构不可能实现完全控制，对于现有的工程结构不可能实现完备观测，在模型化过程中也可能引入各种不确定性因素。因此，考虑了地震的随机性、结构的非线性和变异性的基于概率的设计是合理的，也是未来的发展趋势。开展结构随机地震反应分析方面的研究，是建立结构抗震概率设计的理论基础和重要组成部分，因此深入开展这方面的研究，具有重要的理论和实际意义。

结构的随机地震反应分析，需要以结构动力学理论、土动力学理论、结构抗震理论和随机振动理论为基础，涉及土动力学、结构动力学、地震工程学以及计算机技术等，属于多学科知识的综合应用。想要在短时间内深入理解和掌握这些理论，并开展相关研究工作，有一定难度。本书的一大特色是尽量使用通俗易懂的语言和数学工具来阐述结构的随机地震反应的基本理论，并与大型数学软件 MATLAB 和大型通用软件 ANSYS 相结合，同时辅以作者提出的有一定创新性、与目前相关理论技术发展水平相适应的概念清楚、计算迅捷、简单实用的结构随机地震反应分析方法和应用实例，使读者在不需要对这些基础理论深入掌握的基础上，能够通过这两个软件的实际应用，理解和掌握结构的随机地震反应分析的基本方法，并开展相关的科研工作。

本人从硕士研究生到博士研究生，及至现在的工作岗位，10 多年来一直从事土动力学、结构动力学、结构抗震和结构随机振动等方面的教学和研究工作。本书是在总结作者多年科研成果的基础上撰写而成的，是一部较为系统地研究和论述结构随机地震反应分析与应用方面的专著。本书的写作思路采用的是“剥洋葱”方式：要开展结构的随机地震反应分析，首先，要进行地震动的模型化和结构参数化；然后，确定随机地震反应的分析方法；最后，不管采用哪种分析方法，都要转化为确定性的地震反应分析，即第 3 章、第 4 章内容。全书共分 8 章，前 4 章为结构随机地震反应分析基本理论部分，后 4 章为结构随机地震反应分析频域法求解和时域法求解的应用实例，其中，第 5 章、第 6 章和第 8 章为频域法求解的应用实例，第 7 章为时域法求解的应用实例。后记部分指出了目前结构随机

地震反应分析与应用中存在的问题，并对其未来的发展方向做了展望。

本研究成果得到了河北省自然科学基金项目（编号：E2009000944、E2012403012）、河北省教育厅重点项目（编号：ZD2015073）和石家庄经济学院学术著作出版基金的联合资助。

本书在撰写过程中，学习、使用和参考了国内外大量的文献、论著以及部分网络材料，在此谨向原作者致以诚挚的谢意和敬意。

本书编写分工如下：第2章内容主要由曹秀玲编写，第7章内容主要由李志强编写，第3章和第4章内容主要由袁颖编写，其余内容由周爱红编写。另外，研究生尹超、王帅伟、吕晓建和张海满等协助做了大量辅助工作，在此深表谢意。

受作者水平和时间所限，本书在内容安排和各章节衔接上还有考虑不周之处，疏漏和不妥之处也在所难免，欢迎读者批评指正。

周爱红

2015年4月

于石家庄经济学院

目 录

前 言

第 1 章 随机地震动模型化及结构参数模型化	(1)
1.1 随机过程	(2)
1.2 平稳随机过程的平均值和相关函数	(6)
1.3 平稳随机过程的功率谱函数	(10)
1.4 随机地震动模型	(15)
1.5 随机变量的概念	(17)
1.6 结构参数的模型化	(20)
第 2 章 结构随机地震反应分析方法	(27)
2.1 线性结构平稳随机地震反应分析方法研究综述	(27)
2.2 复合随机地震反应分析方法概述	(38)
2.3 非线性结构随机地震反应分析方法	(42)
第 3 章 结构动力学基础及 MATLAB 的应用	(49)
3.1 运动微分方程的建立	(49)
3.2 结构的动力特性	(51)
3.3 振型叠加法	(54)
3.4 MATLAB 软件在振动分析中的应用	(61)
3.5 小结	(72)
第 4 章 多自由度体系强迫振动的直接积分法	(73)
4.1 中心差分法	(73)
4.2 线性加速度法	(77)
4.3 Newmark - β 法	(79)
4.4 Wilson - θ 法	(83)
4.5 Runge - Kutta 法	(87)
4.6 状态方程法	(88)
4.7 精细时程积分法	(89)
4.8 小结	(93)
第 5 章 非线性土层、堤坝的随机地震反应	(94)
5.1 地震波的类型	(94)
5.2 线性单自由度体系随机地震反应的虚拟激励法	(95)
5.3 ANSYS 谐响应分析过程	(99)

5.4 随机地震动输入 (103)

5.5 非线性土层随机地震反应分析 (105)

5.6 非线性堤坝复合随机地震反应分析 (109)

第 6 章 非线性桩-土体系的随机地震反应的参数敏感性分析 (119)

6.1 桩基的破坏模式 (120)

6.2 桩-土体系计算模型 (121)

6.3 桩-土体系地震反应分析方法 (122)

6.4 人工边界的设置 (123)

6.5 正交试验设计及分析方法 (124)

6.6 非线性桩-土体系的随机地震反应的参数敏感性分析 (125)

第 7 章 考虑参数变异性的挡土墙随机地震反应分析 (131)

7.1 挡土墙的破坏模式 (131)

7.2 不考虑参数随机性的平稳随机地震响应的脉冲响应函数法 (131)

7.3 重力式挡土墙复合随机地震反应分析 (133)

7.4 计算结果 (136)

第 8 章 非线性桩-土-结构相互作用体系复合随机地震反应 (144)

8.1 桩-土-结构相互作用体系随机地震反应研究综述 (144)

8.2 计算分析 (146)

后记 (154)

第 1 章 随机地震动模型化及 结构参数模型化

地球上平均每年发生震级 8 级、震中烈度Ⅺ度以上的毁灭性地震 2 次，震级 7 级、震中烈度Ⅸ度以上的大地震 20 次。我国处于世界上两个最活跃的太平洋地震带和欧亚地震带上，属于多地震国家，全国约 60% 的地区属于烈度在Ⅵ度以上的抗震设防区，且目前处于新的活动期。从 2010 年到 2014 年 7 月的 5 年半时间内，世界范围内发生 7 级以上地震共 54 例，其中发生在中国新疆 1 例。中国是一个震灾严重的国家，地震活动频度高、强度大、震源浅、分布广。在我国近代历史上，从 1920 年的海原地震至今，共发生了 14 次震级在 7.0 级以上的大地震。用现代的科学方法来观测地震，也是从海原地震之后才开始的。从世界范围来说，地震预报仍处于探索阶段。我国的预报主要是根据多年积累的观测资料和震例进行经验性预报，较大时间尺度的中长期预报已有一定的可信度，但短临预报的成功率还相对较低。工程结构的抗震设计也是人类抵御地震灾害的主要途径，因此，对工程结构进行抗震设计和设防是十分必要的。

地震作用是随时间迅速变化的动态作用，抗震计算应当考虑地震动的运动特征和建筑物的动态特性，应当以动力分析为基础。地震动无论是在时间、空间还是强度方面都具有明显的随机性。但在已有的研究成果中，主要采用选择一条或几条确定性的地震波或反应谱作为输入，求解各点的响应时程或峰值反应，按照确定性分析方法，得出必然安全或肯定破坏的确定性结论。这种方法的一个最明显的不合理之处就是无法考虑各设计变量的随机性，从而导致在工程中某些结构按确定性分析方法设计的安全度是足够的，而投入使用后却可能很快发生破坏。可靠度分析方法的优势就在于可以定量描述各种不确定性因素，并可以将失效概率作为评价安全度的统一度量标准。在一般静力作用下的结构设计，现已广泛采用结构可靠度设计，这也表明在具有明显随机性的地震荷载作用下，采用概率可靠度进行结构的抗震设计也是合理的。

随机振动方法由于较充分地考虑了地震动的随机特性，已越来越受到人们的重视，并已经在国外一些抗震规范中有所体现。如 1987 年美国石油学会 API 规范已把随机地震响应列入平台安全性检验的手段之一；1995 年的欧洲桥梁规范也把随机振动方法作为桥梁抗震分析的一种合理分析方法。我国《水工建筑物抗震设计规范》(DL5073—2000) 规定采用时程分析法计算地震作用效应时，应至少选择类似场地地震地质条件的 2 条实测加速度记录和 1 条以设计反应谱为目标谱的人工生成模拟地震加速度时程，不同地震加速度时程计算的结果应进行综合分析，以确定设计验算应采用的地震作用效应。《建筑抗震设计规范》(GB 50011—2010) 规定，对于特别不规则的建筑、甲类建筑和一定高度范围内的高层建筑，应采用时程分析法进行多遇地震下的补充计算，并明确提出，当取 3 组加速度时程曲线输入时，计算结果宜取时程法的包络值和振型分解反应谱法的较大值；当取 7 组

及 7 组以上的时程曲线时，计算结果可取时程法的平均值和振型分解反应谱法的较大值。采用时程分析法时，应按建筑场地类别和设计地震分组选用实际强震记录和人工模拟的加速度时程曲线，其中实际强震记录的数量不应少于总数的 2/3，多组时程曲线的平均地震影响系数曲线应与振型分解反应谱法所采用的地震影响系数曲线在统计意义上相符。采用这种方式来近似考虑地震的随机性。

人们对于设计的工程结构不可能实现完全控制，对于现有的工程结构不可能实现完备观测，在模型化过程中可能会引入各种不确定性因素。因此，确定性的结构分析模型与实际工程背景相比较，只是对结构特征主导因素的把握，而要更为全面地把握实际结构关于确定性结构模型的各种变异特点，则要考虑结构参数的变异性影响。《工程结构可靠性设计统一标准》（GB50153—2008）规定，材料性能参数和几何参数宜采用随机变量概率模型描述。

在结构随机地震反应分析之前，首先要进行随机地震动的模型化及结构参数的模型化。

1.1 随机过程

自然界物体的运动过程一般都可以用随机过程来描述，地震动过程亦是如此。

1.1.1 随机过程的概念

对于每个时间 $t \in T$ (T 是某个固定的时间域)， $X(t)$ 是一个随机变量，则这样的随机变量族 $[X(t), t \in T]$ 称为随机过程。若 T 是离散时间域，则 $X(t)$ 是一个随机时间序列。对振动过程离散采样时，得到的就是时间序列。

如图 1.1 所示， $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 即为随机变量 $X(t)$ 的 n 个“样本”。

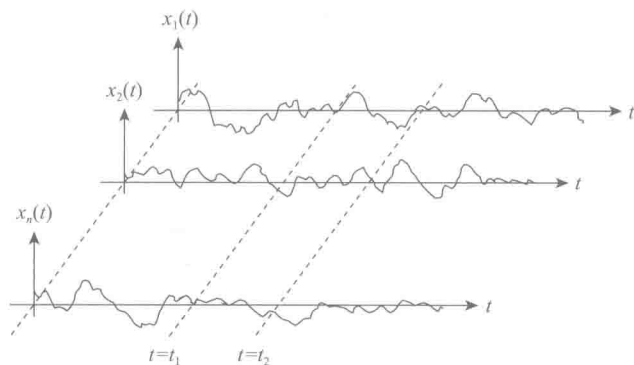


图 1.1 样本函数

1.1.2 随机过程的统计特征

随机过程在固定时刻 t 的各个样本上取值进行集合平均, 得到随机过程的数学期望, 可表示为

$$E[X(t)] = \bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dF(x, t) \quad (1.1)$$

式中: $F(x, t)$ 为 $X(t)$ 的概率分布函数。

同样地, 均方值可表示为

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dF(x, t) \quad (1.2)$$

方差为

$$D[X(t)] = \sigma_X^2(t) = E[(X(t) - \bar{x}(t))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \bar{x}(t))^2 dF(x, t) \quad (1.3)$$

为了研究一个随机过程 $X(t)$ 在两个不同时刻随机变量 $X(t_1)$ 、 $X(t_2)$ 的相互依赖关系, 定义自相关函数为

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t_1)X_2(t_2) dF(X_1, t_1; X_2, t_2) \quad (1.4)$$

相应地, 有自协方差函数:

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \bar{x}(t_1))(X(t_2) - \bar{x}(t_2))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X_1(t_1) - \bar{x}(t_1))(X_2(t_2) - \bar{x}(t_2)) dF(X_1, t_1; X_2, t_2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

很显然:

$$R_{XX}(t, t) = D[X(t)] \quad (1.6)$$

$$C_{XX}(t, t) = \sigma_X^2(t) \quad (1.7)$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2) \quad (1.8)$$

定义规格化无量纲自协方差函数 (自相关系数)

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{C_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \quad (1.9)$$

其中, $-1 \leq \rho_{XX}(t_1, t_2) \leq 1$ 。

为了研究两个随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 在不同时刻随机变量的相互关系, 定义互相关函数为

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)y(t_2) dF(x, t_1; y, t_2) \quad (1.10)$$

相应地, 有互协方差函数:

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \bar{x}(t_1))(Y(t_2) - \bar{y}(t_2))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - \bar{x}(t_1))(y(t_2) - \bar{y}(t_2)) dF(x, t_1; y, t_2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

互相关函数和互协方差函数有如下性质:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= R_{YX}(t_2, t_1) \neq R_{XY}(t_2, t_1) \\ C_{XY}(t_1, t_2) &= C_{YX}(t_2, t_1) \neq C_{XY}(t_2, t_1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}C_{XY}(t_1, t_2) &= R_{XY}^2(t_1, t_2) - \bar{x}(t_1)\bar{y}(t_2) \\ C_{YX}(t_2, t_1) &= R_{YX}^2(t_2, t_1) - \bar{y}(t_2)\bar{x}(t_1)\end{aligned}\quad (1.13)$$

定义规格化无量纲互协方差函数（互相关系数）：

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{C_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)} \quad (1.14)$$

其中， $-1 \leq \rho_{XY}(t_1, t_2) \leq 1$ 。

1.1.3 平稳随机过程

随机过程中比较容易计算，因而已经在工程中得到最广泛应用的是平稳随机过程。它的特点是其概率特性不随时间的移动而变化。严格平稳性在随机过程理论中有着严格的定义，它要求概率密度函数不随时间的变化而变化，在工程中通常很难满足这样严格的条件。因此又引入了广义平稳（又称弱平稳或宽平稳）的概念，只需平均值与相关函数保持平稳就认为是平稳随机过程。如果仅要求协方差函数具有平稳性，对平均值的平稳性也不作要求，则称之为协方差平稳随机过程。

随机过程 $X(t)$ ，如果其任意 n 个时刻的值 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 的联合分布都是正态的，则称 $X(t)$ 为正态随机过程。由于这 n 个值的联合密度函数只与这 n 个值的均值和协方差矩阵有关，所以对于正态随机过程而言，其严格平稳和广义平稳是等价的。

在平稳随机过程中最为重要的一类是具有各态历经性的平稳随机过程。为了计算平稳随机过程的各种统计量，严格地说，应该先得到大量的测量曲线。从每一条样本曲线都可以通过统计（进行时间平均）得到一组概率特性，在每一条样本曲线上任选一点，对所选出的所有点进行集合平均，也可以得到相应的概率特性。如果如上得到的所有各组概率特性都相等，那么这类平稳随机过程可以认为具有各态历经性。也就是说，其中任意一条样本曲线大体包含了该随机过程所具有的所有统计特性。因此，对于这类随机过程，只需测量到一条实测曲线（各态历经性），就可以由它得到所需的各种统计参数。根据所选取的统计参数的不同，如平均值、相关函数、概率密度函数等，各态历经性有不同的数学定义，可参考有关著作^[1,2]。尽管各态历经性在数学上有相当严格的描述和限制，而且其限制要比平稳性严格得多，但在工程应用上有时对这些限制的认定往往是极其粗糙的。根据工程所在地点的一条地震记录曲线，尽管从理论上讲其平稳性只能勉强予以认定，却可将其看作是各态历经性的，可从中提取大量的统计资料供计算分析使用。事实上，在同一地点获得两条以上地震记录往往并不容易。

根据各态历经假设，对于连续型平稳随机过程 $X(t)$ ，其在时间域上的平均值为

$$E[X(t)] = \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \hat{x}(t) dt \quad (1.15)$$

式中： $\hat{x}(t)$ 为随机过程 $X(t)$ 的样本函数。

均方值为

$$E[X^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \hat{x}^2(t) dt \quad (1.16)$$

方差（或二阶中心矩）可表示为

$$D[x(t)] = \sigma_X^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T (\hat{x}(t) - \bar{x}(t))^2 dt \quad (1.17)$$

自相关函数为

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) dt \quad (1.18)$$

互相关函数为

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \hat{x}(t_1) \hat{y}(t_2) dt \quad (1.19)$$

式中: $\hat{y}(t_2)$ 为随机过程 $Y(t)$ 的样本函数。

1.1.4 非平稳随机过程

平稳随机过程假定在时间 $t \in (-\infty, +\infty)$ 范围内该过程的统计特性是不变的。实际上这是很难达到的。例如在地震刚发生的阶段, 短暂阵风对结构物的吹袭过程以及汽车起动阶段路面因具有不平度对它的随机干扰等, 都应该看作是非平稳随机过程。

计算结构的非平稳随机响应历来被认为是相当困难的。在工程中应用最为广泛的非平稳随机过程的简化模型为

$$Y(t) = g(t)X(t) \quad (1.20)$$

式中: $g(t)$ 为一确定性的慢变调制函数 (或称为包络函数); $X(t)$ 为一平稳随机过程, 其功率谱为已知。

这样定义的非平稳随机过程 $Y(t)$ 称为均匀调制的演变随机过程 (图 1.2)。它只能反映振动强度随时间的非平稳性, 但是不能反映振动能量随频率分布的非平稳性。即使如此, 计算由它引起的结构非平稳随机响应也不是轻松的事。在后面讨论的非均匀调制模型将同时包含振动强度和振动能量随频率分布的双重非平稳性。该模型常用 Riemann-Stieltjes 积分表达为

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega, t) \exp(i\omega t) d\alpha(\omega) \quad (1.21)$$

其中, $\alpha(\omega)$ 满足下列关系

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\alpha(\omega) \quad (1.22)$$

$$E[d\alpha^*(\omega_1) d\alpha(\omega_2)] = S_{XX}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \quad (1.23)$$

式中: ω 为圆频率; 上标 * 代表取复共轭; $X(t)$ 为一个平稳随机过程, 其自谱为 $S_{XX}(\omega)$; $A(\omega, t)$ 为确定性慢变的非均匀调制函数; δ 为 Dirac 函数。

$Y(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega_1, t_1) \exp(-i\omega_1 t_1) A(\omega_2, t_2) \exp(i\omega_2 t_2) d\alpha^*(\omega_1) d\alpha(\omega_2) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega_1, t_1) \exp(-i\omega_1 t_1) A(\omega_2, t_2) \exp(i\omega_2 t_2) E[d\alpha^*(\omega_1) d\alpha(\omega_2)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

利用 Dirac 函数的性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega_2 - \omega_1) G(\omega_1) d\omega_1 = G(\omega_2) \quad (1.25)$$

将式 (1.23) 代入式 (1.24) 得

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega_2, t_1) \exp(-i\omega_2 t_2) A(\omega_2, t_2) \exp(i\omega_2 t_2) S_{XX}(\omega_2) d\omega_2 \quad (1.26)$$

不妨将哑标 ω_2 改为 ω 。令 $t_1 = t_2 = t$, $R_{YY}(t_1, t_2)$ 就成为 $Y(t)$ 的均方差:

$$R_{YY}(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega, t)|^2 S_{XX}(\omega) d\omega \quad (1.27)$$

其右端的被积函数就是 $Y(t)$ 的自谱:

$$S_{YY}(\omega) = |A(\omega, t)|^2 S_{XX}(\omega) \quad (1.28)$$

因推导和计算中涉及 Riemann-Stieltjes 积分而不方便应用, 以往对该非均匀调制模型的实际计算和应用很少。

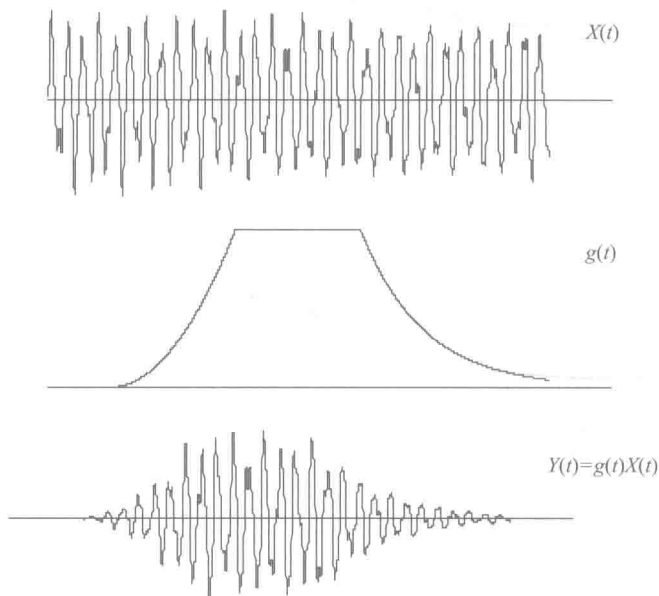


图 1.2 均匀调制演变随机过程

1.2 平稳随机过程的平均值和相关函数

如上一节所述, 广义平稳 (弱平稳或宽平稳) 随机过程只需平均值与相关函数保持平稳就可以了。下面进一步讨论平稳随机过程的平均值和相关函数。

1.2.1 平均值

对任意时刻 $t \in T$, 平稳随机过程 $X(t)$ 的均值为

$$\bar{x}(t) = E[X(t)] = \bar{x} = \text{常数} \quad (1.29)$$

1.2.2 自相关函数与自协方差函数

对任意时刻 $t \in T$, 平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t+\tau) dF(x_1, t; x_2, t+\tau) \quad (1.30)$$

若 $X(t)$ 满足各态历经假设, 则自相关函数可表示为

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau) dt \quad (1.31)$$

若 $\bar{x}$ 是 $X(t)$ 的平均值, 记 $\xi(t)$ 是 $X(t)$ 的零均值随机分量:

$$\xi(t) = X(t) - \bar{x} \quad (1.32)$$

则由式 (1.5) 可知 $X(t)$ 的自协方差函数为

$$C_{XX}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)] \quad (1.33)$$

因此, 不论平均值 $\bar{x}$ 为多大, $X(t)$ 的自协方差函数都是相同的。

例 1.1 设 $X(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, 其中 φ 为在 $[0, 2\pi)$ 内均匀分布的随机数, A 与 ω 为常数, 计算 $X(t)$ 的相关函数。

按式 (1.30) 可知:

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[A^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \omega\tau + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi + \omega\tau) d\varphi = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \end{aligned}$$

$R_{XX}(\tau)$ 保留了 $X(t)$ 的幅值 (A) 特性与频率 (ω) 的特性, 但是不保留其相位角 (φ) 的特性。一般的平稳随机过程可以认为是由大量此类简谐波组成的。由于各谐波分量的相位角随机分布, 所以各样本函数之间显得各不相同。但是按每一样本计算得到的相关函数却十分接近, 这是由于各样本中幅值 A 随频率 ω 的分布都十分近似。

图 1.3 是零均值平稳随机过程 $\xi(t)$ 和将它沿时间轴移动一个小量 τ 所产生的 $\xi(t+\tau)$ 两条曲线。由此图可以对 $R_{\xi\xi}(\tau)$ 的变化规律做出一些直观的判断:

当 $\tau=0$ 时, $\xi(t)\xi(t+\tau)dt$ 全为正值, $R_{\xi\xi}(\tau)$ 达最大。

当 $\tau \approx 0$ 时, $\xi(t)\xi(t+\tau)dt$ 多数为正值, 少数为负值, $R_{\xi\xi}(\tau)$ 还算比较大。

当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $\xi(t)\xi(t+\tau)dt$ 正负值大致平均地分布在时间轴两侧, $R_{\xi\xi}(\tau) \rightarrow 0$ 。

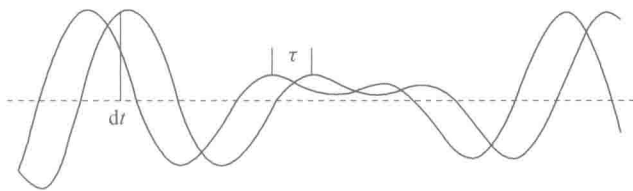


图 1.3 自相关函数示意图

图 1.4 给出了 4 种典型平稳随机过程的时间历程曲线 (左侧 4 个图) 和相应的相关函数曲线 (右侧 4 个图)。图中自上而下, 表示随机过程中所含谐波分量逐渐增多。简谐波仅含有单一的谐波分量; 窄带随机过程的谐波分量分布在一个狭窄的频带上; 宽带随机过程的谐波分量则分布在一个相当宽的频带上, 时间历程曲线上的“毛刺”表明其高频分量, 是宽带过程的明显特征; 而白噪声过程则在 $(-\infty, \infty)$ 频率区间都有相同强度的谐波分量, 从能量角度看这是不现实的, 但是引入白噪声过程可以在随机振动的理论推演上带来很多方便。从图 1.4 中的 4 种相关函数曲线也可以看到, 在 $\tau=0$ 处 $R_{XX}(\tau)$ 取最大值。

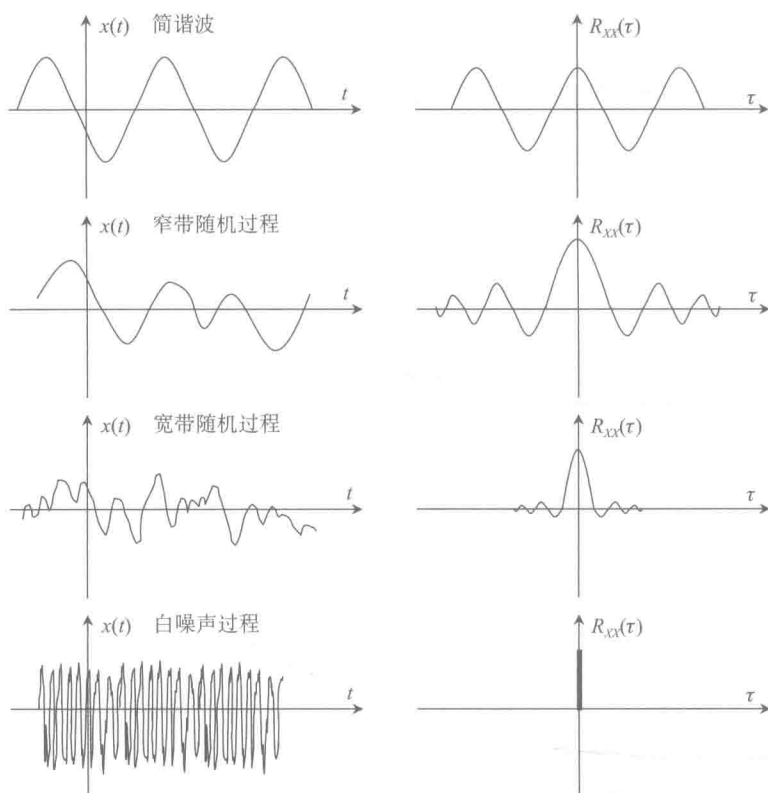


图 1.4 4 种典型平稳随机过程的时间历程线 (左侧 4 个图) 和相关函数曲线 (右侧 4 个图)

平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_{XX}(\tau)$ 有如下主要特性:

1) $R_{XX}(\tau)$ 是 τ 的偶函数:

$$R_{XX}(-\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = E[X(t-\tau)X(t)] \stackrel{t'=t-\tau}{=} E[X(t')X(t'+\tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (1.34)$$

2) 当 $\tau=0$ 时, $R_{XX}(\tau)$ 取极大值 $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$, 取:

$$\begin{aligned} f(a) &= E[(aX(t) + X(t+\tau))^2] = a^2 E[X^2(t)] + 2aE[X(t)X(t+\tau)] + E[X^2(t+\tau)] \\ &= a^2 R_{XX}(0) + 2aR_{XX}(\tau) + R_{XX}(0) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

因 a 是任意的, 故必有 $4R_{XX}^2(\tau) - 4R_{XX}^2(0) \leq 0$, 即根据式 (1.8) 可知 $R_{XX}(0) = \bar{x}^2 + \sigma_X^2$ 。其中 $\bar{x}$ 和 σ_X^2 分别为该平稳随机过程的平均值和方差。

$$R_{XX}(\tau) \leq R_{XX}(0) = \bar{x}^2 + \sigma_X^2 \quad (1.36)$$

3) 若将平稳随机过程 $X(t)$ 表示为:

$$X(t) = \bar{x} + \xi(t) \quad (1.37)$$

式中: $\bar{x}$ 和 $\xi(t)$ 分别为 $X(t)$ 的平均值和零均值平稳随机分量, 则

$$R_{XX}(\tau) = \bar{x}^2 + R_{\xi\xi}(\tau) \quad (1.38)$$

这个证明过程十分简单。事实上, 因为:

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[(\bar{x} + \xi(t))(\bar{x} + \xi(t+\tau))] \\ &= E[\bar{x}^2 + \xi(t)\bar{x} + \bar{x}\xi(t+\tau) + \xi(t)\xi(t+\tau)] \end{aligned}$$

再注意 $\bar{x}^2$ 是常数, 而 $\xi(t)$ 及 $\xi(t+\tau)$ 的平均值都是零, 所以:

$$R_{XX}(\tau) = \bar{x}^2 + 0 + 0 + E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = \bar{x}^2 + R_{\xi\xi}(\tau)$$

4) $R_{XX}(\tau)$ 的下界为 $\bar{x}^2 - \sigma_X^2$:

自相关函数的规格化无量纲形式是按下式定义的自相关系数:

$$\rho_{XX}(\tau) = \frac{C_{XX}(\tau)}{\sigma_X^2} \quad (-1 \leq \rho_{XX}(\tau) \leq 1) \quad (1.39)$$

由式 (1.33) 和式 (1.38) 得到 $-\sigma_X^2 \leq R_{XX}(\tau) - \bar{x}^2 \leq \sigma_X^2$, 即

$$\bar{x}^2 - \sigma_X^2 \leq R_{XX}(\tau) \leq \bar{x}^2 + \sigma_X^2 \quad (1.40)$$

5) $R_{XX}(\tau)$ 的上界为 $\bar{X}^2 + \sigma_X^2$:

$$R_{XX}(\tau) \leq \bar{X}^2 + \sigma_X^2 \quad (1.41)$$

6) $R_{XX}(\tau)$ 的二阶导数为 $-R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} R_{XX}(\tau) = E\left[X(t) \frac{d}{d\tau} X(t+\tau)\right] = E[X(t) \dot{X}(t+\tau)] = E[X(t-\tau) \dot{X}(t)] \quad (1.42)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} R_{XX}(\tau) = E[-\dot{X}(t-\tau) \dot{X}(t)] = -E[\dot{X}(t) \dot{X}(t+\tau)] = -R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) \quad (1.43)$$

7) $\dot{X}(t)$ 的平均值为 0:

$$E[\dot{X}(t)] = \frac{d}{dt} E[X(t)] = 0 \quad (1.44)$$

由式 (1.42) 和式 (1.44) 知平稳随机过程的导函数也是平稳的。

1.2.3 互相关函数与互协方差函数

对任意时刻 $t \in T$, 平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 为

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dF(x, t; y, t+\tau) \quad (1.45)$$

$$R_{YX}(\tau) = E[Y(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t+\tau) dF(y, t; x, t+\tau) \quad (1.46)$$

若 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 满足各态历经假设, 则式 (1.45) 和式 (1.46) 可表示为

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{x}(t) \hat{y}(t+\tau) dt \quad (1.47)$$

$$R_{YX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{y}(t) \hat{x}(t+\tau) dt \quad (1.48)$$

记 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的平均值, 而 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的零均值随机分量:

$$\xi(t) = X(t) - \bar{x} \quad (1.49)$$

$$\eta(t) = Y(t) - \bar{y} \quad (1.50)$$

则 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 之间的互协方差函数为

$$C_{XY}(\tau) = R_{\xi\eta}(\tau) = E[\xi(t)\eta(t+\tau)] \quad (1.51)$$

$$C_{YX}(\tau) = R_{\eta\xi}(\tau) = E[\eta(t)\xi(t+\tau)] \quad (1.52)$$

平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 有如下主要特性:

1) $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 都不是 τ 的偶函数, 但是它们有下列性质:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (1.53)$$

这可由 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的平稳性来证明:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = E[X(t-\tau)Y(t)] = R_{YX}(-\tau) \quad (1.54)$$

2) 当 $\tau=0$ 时, $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 都不取极大值, 但是:

$$\begin{aligned} |R_{XY}(\tau)| &\leq (R_{XX}(0)R_{YY}(0))^{0.5} \\ |R_{YX}(\tau)| &\leq 0.5(R_{XX}(0)+R_{YY}(0)) \end{aligned} \quad (1.55)$$

这表明 $R_{XY}(\tau)$ 必小于 $R_{XX}(0)$ 和 $R_{YY}(0)$ 的几何平均值, 也小于它们的算术平均值。将式 (1.54) 和式 (1.55) 的下标 X 和 Y 互换位置就得到 $R_{YX}(\tau)$ 所满足的两个相似不等式。

3) 由 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的互相关函数可以按下式求出 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数:

$$R_{XY}(\tau) = \bar{x}\bar{y} + R_{\xi\eta}(\tau) \quad (1.56)$$

$$R_{YX}(\tau) = \bar{x}\bar{y} + R_{\eta\xi}(\tau) \quad (1.57)$$

互协方差函数的规格化无量纲形式是按下式定义的互相关系数:

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sigma_X\sigma_Y} \quad -1 \leq \rho_{XY}(\tau) \leq 1 \quad (1.58)$$

$$\rho_{YX}(\tau) = \frac{C_{YX}(\tau)}{\sigma_Y\sigma_X} \quad -1 \leq \rho_{YX}(\tau) \leq 1 \quad (1.59)$$

例 1.2 设 $X(t) = x_0 \sin(\omega t + \theta)$ 及 $Y(t) = y_0 \sin(\omega t + \theta + \varphi)$, 其中 θ 是在 $[0, 2\pi)$ 区间均匀分布的随机变量, x_0 、 y_0 、 ω 及 φ 是常量, 计算 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数。

代入互相关函数的定义式 (1.40) 可得:

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = E[x_0 y_0 \sin(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \omega\tau + \theta + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0 y_0 \sin(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \omega\tau + \theta + \varphi) d\theta \\ &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau - \varphi) \end{aligned}$$

相似地, 算得:

$$R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau + \varphi)$$

例 1.3 设 $Z(t)$ 是平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之和:

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

现在用关于 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的相关函数来表达 $Z(t)$ 的自相关函数。

$$\begin{aligned} \text{因为} \quad R_{ZZ}(\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(X(t) + Y(t)) \cdot (X(t+\tau) + Y(t+\tau))] \\ &= E[X(t)X(t+\tau) + Y(t)Y(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + Y(t)X(t+\tau)] \end{aligned}$$

根据自相关函数和互相关函数的定义可知:

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{YY}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) \quad (1.60)$$

1.3 平稳随机过程的功率谱函数

相关函数体现了随机过程的时域特征, 而功率谱密度函数则反映了随机过程的频域特征。